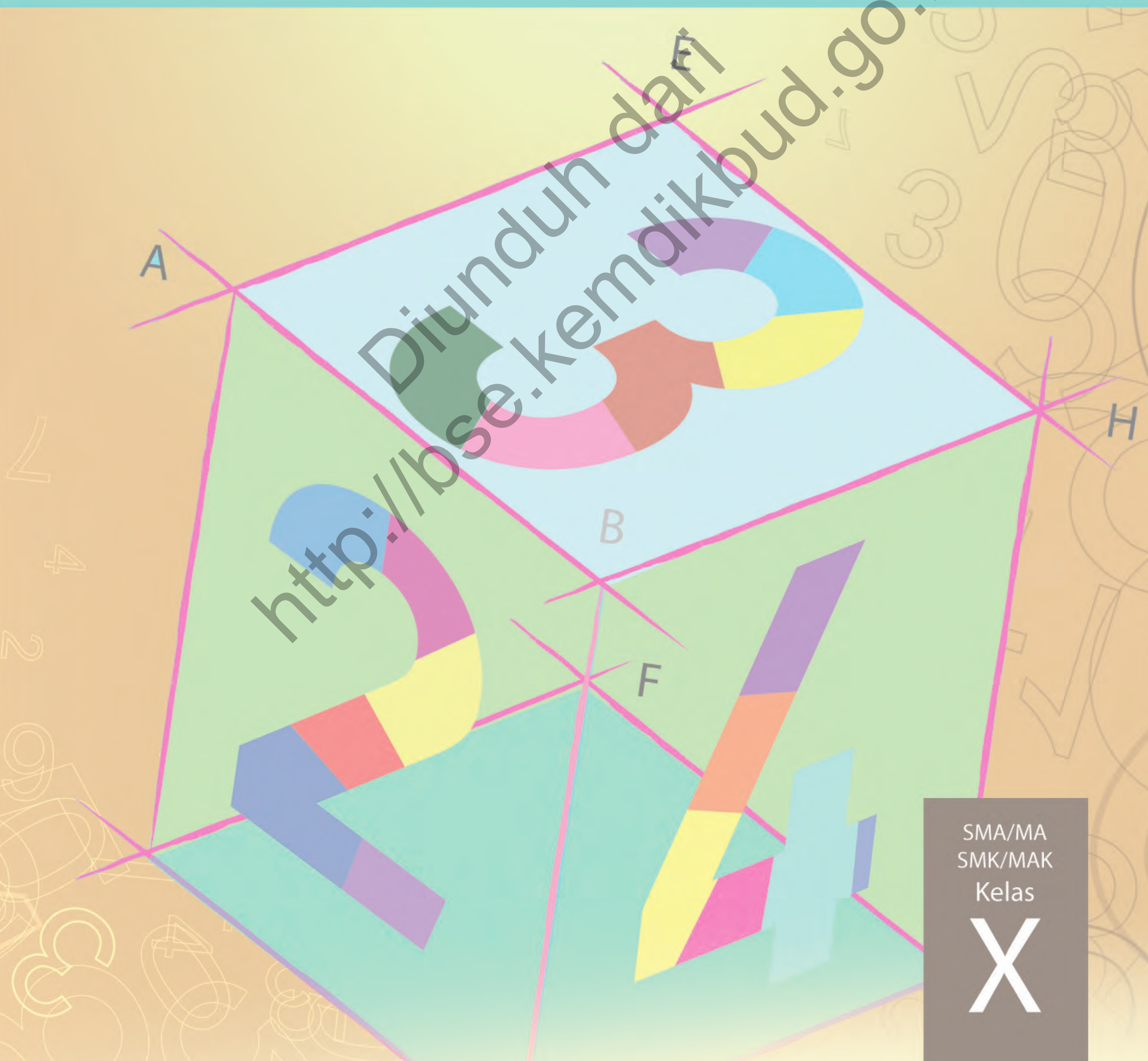
EDISI REVISI 2014

Buku Guru

MATEMATIKA



SMA/MA
SMK/MAK
Kelas
X

Disklaimer: *Buku ini merupakan buku guru yang dipersiapkan Pemerintah dalam rangka implementasi Kurikulum 2013. Buku guru ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, dan dipergunakan dalam tahap awal penerapan Kurikulum 2013. Buku ini merupakan "dokumen hidup" yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.*

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Indonesia. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
Matematika: Buku Guru/Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.-- Edisi Revisi.
Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2014.
xxii, 578 hlm. : ilus. ; 25 cm.

Untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X
ISBN 978-602-282-494-7 (jilid lengkap)
ISBN 978-602-282-495-4 (jilid 1)

1. Matematika — Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

510

Kontributor Naskah : Bornok Sinaga, Pardomuan N.J.M. Sinambela, Andri Kristianto Sitanggang, Tri Andri Hutapea, Lasker Pangarapan Sinaga, Sudianto Manullang, Mangara Simanjorang, dan Yuza Terzalgi Bayuzetra.
Penelaah : Agung Lukito dan Sisworo.
Penyelia Penerbitan : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Cetakan Ke-1, 2013
Cetakan Ke-2, 2014 (Edisi Revisi)
Disusun dengan huruf Times New Roman, 11 pt.

Kata Pengantar

Matematika adalah bahasa universal untuk menyajikan gagasan atau pengetahuan secara formal dan presisi sehingga tidak memungkinkan terjadinya multi tafsir. Penyampaiannya adalah dengan membawa gagasan dan pengetahuan konkret ke bentuk abstrak melalui pendefinisian variabel dan parameter sesuai dengan yang ingin disajikan. Penyajian dalam bentuk abstrak melalui matematika akan mempermudah analisis dan evaluasi selanjutnya.

Permasalahan terkait gagasan dan pengetahuan yang disampaikan secara matematis akan dapat diselesaikan dengan prosedur formal matematika yang langkahnya sangat presisi dan tidak terbantahkan. Karenanya matematika berperan sebagai alat komunikasi formal paling efisien. Perlu kemampuan berpikir kritis-kreatif untuk menggunakan matematika seperti uraian diatas: menentukan variabel dan parameter, mencari keterkaitan antar variabel dan dengan parameter, membuat dan membuktikan rumusan matematika suatu gagasan, membuktikan kesetaraan antar beberapa rumusan matematika, menyelesaikan model abstrak yang terbentuk, dan mengkonkretkan nilai abstrak yang diperoleh.

Buku Matematika Kelas X untuk Pendidikan Menengah ini disusun dengan tujuan memberi pengalaman konkret-abstrak kepada peserta didik seperti uraian diatas. Pembelajaran matematika melalui buku ini akan membentuk kemampuan peserta didik dalam menyajikan gagasan dan pengetahuan konkret secara abstrak, menyelesaikan permasalahan abstrak yang terkait, dan berlatih berfikir rasional, kritis dan kreatif.

Sebagai bagian dari Kurikulum 2013 yang menekankan pentingnya keseimbangan kompetensi sikap, pengetahuan dan keterampilan, kemampuan matematika yang dituntut dibentuk melalui pembelajaran berkelanjutan: dimulai dengan meningkatkan pengetahuan tentang metode-metode matematika, dilanjutkan dengan keterampilan menyajikan suatu permasalahan secara matematis dan menyelesaikannya, dan bermuara pada pembentukan sikap jujur, kritis, kreatif, teliti, dan taat aturan.

Buku ini menjabarkan usaha minimal yang harus dilakukan peserta didik untuk mencapai kompetensi yang diharapkan. Sesuai dengan pendekatan yang dipergunakan dalam Kurikulum 2013, peserta didik diberanikan untuk mencari dari sumber belajar lain yang tersedia dan terbentang luas di sekitarnya. Peran guru sangat penting untuk meningkatkan dan menyesuaikan daya serap peserta didik dengan ketersedian kegiatan pada buku ini. Guru dapat memperkayanya dengan kreasi dalam bentuk kegiatan-kegiatan lain yang sesuai dan relevan yang bersumber dari lingkungan sosial dan alam.

Implementasi terbatas pada tahun ajaran 2013/2014 telah mendapat tanggapan yang sangat positif dan masukan yang sangat berharga. Pengalaman tersebut dipergunakan semaksimal mungkin dalam menyiapkan buku untuk implementasi menyeluruh pada tahun ajaran 2014/2015 dan seterusnya. Buku ini merupakan edisi kedua sebagai penyempurnaan dari edisi pertama. Buku ini sangat terbuka dan terus dilakukan perbaikan dan penyempurnaan. Untuk itu, kami mengundang para pembaca memberikan kritik, saran dan masukan untuk perbaikan dan penyempurnaan pada edisi berikutnya. Atas kontribusi tersebut, kami ucapkan terima kasih. Mudah-mudahan kita dapat memberikan yang terbaik bagi kemajuan dunia pendidikan dalam rangka mempersiapkan generasi seratus tahun Indonesia Merdeka (2045).

Jakarta, Januari 2014

Menteri Pendidikan dan Kebudayaan

Mohammad Nuh

Surat Buat Guru

Bapak, Ibu guru kami yang terhormat, banyak hal yang sudah kita lakukan sebagai usaha membelajarkan peserta didik dengan harapan, mereka berketuhanan, berperikemanusiaan, berpengetahuan, dan berketerampilan melalui pendidikan matematika. Harapan dan tugas mulia ini cukup berat, menuntut tanggung jawab yang tidak habis-habisnya dari generasi ke generasi.

Banyak masalah pembelajaran matematika yang kita hadapi, bagaikan menelusuri sebuah lingkaran dengan titik-titik masalah yang tak berhingga banyaknya. Tokoh pendidikan matematika Soedjadi dan Yansen Marpaung menyatakan, kita harus berani memilih/menetapkan tindakan dan menghadapi resiko untuk meningkatkan kualitas pendidikan matematika di setiap sekolah tempat guru melaksanakan tugas profesionalitasnya. Artinya, guru sebagai orang yang pertama dan yang utama bertindak sebagai pengembang kurikulum yang mengenal karakteristik siswa dengan baik, dituntut bekerjasama memikirkan jalan keluar permasalahan yang terjadi. Pola pembelajaran yang bagaimana yang sesuai dengan karakteristik matematika dan karakteristik peserta didik di sekolah Bapak/Ibu ?.

Salah satu alternatif, kita akan mengembangkan pembelajaran matematika berbasis paham konstruktivisme. Buah pikiran ini didasari prinsip bahwa: (1) setiap anak lahir di bumi, mereka telah memiliki potensi, (2) cara berpikir, bertindak, dan persepsi setiap orang dipengaruhi budaya, (3) matematika adalah produk budaya, yaitu hasil konstruksi sosial dan sebagai alat penyelesaian masalah kehidupan, dan (4) matematika adalah hasil abstraksi pikiran manusia. Untuk itu diperlukan perangkat pembelajaran, media pembelajaran, asesmen otentik dalam pelaksanaan proses pembelajaran di kelas.

Model pembelajaran yang menganut paham konstruktivistik yang relevan dengan karakteristik matematika dan tujuan pembelajaran matematika cukup banyak, seperti (1) model pembelajaran berbasis masalah, (2) pembelajaran kontekstual, (3) pembelajaran kooperatif dan banyak model pembelajaran lainnya. Bapak/Ibu dapat mempelajarinya secara mendalam melalui aneka sumber pembelajaran.

Pokok bahasan yang dikaji dalam buku petunjuk guru ini, antara lain: (1) eksponen dan logaritma, (2) persamaan dan pertidaksamaan linier, (3) sistem persamaan dan pertidaksamaan linier, (4) matriks, (5) relasi dan fungsi, (6) barisan dan deret, (7) persamaan dan fungsi kuadrat, (8) geometri, (9) trigoniometri, (10) statistik, (11) peluang, dan (12) limit fungsi yang tertera dalam kurikulum 2013. Berbagai konsep, aturan dan sifat-sifat dalam matematika ditemukan melalui penyelesaian masalah nyata, media pembelajaran, yang terkait dengan materi yang diajarkan. Seluruh materi yang diajarkan berkiblat pada pencapaian kompetensi yang ditetapkan dalam kurikulum matematika 2013. Semua petunjuk yang diberikan dalam buku ini hanyalah pokok-pokoknya saja. Oleh karena itu, Bapak dan Ibu guru dapat mengembangkan dan menyesuaikan dengan keadaan dan suasana kelas saat pembelajaran berlangsung.

Akhirnya, tidak ada gading yang tak retak. Rendahnya kualitas pendidikan matematika adalah masalah kita bersama. Kita telah diberi talenta yang beragam, seberapa besar buahnya yang dapat kita persembahkan padaNya. Taburlah rotimu di lautan tanpa batas, percayalah kamu akan mendapat roti sebanyak pasir di tepi pantai. Mari kita lakukan tugas mulia ini sebaik-baiknya, semoga buku petunjuk guru ini dapat digunakan dan bermanfaat dalam pelaksanaan proses pembelajaran matematika di sekolah.

Jakarta, Pebruari 2013

Tim Penulis

DAFTAR ISI

A. PETUNJUK PENGGUNAAN BUKU GURU

Dalam bagian ini diuraikan hal-hal penting yang perlu diikuti guru, saat guru menggunakan buku ini. Hal-hal esensial yang dijabarkan, antara lain: (1) pentingnya guru memahami model pembelajaran berbasis konstruktivis dengan pendekatan scientific learning terkait sintaksis model pembelajaran yang diterapkan, sistem sosial, prinsip reaksi pengelolaan (perilaku guru mengajar di kelas), sistem pendukung pemeblajaran yang harus dipersiapkan (berbagai fasilitas, misalnya buku siswa, lembar aktivitas siswa, media pembelajaran, instrumen penilaian, tugas-tugas yang akan diberikan), serta dampak intruksional dan dampak pengiring (sikap) yang harus dicapai melalui proses pembelajaran; (2) mengorganisir siswa belajar (di dalam dan luar kelas) dalam memberi kesempatan mengamati data, informasi, dan masalah, kerja kelompok dalam memecahkan masalah, memberi bantuan jalan keluar bagi siswa; (3) memilih model, strategi, dan metode pembelajaran untuk tujuan pembelajaran yang efektif; (4) memilih sumber belajar yang melibatkan partisipasi aktif siswa dalam proses pembelajaran yang dipicu melalui pengajuan masalah, pemberian tugas produk, projek; (5) petunjuk penggunaan asesmen otentik untuk mengecek keberhasilan aspek sikap, pengetahuan dan keterampilan; (6) petunjuk pelaksanaan remedial dan pemberian pengayaan.

Isi buku guru ini, memuat petunjuk pembelajaran di setiap bab yang berdampingan dengan aktivitas yang ada di buku siswa. Pertanyaan-pertanyaan kritis dan latihan memiliki kunci jawaban dan arahan pembelajaran dari guru untuk pemecahannya. Di samping proses pembelajaran yang tertuang dalam penjelasan singkat model pembelajaran konstruktivis, tersedi petunjuk pelaksanaan pembelajaran remedial dan pengayaan serta pelaksanaan penilaian berbasis proses.

B. MODEL PEMBELAJARAN BERBASIS KONSTRUKTIVISTIK DENGAN PENDEKATAN SCIENTIFIC LEARNING

Model pembelejaran yang diterapkan dalam buku ini, dilandasi teori pembelajaran yang menganut paham konstruktivistik, seperti *Project-Based Learning, Problem-Based Learning*, dan *Discovery Learning* dengan pendekatan *scientific learning* melalui proses mengamati, menanya, menalar, mencoba, membangun jejaring dan mengomunikasikan berbagai informasi terkait pemecahan masalah real world, analisis data, dan menarik kesimpulan. Proses pembelajaran memberi perhatian pada aspek-aspek kognisi dan mengangkat berbagai masalah *real world* yang sangat mempengaruhi aktifitas dan perkembangan mental siswa selama proses pembelajaran dengan prinsip bahwa, (1) setiap anak lahir, tumbuh dan berkembang dalam matriks sosial tertentu dan telah memiliki potensi, (2) cara berpikir, bertindak, dan persepsi setiap orang dipengaruhi nilai budayanya, (3) matematika adalah hasil konstruksi sosial dan sebagai alat penyelesaian masalah kehidupan, dan (4) matematika adalah hasil abstraksi pikiran manusia.

Metode pembelajaran yang diterapkan, antara lain: metode penemuan, pemecahan masalah, tanya-jawab, diskusi dalam kelompok heterogen, pemberian tugas produk, unjuk kerja, dan projek. Pembelajaran matematika yang diharapkan dalam praktek pembelajaran di kelas adalah (1) pembelajaran berpusat pada aktivitas siswa, (2) siswa diberi kebebasan berpikir memahami masalah, membangun strategi penyelesaian masalah, mengajukan ide-ide secara bebas dan terbuka, (3) guru melatih dan membimbing siswa berpikir kritis dan kreatif dalam menyelesaikan masalah, (4) upaya guru mengorganisasikan bekerjasama dalam kelompok belajar, melatih siswa berkomunikasi menggunakan grafik, diagram, skema, dan variabel, (5) seluruh hasil kerja selalu dipresentasikan di depan kelas untuk menemukan berbagai konsep, hasil penyelesaian masalah, aturan matematika yang ditemukan melalui proses pembelajaran.

Rancangan model pembelajaran yang diterapkan mengikuti 5 (lima) komponen utama model pembelajaran yang dijabarkan sebagai berikut.

1. Sintaks

Pengelolaan pembelajaran terdiri 5 tahapan pembelajaran, yaitu:

a. Apersepsi

Tahap apersepsi diawali dengan mengimformasikan kepada siswa kompetensi dasar dan indikator yang akan dicapai siswa melalui pembelajaran materi yang akan diajarkan. Kemudian guru menumbuhkan persepsi positif dan motivasi belajar pada diri siswa melalui pemaparan manfaat materi matematika yang dipelajari dalam penyelesaian masalah kehidupan serta meyakinkan siswa, jika siswa terlibat aktif dalam merekonstruksi konsep dan prinsip matematika melalui penyelesaian masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan kehidupan siswa dengan strategi penyelesaian yang menerapkan pola interaksi sosial yang pahami siswa dan guru. Dengan demikian, siswa akan lebih baik menguasai materi yang diajarkan, imformasi baru berupa pengetahuan lebih bertahan lama di dalam ingatan siswa, dan pembelajaran lebih bermakna sebab setiap informasi baru dikaitkan dengan apa yang diketahui siswa dan menunjukkan secara nyata kegunaan konsep dan prinsip matematika yang dipelajari dalam kehidupan.

b. Interaksi Sosial di antara Siswa, Guru, dan Masalah

Pada tahap orientasi masalah dan penyelesaian masalah, guru meminta siswa mencoba memahami masalah dan mendiskusikan hasil pemikiran melalui belajar kelompok. Pembentukan kelompok belajar menerapkan prinsip kooperatif, yakni keheterogenan anggota kelompok dari segi karakteristik (kemampuan dan jenis kelamin) siswa, berbeda budaya, berbeda agama dengan tujuan agar siswa terlatih bekerjasama, berkomunikasi, menumbuhkan rasa toleransi dalam perbedaan, saling memberi ide dalam penyelesaian masalah, saling membantu dan berbagi informasi. Guru memfasilitasi siswa dengan buku siswa, Lembar Aktivitas Siswa (LAS) dan Asesmen Otentik. Selanjutnya guru mengajukan permasalahan matematika yang bersumber dari lingkungan kehidupan siswa. Guru menanamkan nilai-nilai matematis (jujur, konsisten, tangguh menghadapi masalah) dan nilai-nilai budaya agar para siswa saling berinteraksi secara sosio kultural, memotivasi dan mengarahkan jalannya diskusi agar lebih efektif, serta mendorong siswa bekerjasama.

Selanjutnya, guru memusatkan pembelajaran pada siswa dalam kelompok belajar untuk menyelesaikan masalah. Guru meminta siswa memahami masalah secara individu dan mendiskusikan hasil pemikirannya dalam kelompok, dan dilanjutkan berdialog secara interaktif (berdebat, bertanya, mengajukan ide-ide, berdiskusi) dengan kelompok lain dengan arahan guru. Antar anggota kelompok saling bertanya-jawab, berdebat, merenungkan hasil pemikiran teman, mencari ide dan jalan keluar penyelesaian masalah. Setiap kelompok memadu hasil pemikiran dan menuangkannya dalam sebuah LAS yang dirancang guru. Jika semua anggota kelompok mengalami kesulitan memahami dan menyelesaikan masalah, maka salah seorang dari anggota kelompok bertanya pada guru sebagai panutan. Selanjutnya guru memberi *scaffolding*, yaitu berupa pemberian petunjuk, memberi kemudahan pengerjaan siswa, contoh analogi, struktur, bantuan jalan keluar sampai saatnya siswa dapat mengambil alih tugas-tugas penyelesaian masalah.

c. Mempresentasikan dan Mengembangkan Hasil Kerja

Pada tahapan ini, guru meminta salah satu kelompok mempresentasikan hasil kerjanya di depan kelas dan memberi kesempatan pada kelompok lain memberi tanggapan berupa kritikan disertai alasan-alasan, masukan bandingan pemikiran. Sesekali guru mengajukan pertanyaan menguji pemahaman/penguasaan penyaji dan dapat ditanggapi oleh kelompok lain. Kriteria untuk memilih hasil diskusi kelompok yang akan dipresentasikan antara lain: jawaban kelompok berbeda dengan jawaban dari kelompok lain, ada ide penting dalam hasil diskusi kelompok yang perlu mendapat perhatian khusus. Dengan demikian kelompok penyaji bisa lebih dari satu. Selama presentasi hasil kerja, guru mendorong terjadinya diskusi kelas dan mendorong siswa mengajukan ide-ide secara terbuka dengan menanamkan nilai *soft skill*.

Tujuan tahapan ini adalah untuk mengetahui keefektifan hasil diskusi dan hasil kerja kelompok pada tahapan sebelumnya. Dalam penyajiannya, kelompok penyaji akan diuji oleh kelompok lain dan guru tentang penguasaan dan pemahaman mereka atas penyelesaian masalah yang dilakukan. Dengan cara tersebut dimungkinkan tiap-tiap kelompok mendapatkan pemikiran-pemikiran baru dari kelompok lain atau alternatif jawaban yang lain yang berbeda. Sehingga pertimbangan-pertimbangan secara objektif akan muncul di antara siswa. Tujuan lain tahapan ini adalah melatih siswa terampil menyajikan hasil kerjanya melalui penyampaian ide-ide di depan umum (teman satu kelas). Keterampilan mengomunikasikan ide-ide tersebut adalah salah satu kompetensi yang dituntut dalam pembelajaran berdasarkan masalah, untuk memampukan siswa berinteraksi/berkolaborasi dengan orang lain.

d. Temuan Objek Matematika dan Penguatan Skemata Baru

Objek-objek matematika berupa model (contoh konsep) yang diperoleh dari proses dan hasil penyelesaian masalah dijadikan bahan inspirasi dan abstraksi konsep melalui penemuan ciri-ciri konsep oleh siswa dan mengkonstruksi konsep secara ilmiah. Setelah konsep ditemukan, guru melakukan teorema pengontrasan melalui pengajuan contoh dan bukan contoh. Dengan mengajukan sebuah objek, guru meminta siswa memberi alasan, apakah objek itu termasuk contoh atau bukan contoh konsep.

Guru memberi kesempatan bertanya atas hal-hal yang kurang dipahami. Sesekali guru menguji pemahaman siswa atas konsep dan prinsip yang ditemukan, serta melengkapi hasil pemikiran siswa dengan memberikan contoh dan bukan contoh konsep. Berdasar konsep yang ditemukan/direkonstruksi, diturunkan beberapa sifat dan aturan-aturan. Selanjutnya siswa diberi kesempatan mengerjakan soal-soal tantangan untuk menunjukkan kebergunaan konsep dan prinsip matematika yang dimiliki.

e. Menganalisis dan Mengevaluasi Proses dan Hasil Penyelesaian Masalah

Pada tahapan ini, guru membantu siswa atau kelompok mengkaji ulang hasil penyelesaian masalah, menguji pemahaman siswa dalam proses penemuan konsep dan prinsip. Selanjutnya, guru melakukan evaluasi materi akademik dengan pemberian kuis atau meminta siswa membuat peta konsep atau memberi tugas dirumah atau membuat peta materi yang dipelajari.

2. Sistem Sosial

Pengorganisasian siswa selama proses pembelajaran menerapkan pola pembelajaran kooperatif. Dalam interaksi sosio kultural di antara siswa dan temannya, guru selalu menanamkan nilai-nilai *soft skill* dan nilai matematis. Siswa dalam kelompok saling bekerjasama dalam menyelesaikan masalah, saling bertanya/berdiskusi antara siswa yang lemah dan yang pintar, kebebasan mengajukan pendapat, berdialog dan berdebat, guru tidak boleh terlalu mendominasi siswa, bersifat membantu dan gotong royong) untuk menghasilkan penyelesaian masalah yang disepakati bersama. Dalam interaksi sosio kultural, para siswa diizinkan berbahasa daerah dalam menyampaikan pertanyaan, kritikan, pendapat terhadap temannya maupun pada guru.

3. Prinsip Reaksi

Model pembelajaran yang diterapkan dalam buku ini dilkamusi teori konstruktivis dan nilai budaya dimana siswa belajar yang memberi penekanan pembelajaran berpusat pada siswa, sehingga fungsi guru sebagai fasilitator, motivator dan mediator dalam pembelajaran. Tingkah laku guru dalam menanggapi hasil pemikiran siswa berupa pertanyaan atau kesulitan yang dialami dalam menyelesaikan masalah harus bersifat mengarahkan, membimbing, memotivasi dan membangkitkan semangat belajar siswa.

Untuk mewujudkan tingkah laku tersebut, guru harus memberikan kesempatan pada siswa untuk mengungkapkan hasil pemikirannya secara bebas dan terbuka, mencermati pemahaman siswa atas objek matematika yang diperoleh dari proses dan hasil penyelesaian masalah, menunjukkan kelemahan atas pemahaman siswa dan memancing mereka menemukan jalan keluar untuk mendapatkan penyelesaian masalah yang sesungguhnya. Jika ada siswa yang bertanya, sebelum guru memberikan penjelasan/bantuan, guru terlebih dahulu memberi kesempatan pada siswa lainnya memberikan tanggapan dan merangkum hasilnya. Jika keseluruhan siswa mengalami kesulitan, maka guru saatnya memberi penjelasan atau bantuan/memberi petunjuk sampai siswa dapat mengambil alih penyelesaian masalah pada langkah berikutnya. Ketika siswa bekerja menyelesaikan tugas-tugas, guru mengontrol jalannya diskusi dan memberikan motivasi agar siswa tetap berusaha menyelesaikan tugas-tugasnya.

4. Sistem Pendukung

Agar model pembelajaran ini dapat terlaksana secara praktis dan efektif, guru diwajibkan membuat suatu rancangan pembelajaran yang dilkamusi teori pembelajaran konstruktivis dan nilai *soft skill* matematis yang diwujudkan dalam setiap langkah-langkah pembelajaran yang ditetapkan dan menyediakan fasilitas belajar yang cukup. Dalam hal ini dikembangkan buku model yang berisikan teori-teori pendukung dalam melaksanakan pembelajaran, komponen-komponen model, petunjuk pelaksanaan dan seluruh perangkat pembelajaran yang digunakan seperti rencana pembelajaran, buku guru, buku siswa, lembar kerja siswa, objek-objek abstraksi dari lingkungan budaya, dan media pembelajaran yang diperlukan.

5. Dampak Instruksional dan Pengiring yang Diharapkan

Dampak langsung penerapan pembelajaran ini adalah memampukan siswa merekonstruksi konsep dan prinsip matematika melalui penyelesaian masalah dan terbiasa menyelesaikan masalah nyata di lingkungan siswa. Pemahaman siswa terhadap obek-objek matematika dibangun berdasarkan pengalaman budaya dan pengalaman belajar yang telah dimiliki sebelumnya. Kebermaknaan pembelajaran yang melahirkan pemahaman, dan pemahaman mendasari kemampuan siswa mentransfer pengetahuannya dalam menyelesaikan masalah, berpikir kritis dan kreatif. Kemampuan menyelesaikan masalah tidak rutin menyadarkan siswa akan kebergunaan matematika. Kebergunaan akan menimbulkan motivasi belajar secara internal dari dalam diri siswa dan rasa memiliki terhadap matematika akan muncul sebab matematika yang dipamami adalah hasil rekonstruksi pemikirannya sendiri. Motivasi belajar secara internal akan menimbulkan kecintaan terhadap dewi matematika. Bercinta dengan dewi matematika berarti penyatuan diri dengan keabstrakan yang tidak memiliki batas atas dan batas bawah tetapi bekerja dengan simbol-simbol.

Selain dampak di atas, siswa terbiasa menganalisis secara logis dan kritis memberikan pendapat atas apa saja yang dipelajari menggunakan pengalaman belajar yang dimiliki sebelumnya. Penerimaan individu atas perbedaan-perbedaan yang terjadi (perbedaan pola pikir, pemahaman, daya lihat dan kemampuan), serta berkembangnya kemampuan berkolaborasi antara siswa. Retensi pengetahuan matematika yang dimiliki siswa dapat bertahan lebih lama sebab siswa terlibat aktif di dalam proses penemuannya.

Dampak pengiring yang akan terjadi dengan penerapan model pembelajaran berbasis konstruktivistik adalah siswa mampu menemukan kembali berbagai konsep dan aturan matematika dan menyadari betapa tingginya manfaat matematika bagi kehidupan sehingga dia tidak merasa terasing dari lingkungannya. Matematika sebagai ilmu pengetahuan tidak lagi dipandang sebagai hasil pemikiran dunia luar tetapi berada pada lingkungan budaya siswa yang bermanfaat dalam menyelesaikan permasalahan di lingkungan budayanya. Dengan demikian terbentuk dengan sendirinya rasa memiliki, sikap, dan persepsi positif siswa terhadap matematika dan budayanya. Siswa memkamung bahwa matematika terkait dan inklusif di dalam budaya. Jika matematika bagian dari budaya siswa, maka suatu saat diharapkan siswa memiliki cara tersendiri memeliharanya dan menjadikannya **Landasan Makna** (Landasan makna dalam hal ini berpihak pada sikap, kepercayaan diri, cara berpikir, cara bertingkah laku, cara mengingat apa yang dipahami oleh siswa sebagai pelaku-pelaku budaya). Dampak pengiring yang lebih jauh adalah hakikat tentatif keilmuan, keterampilan proses keilmuan, otonomi dan kebebasan berpikir siswa, toleransi terhadap ketidakpastian dan masalah-masalah non rutin.

PEDOMAN PENYUSUNAN RENCANA PEMBELAJARAN

Penyusunan rencana pembelajaran berpedoman pada kurikulum matematika 2013 dan sintaksis Model Pembelajaran. Berdasarkan analisis kurikulum matematika ditetapkan hal-hal berikut

1. Kompetensi dasar (lihat Permendikbud Nomor 69 dan 70 Tahun 2013) dan indikator pencapaian kompetensi dasar untuk tiap-tiap pokok bahasan. Rumusan indikator dan kompetensi dasar harus disesuaikan dengan prinsip-prinsip pembelajaran matematika berdasarkan masalah, memberikan pengalaman belajar bagi siswa, seperti menyelesaikan masalah otentik (masalah bersumber dari fakta dan lingkungan budaya), berkolaborasi, berbagi pengetahuan, saling membantu, berdiskusi dalam menyelesaikan masalah.
2. Materi pokok yang akan diajarkan, termasuk analisis topik, dan peta konsep (contoh disajikan di bawah).
3. Materi prasyarat, yaitu materi yang harus dikuasai oleh siswa sebagai dasar untuk mempelajari materi pokok. Dalam hal ini perlu dilakukan tes kemampuan awal siswa.
4. Kelengkapan, yaitu fasilitas pembelajaran yang harus dipersiapkan oleh guru, misalnya: rencana pembelajaran, buku petunjuk guru, buku siswa, lembar aktivitas siswa (LAS), objek-objek budaya, kumpulan masalah-masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan budaya siswa, laboratorium, dan alat peraga jika dibutuhkan.
5. Alokasi waktu: banyak jam pertemuan untuk setiap pokok bahasan tidak harus sama tergantung kepadatan dan kesulitan materi untuk tiap-tiap pokok bahasan. Penentuan rata-rata banyak jam pelajaran untuk satu pokok bahasan adalah hasil bagi jumlah jam efektif untuk satu semester dibagi banyak pokok bahasan yang akan diajarkan untuk semester tersebut.
6. Hasil belajar yang akan dicapai melalui kegiatan pembelajaran antara alain:

Produk	: Konsep dan prinsip-prinsip yang terkait dengan materi pokok
Proses	: Apersepsi budaya, interaksi sosial dalam penyelesaian masalah, memodelkan masalah secara matematika, merencanakan penyelesaian masalah, menyajikan hasil kerja dan menganalisis serta mengevaluasi kembali hasil penyelesaian masalah.
Kognitif	: Kemampuan matematisasi, kemampuan abstraksi, pola pikir deduktif, berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis dan berpikir kreatif).

Keterampilan	:	Keterampilan menyelesaikan masalah, ketrampilan berkolaborasi, kemampuan berkomunikasi.
Afektif	:	Menghargai budaya, penerimaan individu atas perbedaan yang ada, bekerjasama, tangguh menghadapi masalah, jujur mengungkapkan pendapat, berlatih berpikir kritis, kreatif, dan senang belajar matematika.

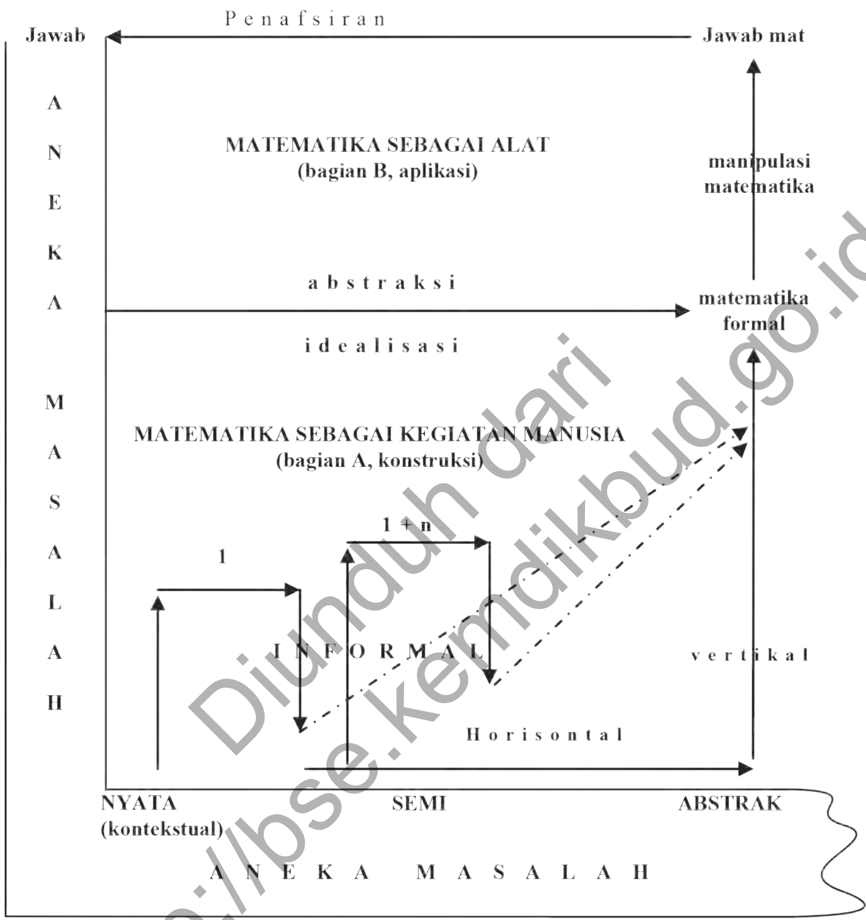
Sintaksis pembelajaran adalah langkah-langkah pembelajaran yang dirancang dan dihasilkan dari kajian teori yang melandasi model pembelajaran berbasis konstruktivistik. Sementara, rencana pembelajaran adalah operasional dari sintaks. Sehingga skenario pembelajaran yang terdapat pada rencana pembelajaran disusun mengikuti setiap langkah-langkah pembelajaran (sintaks). Sintaks model pembelajaran terdiri dari 5 langkah pokok, yaitu: (1) apersepsi budaya, (2) orientasi dan penyelesaian masalah, (3) persentase dan mengembangkan hasil kerja, (4) temuan objek matematika dan penguatan skemata baru, (5) menganalisis dan mengevaluasi proses dan hasil penyelesaian masalah. Kegiatan yang dilakukan untuk setiap tahapan pembelajaran dijabarkan sebagai berikut:

1. Kegiatan guru pada tahap apersepsi budaya antara lain:
   a. Menginformasikan indikator pencapaian kompetensi dasar.
   b. Menciptakan persepsi positif dalam diri siswa terhadap budayanya dan matematika sebagai hasil konstruksi sosial.
   c. Menjelaskan pola interaksi sosial, menjelaskan peranan siswa dalam menyelesaikan masalah.
   d. Memberikan motivasi belajar pada siswa melalui penanaman nilai matematis, soft skill dan kebergunaan matematika.
   e. Memberi kesempatan pada siswa menanyakan hala-hal yang sulit dimengerti pada materi sebelumnya.
2. Kegiatan guru pada tahap penyelesaian masalah dengan pola interaksi edukatif antara lain:
   a. Membentukan kelompok
   b. Mengajukan masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan budaya siswa
   c. Meminta siswa memahami masalah secara individual dan kelompok
   d. Mendorong siswa bekerjasama menyelesaikan tugas-tugas
   e. Membantu siswa merumuskan hipotesis (dugaan).
   f. Membimbing, mendorong/mengarahkan siswa menyelesaikan masalah dan mengerjakan LKS
   g. Memberikan scaffolding pada kelompok atau individu yang mengalami kesulitan

h. Mengkondisikan antar anggota kelompok berdiskusi, berdebat dengan pola kooperatif
i. Mendorong siswa mengekspresikan ide-ide secara terbuka
j. Membantu dan memberi kemudahan pengerjaan siswa dalam menyelesaikan masalah dalam pemberian solusi

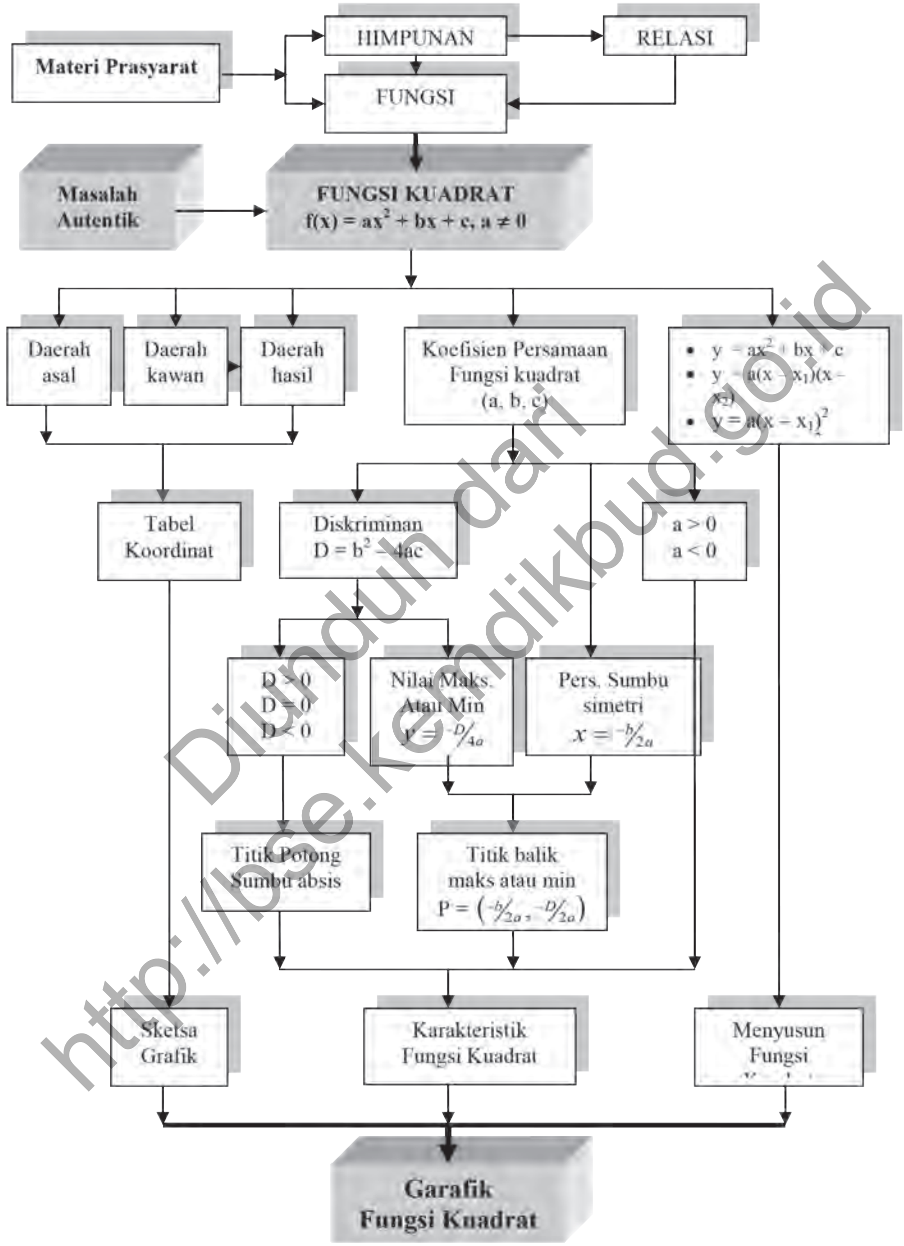
3. Kegiatan guru pada tahap persentasi dan mengembangkan hasil kerja antara lain:
   a. Memberi kesempatan pada kelompok mempresentasikan hasil penyelesaian masalah di depan kelas
   b. Membimbing siswa menyajikan hasil kerja
   c. Memberi kesempatan kelompok lain mengkritisi/menanggapi hasil kerja kelompok penyaji dan memberi masukan sebagai alternatif pemikiran Membantu siswa menemukan konsep berdasarkan masalah
   d. Mengontrol jalannya diskusi agar pembelajaran berjalan dengan efektif
   e. Mendorong keterbukaan, proses-proses demokrasi
   f. Menguji pemahaman siswa
4. Kegiatan guru pada tahap temuan objek matematika dan penguatan skemata baru antara lain:
   a. Mengarahkan siswa membangun konsep dan prinsip secara ilmiah
   b. Menguji pemahaman siswa atas konsep yang ditemukan melalui pengajuan contoh dan bukan contoh konsep
   c. Membantu siswa mendefinisikan dan mengorganisasikan tugas-tugas belajar yang berkaitan dengan masalah
   d. Memberi kesempatan melakukan konektivitas konsep dan prinsip dalam mengerjakan soal tantangan
   e. Memberikan *scaffolding*
5. Kegiatan guru pada tahap menganalisis dan mengevaluasi proses dan hasil penyelesaian masalah antara lain:
   a. Membantu siswa mengkaji ulang hasil penyelesaian masalah
   b. Memotivasi siswa untuk terlibat dalam penyelesaian masalah yang selektif
   c. Mengevaluasi materi akademik: memberi kuis atau membuat peta konsep atau peta materi.

FASE KONSTRUKSI MATEMATIKA



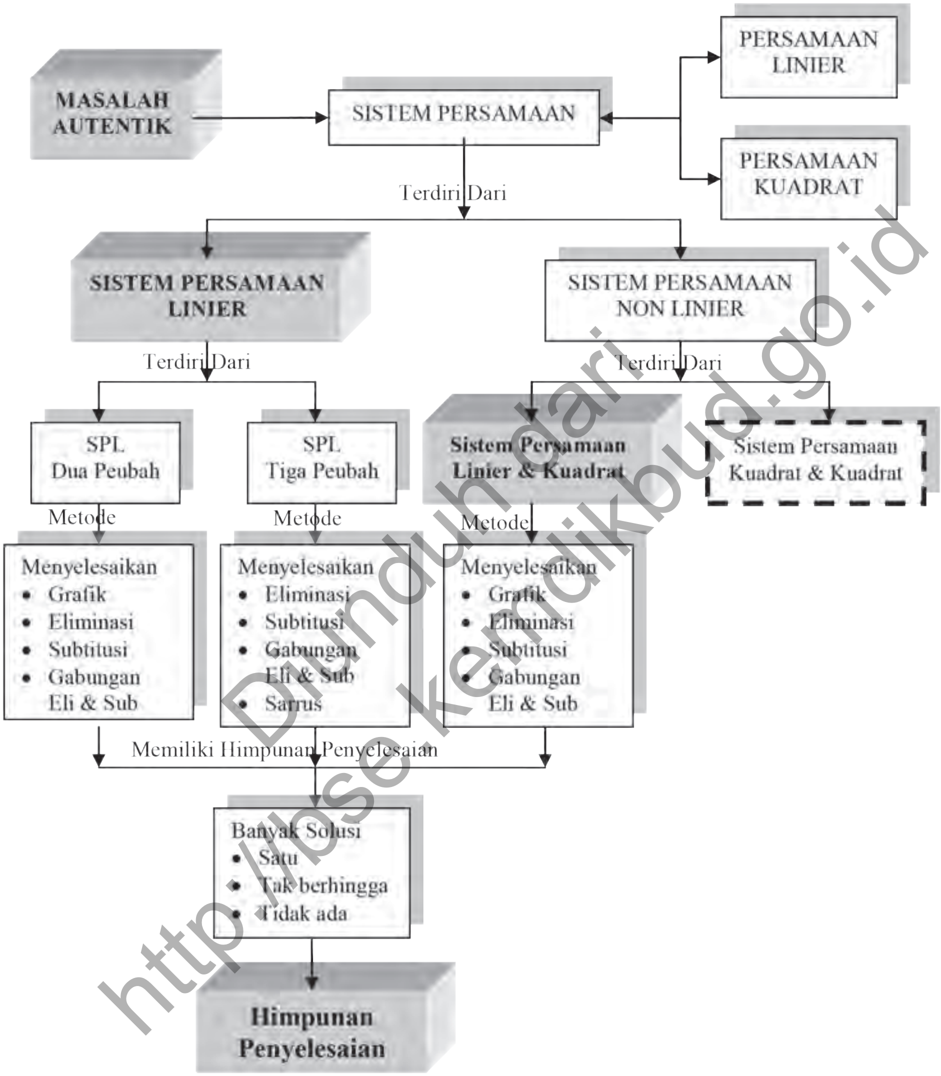
Gambar: Matematika Hasil Konstruksi Sosial (Adaptasi, Soedjadi (2004)

CONTOH ANALISIS TOPIK

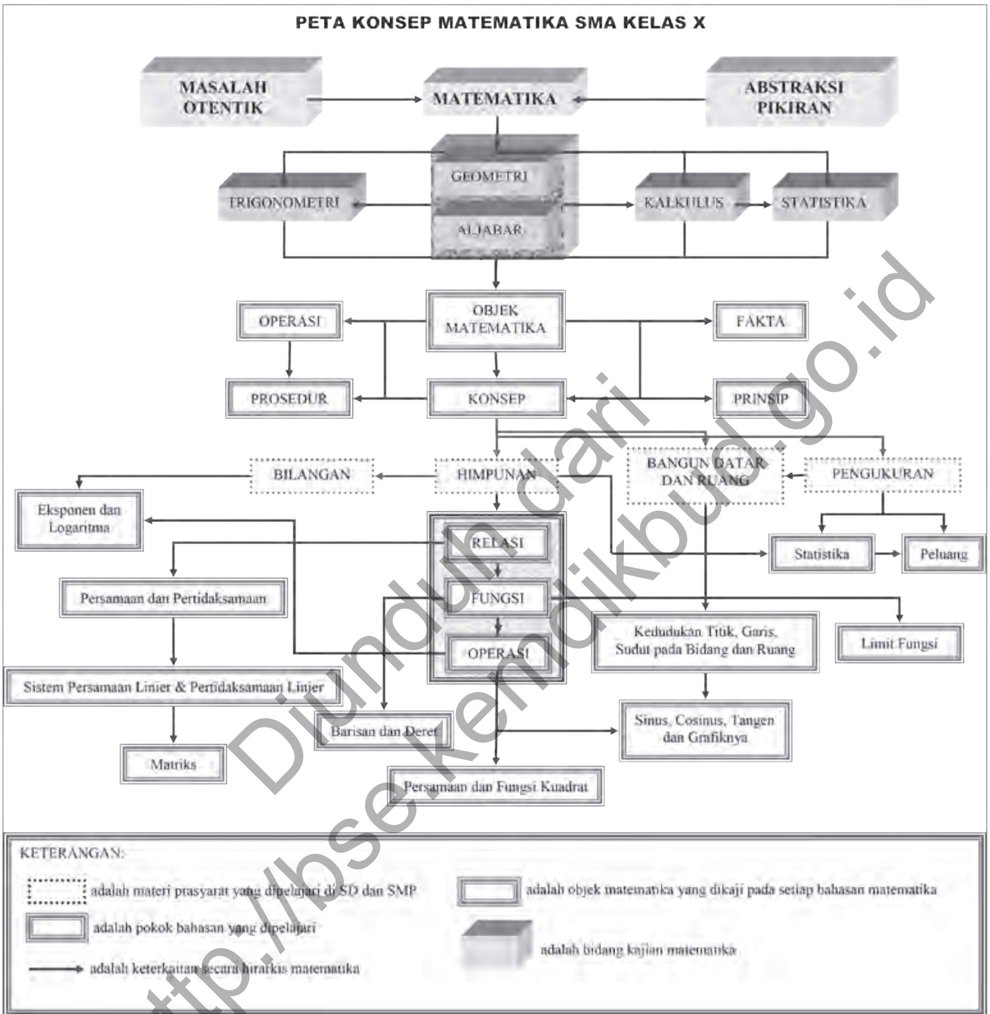


Gambar: Analisis Topik Pada Materi Fungsi Kuadrat

CONTOH PETA KONSEP



Gambar: Peta Konsep Pada Materi Sistem Persamaan Linier dan Kuadrat



PETA KONSEP MATEMATIKA SMA KELAS X
MASALAH OTENTIK
MATEMATIKA
ABSTRAKSI PIKIRAN
GEOMETRI
ALJABAR
TRIGONOMETRI
KALKULUS
STATISTIKA
OBJEK MATEMATIKA
OPERASI
FAKTA
PROSEDUR
KONSEP
PRINSIP
BILANGAN
HIMPUNAN
BANGUN DATAR DAN RUANG
PENGUKURAN
Eksponen dan Logaritma
RELASI
Statistika
Peluang
Persamaan dan Pertidaksamaan
FUNGSI
Kedudukan Titik, Garis, Sudut pada Bidang dan Ruang
Limit Fungsi
OPERASI
Sistem Persamaan Linier & Pertidaksamaan Linier
Barisan dan Deret
Sinus, Cosinus, Tangen dan Grafiknya
Matriks
Persamaan dan Fungsi Kuadrat
KETERANGAN:
adalah materi prasyarat yang dipelajari di SD dan SMP
adalah objek matematika yang dikaji pada setiap bahasan matematika
adalah pokok bahasan yang dipelajari
adalah bidang kajian matematika
adalah keterkaitan secara hirarkis matematika

KURIKULUM 2013

Bab 1

Eksponen dan Logaritma

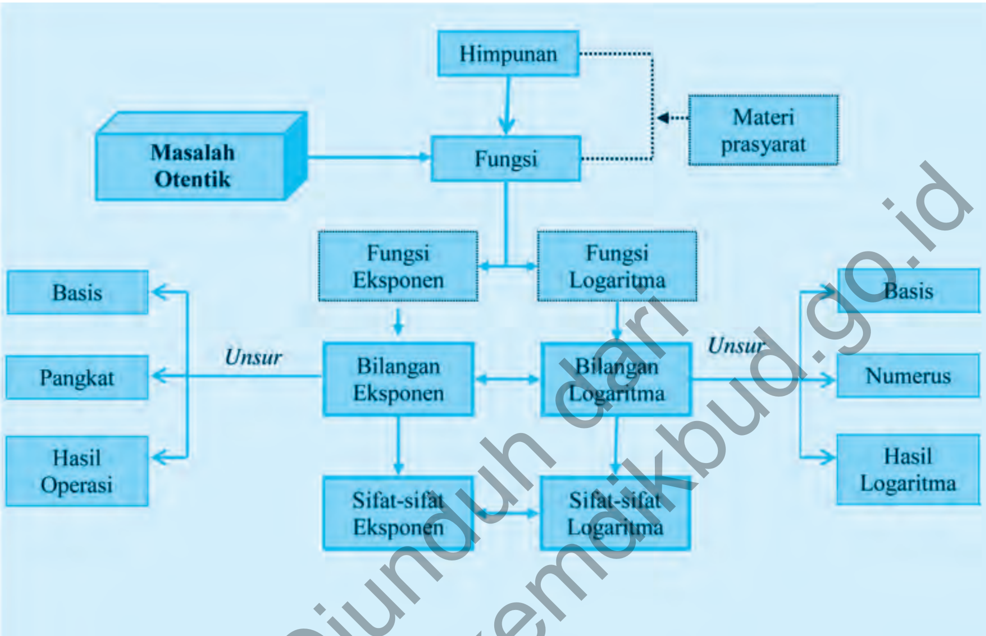
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran eksponen dan logaritma, siswa mampu: 1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Memilih dan menerapkan aturan eksponen dan logaritma sesuai dengan karakteristik permasalahan yang akan diselesaikan dan memeriksa kebenaran langkah-langkahnya. 3. Menyelesaikan masalah nyata menggunakan operasi aljabar berupa eksponen dan logaritma serta menyelesaikannya menggunakan sifat – sifat dan aturan yang telah terbukti kebenarannya.	Melalui pembelajaran materi eksponen dan logaritma, siswa memperoleh pengalaman belajar: • mengkomunikasikan karakteristik masalah otentik yang pemecahannya terkait eksponen dan logaritma. • merancang model matematika dari sebuah permasalahan otentik yang berkaitan dengan eksponen dan logaritma. • menyelesaikan model matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan. • menafsirkan hasil pemecahan masalah. • menuliskan dengan kata-katanya sendiri konsep persamaan kuadrat.berdasarkan ciri-cirinya dituliskan sebelumnya. • membuktikan berbagai sifat eksponen dan logaritma. • menerapkan berbagai sifat eksponen dan logaritma dalam pemecahan masalah. • berkolaborasi memecahkan masalah. • berlatih berpikir kritis dan kreatif

Istilah Penting

- *Bilangan Pokok (Basis)*
- *Perpangkatan*
- *Eksponen*
- *Logaritma*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Beberapa permasalahan dalam kehidupan sehari – hari dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep dan aturan matematika. Sebagai contoh, konsep eksponen dan logaritma berperan penting dalam menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan aritmatika sosial, peluruhan zat kimia, perkembangan bakteri dan lain – lain. Untuk itu perhatikan dan selesaikan dengan cermat permasalahan – permasalahan yang diberikan pada bab ini. Di dalam proses pemecahan masalah-masalah yang diberikan, kamu diminta untuk mencermati objek-objek yang dilibatkan dalam permasalahan yang diberikan tersebut.

1. Menemukan Konsep Eksponen

Pada subbab ini, konsep eksponen ditemukan dengan mengamati beberapa masalah nyata berikut dan mencermati beberapa alternatif penyelesaiannya. Tentu saja, kamu diminta untuk melakukan pemodelan matematika yang melibatkan eksponen. Dari beberapa model matematika yang diperoleh dari langkah-langkah penyelesaian masalah, kamu secara individu menuliskan ciri-ciri eksponen dan mendiskusikan hasilnya dengan temanmu. Berdasarkan ciri-ciri tersebut, kamu menuliskan konsep eksponen dengan pemahamanmu sendiri.

Banyak permasalahan dalam kehidupan yang penyelesaian-nya terkait dengan konsep dan aturan-aturan dalam matema-tika. Secara khusus keterkaitan konsep dan prinsip-prinsip eksponen dan logaritma dengan permasalahan masalah nyata yang menyatu/ bersumber dari fakta dan lingkungan budaya kita. Konsep eksponen dan logaritma dapat dibangun/ ditemukan di dalam penyelesaian permasalahan yang kita hadapi. Untuk itu arahkan siswa menyelesaiakan permasalahan-permasalahan yang diberikan.

Di dalam proses penyelesaian masalah-masalah yang diberikan, ajak siswa mencer-mati objek-objek budaya atau objek lingkungan budaya yang dilibatkan dalam permasa-lahan yang diberikan. Objek-objek itu menjadi bahan aspirasi/inspirasi, karena terkadang ada konsep matematika melekat pada objek itu yang tidak disadari dan ternyata sebagai kata kunci dalam penyelesaian masalah. Demikian juga siswa tidak boleh mengabaikan atau melupakan konsep-konsep dan aturan-aturan matematika *yang telah dipelajari sebelum-nya, baik di tingkat Sekolah Dasar, SMP, bahkan pada materi yang baru saja dipelajari.*

Ajukan Masalah 1.1 pada siswa. Minta siswa mengamati masalah dan menuliskan apa yang diketahui dan yang ditanyakan. Selanjutnya dorong siswa memunculkan berbagai pertanyaan terkait masalah yang dipecahkan. Akomodasi berbagai pertanyaan dan coba memberi petunjuk agar siswa dapat melakukan penalaran dan mencoba memecahkan masalah.

Meminta siswa membuat tabel laju pertumbuhan bakteri dengan waktu setiap jam. Arahkan siswa menemukan model matematika yang menyatakan hubungan banyak bakteri hasil pembelahan pada saat waktu tertentu.

Masalah-1.1

Seorang peneliti di sebuah lembaga penelitian sedang mengamati pertumbuhan suatu bakteri di sebuah laboratorium mikrobiologi. Pada kultur bakteri tertentu, satu bakteri membelah menjadi r bakteri setiap jam. Hasil pengamatan menunjukkan bahwa jumlah bakteri pada akhir 3 jam adalah 10.000 bakteri dan setelah 2 jam kemudian, jumlah bakteri tersebut menjadi 40.000 bakteri. Peneliti tersebut ingin mengetahui banyak bakteri sebagai hasil pembelahan dan mencari tahu banyak bakteri dalam pada akhir 8 jam.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Satu bakteri membelah menjadi r bakteri untuk setiap jam.
Jumlah bakteri pada akhir 3 jam adalah 10.000 bakteri dan setelah 2 jam kemudian, jumlahnya menjadi 40.000 bakteri.

Ditanya:

a. Berapa banyak bakteri sebagai hasil pembelahan.
b. Berapa jumlah bakteri dalam pada akhir 8 jam.

Sebagai langkah awal buat tabel laju pertumbuhan bakteri terhadap waktu setiap jam.
Misalkan jumlah bakteri pada awalnya (t = 0) adalah x_0. Isilah tabel berikut!

Pada akhir t jam	0	1	....	....	....	....
Jumlah bakteri (x_t)	x_0	rx_0	....	....	....	....

Dari hasil pengamatan data pada tabel di atas, kita dapat membuat hubungan pertumbuhan jumlah bakteri tersebut terhadap perubahan waktu untuk setiap jam dinyatakan sebagai berikut:

$$x_t = \underbrace{r \times r \times r \times \ldots \times r}_{t \text{ faktor}} \times x_0$$

$x(t) = r^t x_0$... (1)

dengan t menyatakan banyak jam, x_0 adalah jumlah bakteri saat $t = 0$ dan r adalah banyak bakteri setelah pembelahan terjadi pada setiap jam.

Pada Masalah-1.1 diketahui bahwa pada akhir 3 jam terdapat 10.000 bakteri dan setelah 5 jam terdapat 40.000 bakteri. Kita substitusikan $t = 3$ dan $t = 5$ ke formula (1) di atas, maka diperoleh $x_3 = r^3x_0 = 10.000$ dan $x_5 = r^5x_0 = 40.000$

$$\frac{x_5}{x_3} = \frac{40.000}{10.000}$$

$$\frac{r^5 x_0}{r^3 x_0} = 4$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2$$

Jadi, peneliti tersebut menemukan bahwa bakteri membelah menjadi 2 bakteri setiap 1 jam

Untuk mendapatkan banyak bakteri pada awalnya atau $t = 0$, substitusi $r = 2$ ke persamaan $r^3x_0 = 10.000$ sehingga $8x_0 = 10.000$. Dengan demikian $x_0 = 1.250$.

Subtitusikan $x_0 = 1.250$ ke persamaan (1), pola pertumbuhan bakteri tersebut dinyatakan

$$x_t = 1250.2^t$$

$$x_8 = (2^8)(1250)$$

$$= 320.000$$

Dalam Masalah-1.1, ditemukan $r^2 = 4$, dan kemudian $r = 2$. Apakah $r = -2$ tidak berlaku? Berikan alasanmu!

Jadi, pada akhir setelah 8 jam, peneliti mendapatkan jumlah bakteri sudah mencapai 320.000 bakteri.

Organisasikan siswa belajar dalam kelompok dengan banyak anggota kelompok 4-5 orang untuk mendiskusikan model matematika yang ditemukan secara individu. Guru menjembatani perbedaan hasil pemikiran antar siswa dalam setiap kelompok dan menuliskan hasil pemikiran bersama pada lembar kerja.

Meminta beberapa siswa untuk memberi pendapat mengapa pada Masalah 1.1

Jika $r^2 = 4$, maka $r = 2$. Kenapa tidak berlaku $r = -2$?

Alasan:

$r^2 = 4, r \in R \Rightarrow r = 2$ atau $r = -2$. Tetapi dalam Masalah 1.1, r menyatakan banyak pembelahan bakteri untuk setiap jam. Jadi bakteri membelah menjadi 2, bukan -2.

Guru meminta salah satu kelompok untuk mempresentasikan hasil kerjanya di depan kelas. Jembatani jika ada cara yang berbeda hasil kerja di antara kelompok. Beri kesempatan antar kelompok berdebat atas perbedaan pendapat untuk melatih kemampuan komunikasi siswa.

Motivasi siswa belajar dengan memperlihatkan kebergunaan matematika dalam kehidupan. Ajukan Masalah 1.2 dan memfasilitasi siswa terhadap alat yang dibutuhkan. Arahkan siswa melakukan percobaan melipat kertas dan menemukan pola dari data yang diperoleh sekaitan membangun model matematika terkait eksponen.

Meminta siswa membuat tabel keterkaitan antara banyak lipatan dengan banyak bidang kertas yang terbentuk. Arahkan siswa menemukan model matematika yang menyatakan hubungan banyak lipatan kertas dan banyak bidang kertas yang terbentuk. Diharapkan siswa menuliskan hal seperti tabel di samping.

Selanjutnya guru meminta siswa mengamati dan mencermati data pada tabel. Diharapkan siswa menemukan model matematika yang menyatakan hubungan banyaknya bidang kertas dengan banyaknya lipatan.

Masalah-1.2

Diberikan selembar kertas berbentuk persegi panjang. Lipatlah kertas tersebut di tengah-tengah sehingga garis lipatan membagi bidang kertas menjadi dua bidang yang sama. Lipatlah lagi dengan cara yang sama kertas hasil lipatan tadi. Lakukan terus-menerus pelipatan ini. Temukanlah pola yang menyatakan hubungan banyak lipatan dengan banyak bidang kertas yang terbentuk.

Alternatif Penyelesaian

Sebagai langkah awal buat tabel keterkaitan antara banyak lipatan dengan banyak garis bidang kertas yang terbentuk.

Banyak Lipatan	Banyak Bidang Kertas	Pola Perkalian
1	2	$2 = 2$
2	4	$4 = 2 \times 2$
3	8	$8 = 2 \times 2 \times 2$
4	...	...
...	...	...
n	k	...

Berdasarkan tabel di atas, misalkan k adalah banyak bidang kertas yang terbentuk sebagai hasil lipatan bidang kertas menjadi dua bagian yang sama, n adalah banyak lipatan.

k dapat dinyatakan dalam n, yaitu

$k(n) = 2^n$.. (2)

Coba kamu uji kebenaran persamaan $k(n) = 2^n$ dengan mensubtitusikan nilai n ke persamaan tersebut.

Berdasarkan persamaan (1) dan (2), diperoleh
Dari persamaan (1) $x(t) = r^t x_0$, r adalah bilangan pokok dan t adalah eksponen dari r.
Dari persamaan (2) $k(n) = 2^n$, 2 adalah bilangan pokok dan n adalah eksponen dari 2.
Untuk menyederhanakan penulisan hasil kali bilangan yang sama, kita dapat menggunakan *notasi pangkat*. Bilangan berpangkat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.1

Misalkan a bilangan real dan n bilangan bulat positif. Notasi a^n menyatakan hasil kali bilangan a sebanyak n faktor, dapat ditulis $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\ faktor}$ dengan a sebagai basis bilangan berpangkat dan n sebagai pangkat.

Catatan:

1. Pada Definisi-1.1 di atas, kita sepakati, a^1 cukup ditulis a.
2. Hati-hati dengan bilangan pokok $a = 0$, tidak semua a^0 dengan a bilangan real menyatakan 1. Coba tanyakan pada gurumu, mengapa demikian?
3. Jika n adalah sebuah variabel sebagai eksponen dari a, maka perlu dicermati semesta variabel itu. Sebab $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ sebanyak n faktor, ini hanya berlaku ketika semesta $n \in N$.

Arahkan siswa mengamati kedua model matematika di samping. Minta mereka menuliskan ciri-ciri bilangan berpangkat dan berdasarkan ciri-ciri tersebut dapat menuliskan pengertian dari a^n.

Beri penjelasan pada siswa, tentang pemahaman unsur-unsur yang ada pada Definisi 1.1, *mengapa n harus bilangan bulat positif. Minta siswa untuk memegang teguh sifat matematika dalam menetapkan definisi bilangan berpangkat; yaitu, matematika bersandar pada kesepakatan, menggunakan variabel-variabel yang kosong dari arti, menganut kebenaran konsistensi.*

Minta siswa mencermati beberapa catatan penting terkait Definisi 1.1. *Beri penjelasan bahwa ketika* $a = 0$ *dan* $n = 0$, *maka* $a^n = 0^0$, *hasilnya taktentu.*

Ajak siswa untuk mengamati Masalah 1.3 *dan memahami tentang permasalahan yang ditanyakan pada Masalah* 1.3. *Beri kebebasan bagi siswa menggali ide-ide secara bebas terbuka, mengajukan berbagai pertanyaan dalam menganalisis informasi yang tersedia pada Masalah* 1.3.

Perhatikan Masalah-1.3 berikut!

Masalah-1.3

Suatu zat yang disuntikkan ke dalam tubuh manusia akan dikeluarkan dari darah melalui ginjal. Setiap 1 jam separuh zat itu dikeluarkan oleh ginjal. Bila 100 mg zat itu disuntikkan ke tubuh manusia, berapa miligram zat itu tersisa dalam darah setelah:

1) 1 jam?
2) 2 jam?
3) 3 jam?
4) Buatlah model matematika pengurangan zat tersebut dari tubuh melalui ginjal!
5) Gambar pasangan titik (waktu, jumlah zat) pada koordinat kartesius untuk 8 jam pengamatan.

Minta siswa mengisi secara lengkap data pada tabel dan mencoba menggambarkan data-data (pasangan titik) tersebut pada sistem koordinat kartesius!

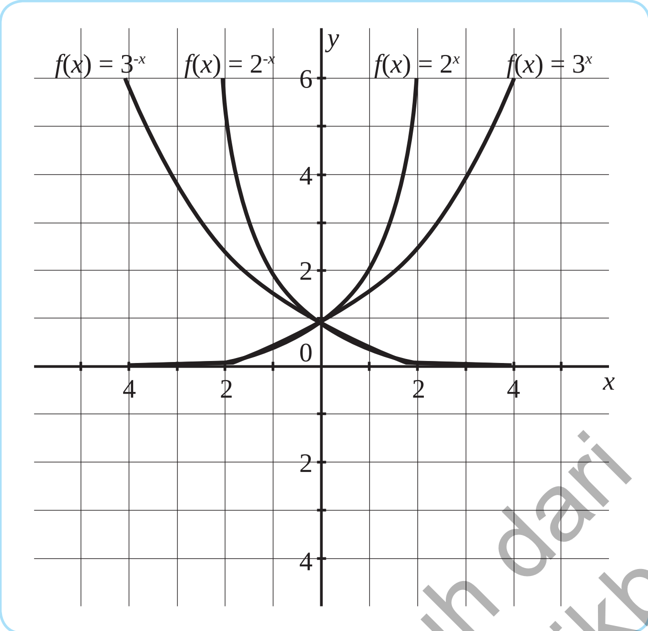
Alternatif Penyelesaian

Langkah awal isilah tabel berikut:

Waktu (t *dalam jam*)	1	2	3	4	5	6	7	8
Jumlah zat $z(t)$ dalam mg	50	25	12,5	...	...	...	...	...

Isilah secara lengkap data pada tabel dan coba gambarkan pasangan titik-titik tersebut pada sistem koordinat kartesius (coba sendiri)!

Selanjutnya perhatikan grafik fungsi (Gambar-1.2) di bawah ini. Isilah nilai-nilai fungsi tersebut dan sajikan nilai-nilai tersebut pada tabel yang diberikan.



Gambar-1.2: Grafik Fungsi Eksponensial

	x							
	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x) = 2^x$								
$f(x) = 2^{-x}$								
$f(x) = 2^x$								
$f(x) = 3^x$								
$f(x) = 3^{-x}$								

Latihan 1.1

Amati grafik (Gambar-1.2) di atas. Tuliskan sedikitnya 5 (lima) sifat grafik fungsi tersebut dan disajikan hasilnya di depan kelas. Dalam paparan jelaskan mengapa kita perlu mengetahui sifat-sifat tersebut.

Organisasikan siswa belajar dalam kelompok. Minta siswa diskusi dengan temannya satu kelompok, bagaimana perilaku grafik ketika x menuju -∝ dan ketika x menuju ∝? Apakah grafik itu sampai berpotongan atau tidak sampai menyinggung sumbu x? Sajikan hasil kerja kelompok di depan kelas.

Untuk menguatkan konsep siswa, minta siswa untuk mencoba menyelesaikan Latihan 1.1 di samping. Misalnya grafik fungsi f(x) = 2x, x bilangan real. Sifat grafik yang diharapkan ditemukan siswa, antara lain:

1. *Grafik seluruhnya di atas sumbu-x.*
2. *Sumbu-x sebagai asimtot*
3. *Memotong sumbu-y pada satu titik, saat x = 0.*
4. *Grafik tidak memotong sumbu-x, untuk x menuju 0.*
5. *Untuk nilai x semakin besar, maka nilai y semakin besar. Sebaliknya untuk nilai x semakin kecil, diperoleh nilai y semakin kecil*

6. *Untuk x ∝ menuju ∝, diperoleh y menuju ∝. Untuk x menuju -∝, diperoleh y menuju* 0.

Ajukan beberapa contoh yang dipahami siswa tentang perpangkatan di SMP, dalam membangun pemahaman terhadap Definisi 1.2 *di samping. Misalnya*

$$3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{9}$$

Selanjutnya mengajak siswa mencermati penjelasan Definisi 1.2 *secara deduktif, seperti disajikan disamping.*

Untuk lebih memahami Definisi 1.2, *minta siswa mencermati Contoh* 1.1 *di samping. Cek kebenaran hasil kerja siswa menerapkan Definisi* 1.2, *dalam menyelesaikan soal pada Contoh* 1.1.

Arahkan siswa memahami Deinisi 1.4 *di samping, dengan mengajukan beberapa pertanyaan, seperti:*

2. Pangkat Bulat Negatif

Definisi 1.2

Untuk a bilangan real dan $a \neq 0$, m bilangan bulat positif, didefinisikan

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

Definisi di atas dijelaskan sebagai berikut:

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = \underbrace{\left(\frac{1}{a}\right) \times \left(\frac{1}{a}\right) \times \left(\frac{1}{a}\right) \times \ldots \times \left(\frac{1}{a}\right)}_{\text{sebanyak } m \text{ faktor}}$$

$$= \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m\text{ faktor}}}$$

$$= \frac{1}{a^m}$$

Contoh 1.1

Jika $x = -2$ dan $y = 2$, tentukan nilai $x^{-3}\,(y^4)$

Alternatif Penyelesaian

$$x^{-3}\left(y^4\right) = \frac{y^4}{x^3} = \frac{2^4}{(-2)^3} = \frac{16}{-8} = -2$$

3. Pangkat Nol

Definisi 1.3

Untuk a bilangan real dan $a \neq 0$, maka $a^0 = 1$.

Untuk lebih memahami definisi di atas, perhatikan pola hasil pemangkatan bilangan-bilangan berikut.

$2^3 = 8$ $\quad$ $3^3 = 27$

$2^2 = 4$ $\quad$ $3^2 = 9$

$2^1 = 2$ $\quad$ $3^1 = 3$

$2^0 = 1$ $\quad$ $3^0 = 1$

Perhatikan hasil pemangkatan 2 dengan 0, dan hasil pemangkatan 3 dengan 0, hasil perpangkatannya adalah 1.

4. Sifat-sifat Pangkat Bulat Positif

Coba cermati bukti sifat-sifat bilangan berpangkat bulat positif menggunakan definisi bilangan berpangkat yang kamu telah pelajari sebelumnya.

Sifat-1

Jika a bilangan real, m dan n bilangan bulat positif maka $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Bukti:

$$a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m\ faktor} \times \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\ faktor}$$

$$= a^m \times a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a}_{m+n}$$

$$= a^{m+n}$$

- Perhatikan $a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m\ faktor}$.

  Diskusikan dalam kelompokmu, apakah benar perpangkatan adalah perkalian berulang?
- Bagaimana jika m dan n bukan bilangan bulat positif?

Mengapa batasan bilangan real dan . Bagaimana hasil a0, ketika $a = 0$. Beri penjelasan bahwa ketika $a = 0$ maka $a^0 = 0^0$, hasilnya taktentu. Selanjutnya ajak siswa mengamat pola hasil perpangkatan bilangan 2 dan 3 di samping. Untuk meyakinkan siswa bahwa $a^0 = 1, a \neq 0$

Minta siswa untuk dapat membuktikan Sifat-1 sehingga siswa dapat menyimpulkan bahwa sifat tersebut benar untuk m dan n bilangan bulat positif.

Jelaskan pada siswa bahwa perpangkatan adalah perkalian berulang. Sifat-1, hanya berlaku a bilangan real, m dan n bilangan bulat positif. Jika m dan n bukan bilangan bulat positif, Sifat-1 tidak berlaku, misalnya $a = 0$ dan $m = n = 0$, tidak berlaku

Selanjutnya bimbing siswa agar memahami tentang Sifat-2 dan data menunjukkan bukti dari sifat tersebut. Beri penjelasan pada siswa dalam Sifat-2, tidak diizinkan $a = 0$, sebab bentuk perpangkatan pada Sifat-2 adalah bentuk rasional. Dalam pecahan penyebutnya tidak lazim nol.Ketika $a = 0$ dan m, n bilangan bulat positif, maka a^m atau a^n dimungkinkan hasilnya 0.Jika hasil a^m dan a^n keduanya nol, maka hasil baginya tak tentu. Jika $a^m = 0$ dan $a^n \neq 0$, maka hasil baginya 0. Tetapi jika $a^m \neq 0$ dan $a^n = 0$, maka hasil baginya tak terdefinisi.

Sifat-2

Jika a bilangan real dan $a \neq 0$, m dan n bilangan bulat positif, maka

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Bukti:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ faktor}}} \quad \text{(sesuai Definisi 1.1)}$$

- Pada persyaratan Sifat-2, mengapa $a \neq 0$ dipersyaratkan?
- Bagaimana jika $a = 0$? Apa dampaknya pada hasil pembagian $\frac{a^m}{a^n}$? Jika kamu tidak tahu bertanya ke guru!

Sifat-1 di atas hanya berkaitan dengan bilangan bulat positif m dan n. Ada 3 (tiga) kemungkinan, yaitu (a) $m > n$, (b) $m = n$, dan (c) $m < n$.

a) Kasus $m > n$

Jika m dan n bilangan bulat positif dan $m > n$ maka $m - n > 0$. Dengan demikian

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ faktor}}} = \frac{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ faktor}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ faktor}}} \times \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{(m-n) \text{ faktor}}$$

$$= \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{(m-n) \text{ faktor}}$$

$$= a^{m-n}$$

Jadi $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, dengan m, n bilangan bulat positif dan $m > n$

b) Kasus $m = n$

Jika $m = n$, maka $\frac{a^m}{a^n} = 1 = a^0 = a^{m-n}$.

Bukti:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m}, \text{ sebab } m = n$$

$$= \frac{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}}$$

$$= 1$$

$$= a^0$$

Latihan 1.2

Buktikan sendiri untuk kasus $m < n$. Jelaskan perbedaan hasilnya dengan kasus (a).

Agar siswa benar-benar dapat menguasai konsep tentang Sifat-2 untuk kasus $m < n$, sesuai Latihan 1.2. Alternatif jawaban yang diharapkan dari siswa sebagai bukti Sifat-1.2 untuk kasus $m < n$, dapat dicermati di samping.

Buktikan

Jika a bilangan real dan $a \neq 0$, m dan n bilangan bulat positif, $m < n$, maka $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Bukti:

Ambil sebarang m dan n bilangan bulat positif, $m < n$.

$m < n \Rightarrow m - n < 0$.

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{(n-m) \text{ faktor}}} = \left(\frac{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{(n-m) \text{ faktor}}}\right) \times \left(\frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{(n-m) \text{ faktor}}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{a^{n-m}}\right) = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$$

(karena $m < n$, maka $m - n < 0$)

Selanjutnya minta siswa untuk mencoba memahami bukti Sifat-3 dengan memberi bantuan sebagai berikut.

$(3^2)^3 = (3 \times 3)^3$

$= (9)^3 = 9 \times 9 \times 9$

$= 729 = 3^6 = 3^{2\times3}$

Selanjutnya mengarahkan siswa membuktikan Sifat-3 secara umum, seperti yang tertera pada buku siswa di samping

Ajak siswa berdiskusi dalam kelompok belajar, untuk menganalisis pentingnya syarat m dan n bilangan bulat positif untuk Sifat-3. Jika m dan n adalah salah satu negatif dan ketika a = 0, misalnya

$$\left(0^2\right)^{-3} = 0^{-2\times3} = 0^{-6} = \frac{1}{0^6}$$

Tentu $0^6 = 0$. *Dengan demikian* $\frac{1}{0^6} = \frac{1}{0}$ *hasilnya tak terdefinisi.*

Jelaskan pada siswa catatan penting di samping, tentang pemanfaatan dan makna simbol logika matematika yang sering digunakan dalam definisi, sifat, dan proses pembuktian.

Sifat-3

Jika a bilangan real dan $a \neq 0$, m dan n bilangan bulat positif, maka $(a^m)^n = a^{mn}$

Bukti:

$$\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times a^m \times \ldots \times a^m}_{n \text{ faktor}}$$

$$= \underbrace{\left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}\right)\left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}\right)\left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}\right)\ldots\left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ faktor}}\right)}_{n \text{ faktor}}$$

$$= \left(\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m\times n \text{ faktor}}\right)$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{m\times n} \text{ (terbukti)}$$

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu, apakah syarat bahwa *m* dan *n* bilangan positif diperlukan untuk Sifat-3 dan Sifat-4. Bagaimana jika *m* dan *n* adalah negatif atau kedua-duanya bilangan negatif.

Catatan

Dalam beberapa definisi, sifat, dan proses pembuktian sering kita menggunakan simbol logika. Beberapa simbol yang sering kita gunakan dijelaskan sebagai berikut.

a. Simbol $\forall$ dibaca untuk setiap atau untuk semua. Misalnya, $\forall\ x \in R$, berlaku $x^2 \geq 0$ (dibaca, untuk setiap x bilangan real, maka x kuadrat lebih dari atau sama dengan nol).

b. Simbol $p \Rightarrow q$ dibaca jika p, maka q. Misalnya $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

c. Simbol $p \Leftrightarrow q$ dibaca p jika dan hanya jika q atau p bila dan hanya bila q. Misalnya $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ atau $x = -2$

Contoh 1.2

(a) Buktikan jika $a \in R$, $a > 1$ dan $n > m$, maka $a^n > a^m$!

Bukti:

Karena $a > 1$ dan $n > m$ maka $n - m > 0$ dan $a^n > 0$, $a^m > 0$. Akibatnya, berlaku

$$\Leftrightarrow \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \ (\text{Lihat sifat-1 di atas})$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^n}{a^m} > 1 \left(\text{Mengapa } \frac{a^n}{a^m} > 1\text{? Beri alasamu!}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^n}{a^m} \times a^m > 1 \times a^m \ (\text{Karena } a^m > 0)$$

$$\Leftrightarrow a^m > a^n \ (\text{terbukti})$$

(b) Perlukah syarat $a > 1$?

Misalkan kita ambil a bilangan real yang memenuhi $a < 1$ dan $n > m$. Apakah yang terjadi?

Pilih $a = -2$, dengan $n > m$, pilih $n = 3$ dan $m = 2$. Apakah yang terjadi?

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$

Dengan demikian, $a^n = -8 < 4 = a^m$ atau $a^n < a^m$. Jadi, tidak benar bahwa $a^n > a^m$ bila $a < 1$ dan $n > m$. Jadi, syarat a adalah bilangan real, dengan $a > 1$ dan $n > m$ merupakan syarat cukup untuk membuktikan $a^n > a^m$.

Latih siswa berpikir analitis dengan mengajukan Contoh 1.2 di samping. Minta siswa membuktikan masalah yang diberikan dan beri bantuan, jika siswa mengalami kesulitan. Ajukan berbagai pertanyaan untuk menguji pemahaman siswa, dalam pemanfaatan kosep dan sifat yang sudah dipelajari sebelumnya, untuk proses pembuktian.

Minta siswa memberi contoh yang lain dengan memilih nilai a tertentu, agar pernyataan pada Contoh 1.2 tidak berlaku, apabila $a < 1$. Seperti halnya contoh penyangkal pada buku siswa di samping.

Arahkan siswa diskusi dengan temannya satu kelompok. Minta siswa menganalisis beberapa pernyataan pada tabel di samping.

- *Jika syarat $a > 1$ tidak dipenuhi, maka pernyataan jika $a \in R$, $a > 1$ dan $n > m$, maka an > am, belum tentu benar.*
- *Tidak perlu diperkuat syarat $n > m$ menjadi $n > m > 0$, sebab pernyataan pada Contoh 1.4 berlaku untuk n dan m yang negatif.*
- *Syarat $a > 1$ tidak boleh diganti dengan $a \geq 1$, sebab untuk $a = 1$, $a^n = a^m$.*

Arahkan siswa mencermati beberapa contoh yang disajikan, agar lebih mema-hami penggunaan sifat-sifat bilangan berpangkat dalam penyelesaian berbagai soal.Cek pemahaman siswa dengan mengajukan pertanyaan-pertanyaan terkait pemanfaatan sifat tersebut

Diskusi

Berdiskusilah dengan temanmu satu kelompok. Analisis pernyataan pada Contoh 1.2!

- Apa akibatnya bila syarat $a > 1$ tidak dipenuhi?
- Perlukah diperkuat dengan syarat $n > m > 0$? Jelaskan!
- Bolehkah syarat $a > 1$ di atas diganti $a \geq 1$? Jelaskan!
- Bagaimanakah bila $0 < a < 1$ dan $a < 0$?
- Buat aturan hubungan antara a^n dan a^m untuk bermacam-macam nilai a di atas!
- Buat laporan hasil diskusi kelompokmu.

Contoh 1.3

Terapkan berbagai sifat bilangan berpangkat untuk menentukan hasil operasi bilangan pada soal yang disajikan pada contoh. Ujilah kebenaran hasilnya!

1. $$2^2 \times 2^5 = \underbrace{2 \times 2}_{2\text{ faktor}} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{5\text{ faktor}}$$
$$= \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{7\text{ faktor}}$$
dengan menggunakan Sifat-1
$$= 2^7$$
$$= 2^{2+5}$$

2. $$\frac{2^5}{2^5} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$$
dengan menggunakan Sifat-2 kasus b
$$= 2^0$$
$$= 2^{5-5}$$
$$= 2^{5-5}$$

3. $$(2^3)^2 = (2^3)\times(2^3)$$
$$= \underbrace{(2\times2\times2)}_{3 \text{ faktor}}\times\underbrace{(2\times2\times2)}_{3\text{ faktor}}$$ dengan menggunakan Sifat-3
$$= \underbrace{(2\times2\times2\times2\times2\times2)}_{6\text{ faktor}}$$
$$= 2^{3+3}$$
$$= 2^6$$

4. $$(2\times3)^3 = (2\times3)\times(2\times3)\times(2\times3)$$
$$= \underbrace{2\times2\times2}_{3\text{ faktor}}\times\underbrace{3\times3\times3}_{3\text{ faktor}}$$ dengan menggunakan Definisi 1.1
$$= 2^3\times3^3$$

5. $$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$= \frac{\overbrace{2\times2\times2}^{3\text{ faktor}}}{\underbrace{3\times3\times3}_{3\text{ faktor}}}$$ dengan menggunakan Definisi 1.1
$$= \frac{2^3}{3^3}$$

Latih siswa berpikir kritis, analitis, dan kreatif dengan mengajukan Contoh 1.4 di samping. Minta siswa membuktikan pernyataan yang diberikan dan beri bantuan, jika siswa mengalami kesulitan. Ajukan berbagai pertanyaan untuk menguji pemahaman siswa, dalam pemanfaatan konsep dan sifat yang sudah dipelajari sebelumnya, untuk proses pembuktian.

Contoh 1.4

Buktikan bahwa jika $a > 1$ dan $n > m$ dengan n dan m bilangan bulat negatif, maka $a^n > a^m$.

Bukti:
Karena $n > m$ dengan n dan m bilangan bulat negatif, maka $-n$ dan $-m$ adalah bilangan bulat positif dan $-m > -n$.

Karena $a > 1$ maka $\dfrac{a^{-m}}{a^{-n}} = \dfrac{a^n}{a^m} > 1$ (Gunakan sifat $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$).

$\dfrac{a^n}{a^m} > 1 \Rightarrow a^n > a^m$ (terbukti)

Pernyataan pada Contoh 1.4, tidak berlaku untuk $a < 1$, misalnya pilih $a = -3$, $n = -2$, dan $m = -3$.

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{(-3)^{-2}}{(-3)^{-3}} = \frac{(-3)^3}{(-3)^2}$$
$$= \frac{-27}{9} = -3 < 1$$
$$\frac{a^n}{a^m} < 1 \Rightarrow a^n < a^m.$$

Beri bantuan siswa melanjutkan langkah penyelesaian Contoh-1.5 di samping. Alternatif penyelesaiannya adalah Dengan menggunakan sifat eksponen, maka kita peroleh:

$7^{1234} = 7^{(4 \times 308)} \times 7^2$.

$7^{1234} = (7^4)^{308} \times 7^2$. *Ingat:*

$a^{mxn} = (a^m)^n = (a^n)^m$

$7^{1234} = (7^4)^{308} \times 7^2$

sehingga satuan dari $[7^{1234}]$ = *satuan dari* $[(7^4)^{308} \times 7^2]$

Satuan dari $[7^{1234}]$ = *satuan dari* $[(1)^{308}] \times$ *satuan dari* $[7^2]$.

Satuan dari $[7^{1234}] = 1 \times 9$

Satuan dari $[7^{1234}] = 9$

Jadi, angka terakhir dari 7^{1234} *adalah* 9.

Jelaskan pada siswa melalui beberapa contoh yang sudah dipelajari sebelumnya di SMP untuk membangun pemahaman terhadap Definisi-1.4 *dan* 1.5. *Misalnya,*

$$\sqrt{4} = 2 \Rightarrow 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\Rightarrow \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow \left(4^{\frac{1}{2}\times 2}\right) = 2^2$$

$$\Rightarrow (4) = 2^2$$

Dalam contoh ini,

$a = 4$, $p = 2$, *dan* $m = 2$.

Contoh 1.5

Berdasarkan sifat perkalian dengan bilangan 7, tentukan angka satuan dari 7^{1234} tanpa menghitung tuntas. Perhatikan angka satuan dari perpangkatan dari 7 berikut?

Perpangkatan 7	Nilai	Angka Satuan
7^1	7	7
7^2	49	9
7^3	343	3
7^4	2401	1
7^5	16807	7
7^6	117649	9
7^7	823543	3
7^8	5764801	1

Coba lanjutkan langkah berikutnya untuk menemukan angka satuan 7^{1234}. Cermati sifat satuan pada tabel di atas. Saat periode ke berapakah berulang? Selanjutnya manfaatkan sifat-sifat perpangkatan dan perkalian bilangan berpangkat.

5. Pangkat Pecahan

Definisi 1.4

Misalkan a bilangan real dan $a \neq 0$, m bilangan bulat positif, maka $a^{\frac{1}{m}} = p$ adalah bilangan real positif, sehingga $p^m = a$.

Selanjutnya kita akan analisis sifat perpangkatan bilangan real dengan pangkat pecahan.

Definisi 1.5

Misalkan a bilangan real dan $a \neq 0$, m, n bilangan bulat positif didefinisikan $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Sifat-4

Misalkan a bilangan real dengan $a > 0$, $\frac{p}{n}$ dan $\frac{m}{n}$ adalah bilangan pecahan $n \neq 0$, maka $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = (a)^{\frac{m+p}{n}}$.

Bukti:

Berdasarkan Sifat-4, jika a bilangan real dan $a \neq 0$, m, n adalah bilangan bulat positif, maka $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$. Dengan demikian $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p$$

$$= \left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}}_{m \text{ faktor}}\right)\left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}}_{p \text{ faktor}}\right)$$

$$= \left(\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}}_{m+p \text{ faktor}}\right) \quad (\text{Sesuai Sifat } 1)$$

Berdasarkan Definisi 1.5 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$, sehingga diperoleh

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m+p} = (a)^{\frac{m+p}{n}} \qquad (\text{terbukti})$$

Untuk Definisi 1.5 *berikan contoh agar siswa lebih memahaminya. Misalnya*

$$2^{\frac{6}{2}} = 2^3$$
$$= 2 \times 2 \times 2$$
$$= 8$$

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 = (2)^{\frac{1}{2} \times 6}$$
$$= (2)^3 = 2 \times 2 \times 2$$
$$= 2$$

Berarti $2^{\frac{6}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6$

Selanjutnya arahkan siswa membuktikan Sifat-4 menggunakan Definisi 1.5

Sifat-5

Jika a adalah bilangan real dengan $a > 0$, $\frac{m}{n}$ dan $\frac{p}{q}$ bilangan pecahan $q, n \neq 0$, maka $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$.

Arahkan siswa membuktikan Sifat-5 menggunakan definisi dan sifat perpangkatan yang sudah dipelajari. Alaternatif pembuktian dapat dicermati di samping.

Minta siswa untuk menyelesaikan uji kompetensi melalui pemberian tugas untuk menilai penguasaan siswa terhadap materi yang sudah dipelajari. Terutama tugas projek yang tersedia. Gunakan rubrik penilaian projek yang telah tersedia pada bagian akhir dari buku guru ini.

Uji Kompetensi 1.1

1. Sederhanakanlah hasil operasi bilangan berpangkat berikut.
   a. $2^5 \times 2^9 \times 2^{12}$
   b. $2^5 \times 3^6 \times 4^6$
   c. $\dfrac{2^5 \times 3^5 \times 4^2}{12^2}$
   d. $\dfrac{(-5)^6 \times 25^2}{125}$
   e. $\dfrac{3^7 \times 7^3 \times 2}{(42)^3}$
2. Dengan menggunakan sifat bilangan berpangkat, sederhanakanlah bentuk berikut.
   a. $2x^3 \times 7x^4 \times (3x)^2$
   b. $\left(\dfrac{-2p}{q}\right) \times (-q)^4 \times \dfrac{2}{5}p^2$
   c. $y^5 \times (x \times y)^3 \left(\dfrac{1}{x^2 \times y}\right)$
   d. $(a \times b \times c)^4 \times \dfrac{3}{(b \times c)^3} \times \dfrac{b^3}{27a^5}$
   e. $\dfrac{-4a^3 \times 2b^5}{\left(\dfrac{8a}{b}\right)}$
   f. $\dfrac{1}{x^2 y} \times \dfrac{2x}{3y^2} \times \dfrac{5}{3x} \times (4y)^2$
   g. $(-a \times b)^3 \times \left(\dfrac{-b}{2a}\right)^4 \times \left(\dfrac{3a}{b}\right)^5$
   h. $\left(\dfrac{24a^3 \times b^8}{6a^5 \times b}\right) \times \left(\dfrac{4b^3 \times a}{2a^3}\right)^2$

i. $\left(\dfrac{36(x\times 2y)^2}{3x\times y^2}\right)\div\left(\dfrac{12x(3y)^2}{9x^2y}\right)^2$

j. $\left(\dfrac{(-p)^3\times(-q)^2\times r^3}{-3(p^2q)^3}\right)\div\left(\dfrac{2pqr^3}{-12(qr)^2}\right)$

3. Hitunglah hasil operasi bilangan berpangkat berikut.

   a. $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^4\times\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}\right)^2$

   b. $(-5)^3\times\left(\dfrac{1}{15}\right)^2\times\left(\dfrac{10}{3}\right)^4\times\left(\dfrac{9}{5}\right)^5$

   c. $\dfrac{3x^2\times y^3}{24x}\times(2y)^2$; untuk $x = 2$ dan $y = 3$

   d. $\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}x\right)^2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)(-y)^3}{xy^2}$

   untuk $x = \dfrac{1}{2}$ dan $y = \dfrac{1}{3}$

   e. $\dfrac{3p^2\times(-3)^4}{(-2p)^2\times(-3q)^2}\times 4\left(\dfrac{q}{p}\right)^2$;

   untuk $p = 4$ dan $q = 6$

   f. $\dfrac{\left(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{-3}{2}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{-3}{2}}\right)x^{-1}y}{\left(x^2+y^{-1}+y^{-2}\right)}$

   untuk $x = \dfrac{1}{2}$ dan $y = \dfrac{1}{2}$

4. Hitunglah

   $\dfrac{1^{-4}+2^{-4}+3^{-4}+4^{-4}+\ldots}{1^{-4}+3^{-4}+5^{-4}+7^{-4}+\ldots}$

5. Sederhanakanlah $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{2}{3}}b}$.

6. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan berikut

   a. $2^x = 8$

   b. $4^x = 0{,}125$

   c. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x = 1$

7. Tentukan hasil dari

   $\dfrac{\left(2^{n+2}\right)^2-2^2\times 2^{2n}}{2^n\times 2^{n+2}}$

8. Misalkan kamu diminta menghitung 7^{64}. Berapa banyak perkalian yang kamu lakukan untuk mendapatkan nilai akhirnya? Bandingkan jawabanmu dengan temanmu. Pemenang di antara kalian adalah yang dapat mencari hasilnya dengan melakukan perkalian sesedikit mungkin. Coba tuliskan prosedur mengalikan yang paling sedikit perkaliannya untuk menghitung 7^{64}. Apakah prosedur tersebut dapat dipergunakan untuk pangkat positif berapapun?

9. Berdasarkan sifat bilangan 7, tentukan angka satuan dari $7^{1234} + 7^{2341} + 7^{3412} + 7^{4123}$ tanpa menghitung tuntas!

10. Tentukan angka satuan dari $\left((6)^{26}\right)^{62}$ berdasarkan sifat bilangan 6, tanpa menghitung tuntas.Selanjutnya lakukan hal tersebut berdasarkan sifat angka 2, 3, 4, 5, 8, 9.
11. Tunjukkan bahwa $1^{2001} + 2^{2001} + 3^{2001} + \ldots + 2001^{2001}$ adalah kelipatan 13.
12. Bagaimana cara termudah untuk mencari $\dfrac{3^{2008}\left(10^{2013} + 5^{2012} \times 2^{2011}\right)}{5^{2012}\left(6^{2010} + 3^{2009} \times 2^{2008}\right)}$.

Tugas proyek diberikan sebagai tugas individu untuk menginformasikan kepada siswa bahawa belajar eksponen sangat diperlukan dalam perkembangan ilmu dan dalam menyelesaikan permasalahan kehidupan.

Projek

Bilangan yang terlalu besar atau terlalu kecil sering dituliskan dalam notasi eksponen yang dituliskan sebagai *a E b* yang nilainya adalah $a \times 10^b$. Sehingga 0,000052 ditulis sebagai 5,2 *E* 5. Cari besaran-besaran fisika, kimia, astronomi, dan ekonomi yang nilainya dinyatakan dengan notasi eksponen. Misalkan kecepatan cahaya adalah 300.000 km/det, sehingga dalam notasi eksponen ditulis sebagai 3 *E* 8 m/det.

Berdasarkan penyelesaian masalah dan konsep yang sudah dipelajari sebelumnya arahkan siswa untuk dapat mendefinisikan definisi-definisi berikut.

6. Bentuk Akar

Pengakaran (penarikan akar) suatu bilangan merupakan kebalikan dari pemangkatan suatu bilangan. Akar dilambangkan dengan notasi "$\sqrt{\ }$".

Definisi 1.6

Misalkan a bilangan real dengan $a > 0$, $\frac{p}{q}$ adalah bilangan pecahan dengan

$q \neq 0$. $q \geq 2$. $a^{\frac{p}{q}} = c$, sehingga $c = \sqrt[q]{a^p}$ atau $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Perhatikan permasalahan berikut.

Masalah-1.4

Seorang ahli ekonomi menemukan hubungan antara harga (h) dan banyak barang (b) yang dinyatakan dalam persamaan $h = 3\sqrt[3]{b^2}$. Jika nilai b = 8, maka berapa nilai h?

Alternatif Penyelesaian

$$h = 3\sqrt[3]{b^2} \Leftrightarrow h = 3\sqrt[3]{8^2}$$
$$\Leftrightarrow h = 3\sqrt[3]{64}$$
$$\Leftrightarrow h = 3\sqrt[3]{4 \times 4 \times 4} = 3 \times 4$$
$$\Leftrightarrow h = 12$$

Selanjutnya minta siswa mengamati masalah 1.4 dan menghimpun informasi yang terkandung pada masalah tersebut. Memberi kesempatan kepada siswa menganalisis dan memunculkan ide-ide dan pertanyaan-pertanyaan sekitar masalah yang diajukan sebagai pengantar kepada siswa tentang konsep bentuk akar.

Akar ke-n atau akar pangkat n dari suatu bilangan a dituliskan sebagai $\sqrt[n]{a}$, dengan a adalah bilangan pokok/basis dan n adalah indeks/eksponen akar.
Bentuk akar dapat diubah menjadi bentuk pangkat dan sebaliknya. Sebelum mempelajari bentuk akar, kamu harus memahami konsep bilangan rasional dan irrasional terlebih dahulu.

Bilangan rasional berbeda dengan bilangan irrasional. Bilangan rasional adalah bilangan real yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a dan b bilangan bulat dan $b \neq 0$. Karena itu, bilangan rasional terdiri atas bilangan bulat, bilangan pecahan biasa, dan bilangan pecahan campuran. Sedangkan bilangan irasional adalah bilangan real yang bukan bilangan rasional. Bilangan irasional merupakan bilangan yang mengandung pecahan desimal tak berhingga dan tak berpola. Contoh bilangan irasional, misalnya $\sqrt{2}$ = 1,414213562373..., e = 2,718..., dan π = 3,141592653…

Jelaskan perbedaan bilangan rasional dan irasional pada siswa. Berikan beberapa contoh untuk memahami konsep bilangan rasional dan irasional.

Ajak siswa memahami pengertian bentuk akar melalui contoh dan bukan contoh. Gunakan contoh dan bukan contoh bentuk akar yang tertera pada buku siswa.

Bilangan irasional yang menggunakan tanda akar ($\sqrt{\ }$) dinamakan *bentuk akar*. Tetapi ingat, tidak semua bilangan yang berada dalam tanda akar merupakan bilangan irasional. Contoh: $\sqrt{25}$ dan $\sqrt{64}$ bukan bentuk akar, karena nilai $\sqrt{25}$ adalah 5 dan nilai $\sqrt{64}$ adalah 8, keduanya bukan bilangan irasional.

Agar lebih jelas, perhatikan contoh berikut.

1. $\sqrt{20}$ adalah bentuk akar
2. $\sqrt[3]{27}$ bukan bentuk akar, karena $\sqrt[3]{27} = 3$

Minta siswa mengamati hubungan bentuk akar dengan bilangan berpangkat menggunakan sifat-sifat yang sudah dipelajari sebelumnya.

7. Hubungan Bentuk Akar dan Bilangan Berpangkat

Perlu diketahui bahwa bilangan berpangkat memiliki hubungan dengan bentuk akar. Berdasarkan Sifat-4, jika a adalah bilangan real dengan $a > 0$, $\frac{p}{n}$ dan $\frac{m}{n}$ adalah bilangan pecahan dengan $n \neq 0$, maka $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = (a)^{\frac{m+p}{n}}$.

Dengan demikian $p^{\frac{1}{2}} \times p^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = p$ dan perhatikan bahwa $\sqrt{p} \times \sqrt{p} = p$, sehingga dapat disimpulkan $p^{\frac{1}{2}} = \sqrt{p}$.

Perhatikan untuk kasus di bawah ini

$p^{\frac{1}{3}} \times p^{\frac{1}{3}} \times p^{\frac{1}{3}} = p^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = p^1 = p$ dan perhatikan juga bahwa $\sqrt[3]{p} \times \sqrt[3]{p} \times \sqrt[3]{p} = p$, sehingga berdasarkan Definisi 1.6 disimpulkan $p^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{p}$.

Latihan 1.3

Cermatilah dan buktikan apakah berlaku secara umum bahwa $p^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p}$.

Minta siswa untuk menyelesaikan Latihan 1.3 dengan caranya sendiri . Jawaban yang diharapkan dari siswa, bahwa pernyataan pada Latihan 1.3 berlaku untuk n bilangan bulat positif dan $p \geq 0$.

Perhatikan bahwa $p^{\frac{2}{3}} \times p^{\frac{2}{3}} \times p^{\frac{2}{3}} = p^2$, sehingga berdasarkan sifat perkalian bilangan berpangkat diperoleh:

$$\left(p^{\frac{2}{3}}\right)^3 = p^2 \qquad \text{Ingat, } (p^m)^n = p^{m \times n}$$

dapat diubah, $p^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{p^2}$.

Secara umum dapat disimpulkan bahwa $p^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{p^m} = \left(\sqrt[n]{p}\right)^m$ sebagaimana diberikan pada Definisi-1.6.

8. Operasi pada Bentuk Akar

Operasi pada bentuk akar yang digunakan dalam pembelajaran ini adalah operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian.

a. Operasi Penjumlahan dan Pengurangan Bentuk Akar

Operasi penjumlahan dan pengurangan pada bentuk akar dapat dilakukan apabila bentuk akarnya senama. Bentuk akar senama adalah bentuk akar yang mempunyai eksponen dan basis sama. Untuk setiap p, q, dan r adalah bilangan real dan $r \geq 0$ berlaku sifat-sifat berikut.

$$p\sqrt[n]{r} + q\sqrt[n]{r} = (p+q)\sqrt[n]{r}$$

$$p\sqrt[n]{r} - q\sqrt[n]{r} = (p-q)\sqrt[n]{r}$$

Perhatikan contoh berikut ini!

Jelaskan beberapa contoh berikut untuk melatih siswa menerapkan berbagai aturan terkait operasi aljabar dalam bentuk akar. Ajukan berbagai pertanyaan pada siswa untuk menguji pemahaman mereka.

Contoh 1.6

Tentukan hasil penjumlahan dan pengurangan berikut dalam bentuk yang sederhana!

1. $3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = (3+4)\sqrt{5}$
   $= 7\sqrt{5}$
2. $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ (tidak dapat disederhanakan karena akarnya tidak senama)
3. $2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} = (2-3)\sqrt[3]{4}$
   $= -\sqrt[3]{4}$
4. $3\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x} = (3-1)\sqrt[3]{x}$
   $= 2\sqrt[3]{x}$

b. Operasi Perkalian dan Pembagian Bentuk Akar

Pada pangkat pecahan telah dinyatakan bahwa $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Sifat perkalian dan pembagian bentuk akar dapat dicermati pada beberapa contoh berikut.

Contoh 1.7

Ajak siswa mengerjakan Latihan 1.4. Cek kebenaran hasil kerja siswa, dengan meminta beberapa siswa menyajikan hasil kerja di depan kelas. Hasil kerja yang diharapkan dari siswa adalah

1) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

2) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2^{\frac{6}{6}} = 2^1 = 2$

3) $4\sqrt[3]{5} \times 2\sqrt[3]{7} = (4\times 2)\left(\sqrt[3]{5\times 7}\right) = 8\sqrt[3]{35}$

4) $3\sqrt[5]{5} \times 5\sqrt[7]{5} = (3\times 5)\left(5^{\frac{1}{5}} \times 5^{\frac{1}{7}}\right) = 15\left(5^{\frac{12}{35}}\right) = 15\sqrt[35]{5^{12}}$

5) $\dfrac{3\sqrt[3]{4}}{4\sqrt[3]{5}} = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}$

6) $\dfrac{2\sqrt[4]{3}}{3\sqrt[4]{5}} = \dfrac{2}{3}\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}}$

Latihan 1.4

1) Buktikan bahwa jika a bilangan real dan $a > 0$, maka $\sqrt[n]{a^n} = a$.
2) Buktikan bahwa jika a, b, c, dan d bilangan real, $c > 0$ dan $d > 0$, maka $a\sqrt[n]{c} \times b\sqrt[n]{d} = ab\sqrt[n]{cd}$.
3) Buktikan bahwa jika a, b, c, dan d bilangan real, $c > 0$ dan $d > 0$, maka $\dfrac{a\sqrt[n]{c}}{b\sqrt[n]{d}} = \dfrac{a}{b}\sqrt[n]{\dfrac{c}{d}}$.

c. Merasionalkan Penyebut Bentuk Akar

Kita tahu bahwa bentuk-bentuk akar seperti $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{3}+\sqrt{7}, \sqrt{2}-\sqrt{6}$, dan seterusnya merupakan bilangan irasional. Jika bentuk akar tersebut menjadi penyebut pada suatu pecahan, maka dikatakan sebagai penyebut irasional.

Penyebut dalam bentuk akar dapat diubah menjadi bentuk pangkat rasional. Cara merasionalkan penyebut bentuk akar tergantung pada bentuk akar itu sendiri. Akan tetapi, prinsip dasarnya sama; yaitu mengalikan dengan bentuk akar sekawannya. Proses ini dinamakan *merasionalkan penyebut*.

1) **Merasionalkan bentuk $\dfrac{p}{\sqrt{q}}$**

Bentuk $\dfrac{p}{\sqrt{q}}$ dirasionalkan dengan cara mengalikannya dengan $\dfrac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}}$.

$$\frac{p}{\sqrt{q}} = \frac{p}{\sqrt{q}} \cdot \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}} = \frac{p}{q}\sqrt{q}$$

1) $a > 0$

$$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

(terbukti)

2) a, b, c, dan d bilangan real, $c > 0$ dan $d > 0$

$$\sqrt[n]{c} \times \sqrt[n]{d} = a\left(c^{\frac{1}{n}}\right) \times b\left(d^{\frac{1}{n}}\right)$$
$$= ab(c \times d)^{\frac{1}{n}}$$
$$= ab\sqrt[n]{cd}$$

(terbukti)

3) a, b, c, dan d bilangan real, $c > 0$ dan $d > 0$

$$\frac{a\sqrt[n]{c}}{b\sqrt[n]{d}} = \frac{a(c)^{\frac{1}{n}}}{b(d)^{\frac{1}{n}}}$$
$$= \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$= \frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$$

(terbukti)

Latih siswa merasionalkan berbagai bentuk akar mengalikan dengan bentuk akar sekawannya melalui berbagai contoh yang bervariasi, antara lain bentuk

$\frac{p}{\sqrt{q}}, \frac{r}{p+\sqrt{q}}, \frac{r}{p-\sqrt{q}}$

$\frac{r}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$, *dan* $\frac{r}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$

Selanjutnya jelaskan Contoh 1.8 dan Contoh 1.9 yang tersedia pada buku siswa.

Diskusi

Menurutmu mengapa penyebut bilangan pecahan berbentuk akar harus dirasionalkan?

Mengapa kita harus mengalikan $\frac{p}{\sqrt{q}}$ dengan $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}}$?

Karena $\sqrt{q}$ selalu positif, maka $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}} = 1$.

Jadi perkalian $\frac{p}{\sqrt{q}}$ dengan $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}}$ tidak akan mengubah nilai $\frac{p}{\sqrt{q}}$ namun menyebabkan penyebut menjadi bilangan rasional.

2) **Merasionalkan bentuk**

$$\frac{r}{p+\sqrt{q}}, \frac{r}{p-\sqrt{q}}, \frac{r}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}, \text{ dan } \frac{r}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$$

Sebelum kita merasionalkan bentuk-bentuk akar di atas, perlu kita pahami bentuk-bentuk campuran bilangan rasional dan bilangan irasional.

a) Jika bilangan rasional dijumlahkan dengan bilangan irasional maka hasilnya bilangan irasional. Contoh $2 + \sqrt{7}$ = 2 + 2,645751.... = 4, 645751... (bilangan irasional).

b) Jika bilangan irasional dijumlahkan dengan bilangan irasional maka hasilnya bilangan irasional atau rasional, Contoh (1) $\sqrt{5}$ + $\sqrt{7}$ = 2,236068.... + 2,645575... = 4,881643... (bilangan irasional), (2) $2\sqrt{5}$ + $(-2\sqrt{5})$ = 0 (bilangan rasional). Jika dua bilangan irasional dikurangkan, bagaimana hasilnya?

c) Jika bilangan rasional dikalikan dengan bilangan irrasional, maka hasilnya bilangan rasional atau irasional. Contoh. $0 \times \sqrt{2}$ = 0 (0 adalah bilangan rasional) atau $2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ adalah bilangan irasional

d) Jika bilangan irasional dikalikan dengan bilangan irasional, maka hasilnya dapat bilangan rasional atau bilangan irasional.

Contoh:

- $\sqrt{5} \times \sqrt{125} = \sqrt{5} \times 5\sqrt{5} = 25$

  (25 adalah bilangan rasional)
- $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$ ($\sqrt{15}$ adalah bilangan irasional)

e) $\sqrt[n]{a}$ disebut bentuk akar apabila hasil akar pangkat n dari a adalah bilangan irasional.

Untuk merasionalkan bentuk $\dfrac{r}{p+\sqrt{q}}, \dfrac{r}{p-\sqrt{q}}, \dfrac{r}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$, dan $\dfrac{r}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$.

dapat dilakukan dengan memperhatikan sifat perkalian $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, sehingga

$$\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)=\left(\sqrt{p}\right)^2-\left(\sqrt{q}\right)^2=p-q$$

$$\left(p+\sqrt{q}\right)\left(p-\sqrt{q}\right)=p^2-\left(\sqrt{q}\right)^2=p^2-q$$

Bentuk $\left(p+\sqrt{q}\right)$ dan bentuk $\left(p-\sqrt{q}\right)$ saling sekawan, bentuk $\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)$ dan $\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)$ juga saling sekawan.

Jika perkalian bentuk sekawan tersebut dilakukan maka dapat merasionalkan bentuk akar. Untuk p, q dan r bilangan real.

$$\frac{r}{\left(p+\sqrt{q}\right)}=\frac{r}{\left(p+\sqrt{q}\right)}.\frac{\left(p-\sqrt{q}\right)}{\left(p-\sqrt{q}\right)}=\frac{r\left(p-\sqrt{q}\right)}{\left(p^2-q\right)}$$ dimana $q \geq$ 0 dan $p^2 \neq q$.

$$\frac{r}{\left(p-\sqrt{q}\right)}=\frac{r}{\left(p-\sqrt{q}\right)}\cdot\frac{\left(p+\sqrt{q}\right)}{\left(p+\sqrt{q}\right)}=\frac{r\left(p+\sqrt{q}\right)}{\left(p^2-q\right)}$$ dimana $q \geq 0$ dan $p^2 \neq q$.

$$\frac{r}{\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}=\frac{r}{\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)}{\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)}=\frac{r\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)}{\left(p-q\right)}$$

dimana $p \geq 0$, $q \geq 0$ dan $p \neq q$

$$\frac{r}{\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)}=\frac{r}{\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}{\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}=\frac{r\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)}{\left(p-q\right)}$$

dimana $p \geq 0$, $q \geq 0$ dan $p \neq q$

Contoh 1.8

Rasionalkan penyebut pecahan-pecahan berikut.

a. $$\frac{2}{3-\sqrt{2}}=\frac{2}{3-\sqrt{2}}\times\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{2(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{2\left(3+\sqrt{2}\right)}{9-2}$$
$$=\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$$
$$=\frac{6}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{7}$$

b. $$\frac{3}{6+\sqrt{3}}=\frac{3}{6+\sqrt{3}}\times\frac{6-\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{3\left(6-\sqrt{3}\right)}{\left(6+\sqrt{3}\right)\left(6-\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{18 - 3\sqrt{3}}{36 - 3}$$

$$= \frac{18 - 3\sqrt{3}}{33}$$

$$= \frac{6}{11} - \frac{\sqrt{3}}{11}$$

c. $$\frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)}$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{7} + \sqrt{5}\right)}{(7 - 5)}$$

$$= \frac{4\sqrt{7} + 4\sqrt{5}}{2}$$

$$= 2\sqrt{7} + 2\sqrt{5}$$

Contoh 1.9

Pikirkan cara termudah untuk menghitung jumlah bilangan-bilangan berikut

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} \ldots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}} = \ldots ?$$

Permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan cara merasionalkan penyebut tiap suku; yaitu,

$$= \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{\sqrt{1} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4}}{\sqrt{3} - \sqrt{4}} +$$

Jelaskan cara merasionalkan bentuk akar dengan mengalikan bentuk sekawan sesuai penyebut dari bentuk rasional seperti pada Contoh 1.9. Beri kesempatan pada siswa untuk mencoba menguji penyelesaian soal pada contoh-contoh yang diberikan.

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + \ldots +$$

$$\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} \times \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$$

$$= \frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{-1} +$$

$$\frac{\sqrt{4}-\sqrt{5}}{-1} + \ldots + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1}$$

$$= -\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-$$

$$\sqrt{4}+\sqrt{5}-\ldots-\sqrt{99}+\sqrt{100}$$

$$= -\sqrt{1}+\sqrt{100} = -1+10 = 9.$$

Minta siswa mengamati Contoh 1.10 dan memberi kebebasan berpikir dalam menganalisis permasalahan yang diberikan. Uji pemahaman dengan mengajukan berbagai pertanyaan serta ingatkan kembali materi prasyarat yang dibutuhkan dalam pentelesaian soal tersebut.
Bantu siswa memanfaatkan pemisalan dan ingatkan kembali materi persamaan kuadrat yang telah dipelajari di SMP, tentang bentuk kuadrat sempurna, agar siswa dapat melanjutkan tugas memahami langkah penyelesaian Contoh 1.10

Contoh 1.10

Tentukan nilai dari $\dfrac{1}{\sqrt{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\ldots}}}}$

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan pola bilangan berikut. Misalkan,

$$P = 3 + \frac{1}{3+\dfrac{1}{3+\ldots}} \quad \text{atau} \quad P = 3 + \frac{1}{P}$$

$$\Leftrightarrow \quad P^2 - 3P - 1 = 0$$

Dengan mengubah ke bentuk kuadrat sempurna diperoleh:

$$\Leftrightarrow \quad \left(P-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad P = \frac{6+2\sqrt{13}}{4}$$

Jadi, nilai $\dfrac{1}{\sqrt{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\ldots}}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{13}}{4}}} = \sqrt{\dfrac{4}{6+2\sqrt{13}}}$

Dengan merasionalkan bentuk tersebut, maka

$$\sqrt{\frac{4}{6+2\sqrt{13}}} = \sqrt{\frac{4}{6+2\sqrt{13}}.\frac{6-2\sqrt{13}}{6-2\sqrt{13}}} = \sqrt{\frac{4(6-2\sqrt{13})}{-16}}$$

$$= \frac{\sqrt{2\sqrt{13}-6}}{2}$$

Jadi, $\dfrac{1}{\sqrt{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\ldots}}}} = \dfrac{\sqrt{2\sqrt{13}-6}}{2}$

3) Menyederhanakan bentuk $\sqrt{(p+q)\pm 2\sqrt{pq}}$

Sekarang kita akan menyederhanakan bentuk akar yang mempunyai bentuk khusus; yaitu, bentuk $\sqrt{(p+q)\pm 2\sqrt{pq}}$. Perhatikan proses berikut ini!

Arahkan siswa memahami cara penyederhanaan bentuk akar dengan menjelaskan penyelesaian Contoh 1.11.

Diskusikanlah masalah berikut dengan temanmu!

a. $\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)$

b. $\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)$

Dari hasil kegiatan yang kamu lakukan, kamu akan memperoleh bentuk sederhananya menjadi $\sqrt{(p+q)\pm 2\sqrt{pq}}$. Selanjutnya, perhatikan contoh berikut!

Contoh 1.11

Sederhanakan bentuk akar berikut ini!

a. $\sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\times 3}} = \sqrt{5+2\sqrt{5\times 3}+3}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$

b. $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5-4\sqrt{5}+4} = \sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2} = \sqrt{5}-2$

Uji Kompetensi 1.2

Berikan soal-soal pada Uji Kompetensi 1.2 sebagai pekerjaan rumah sesuaikan dengan materi yang telah dipelajari. Hal ini berguna untuk mengukur penguasaan siswa terhadap konsep dan prinsip matematika yang telah dipelajari.

1. Rasionalkan penyebut pecahan-pecahan berikut ini!

   a. $\dfrac{5}{\sqrt{15}}$ d. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$

   b. $\dfrac{2}{\sqrt{20}}$ e. $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{48}}$

   c. $\dfrac{3}{\sqrt{18}}$ f. $\dfrac{2a}{3\sqrt{a}}$

2. Rasionalkan penyebut pecahan-pecahan berikut ini!

   a. $\dfrac{1}{5-\sqrt{3}}$ d. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{10}}$

   b. $\dfrac{4-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$ e. $\dfrac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

   c. $\dfrac{2a}{3a+\sqrt{5}}$ f. $\dfrac{\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{150}}{\sqrt{96}}$

3. Sederhanakanlah bentuk berikut ini!

a. $\dfrac{15}{\sqrt{75}} - \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

b. $\dfrac{7}{2+\sqrt{8}} + \dfrac{11}{2-\sqrt{8}}$

c. $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \dfrac{3}{\sqrt{2}-1} + \dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

d. $\dfrac{10}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \dfrac{12}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \dfrac{14}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}$

4. Jika $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = a + b\sqrt{6}$, tentukan nilai $a + b$!

5. Sederhanakan bentuk akar berikut ini!

a. $\sqrt{19+8\sqrt{3}}$

b. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

c. $\sqrt{43+12\sqrt{7}}$

d. $\sqrt{21-4\sqrt{5}}$

e. $\sqrt{18+8\sqrt{2}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$

f. $\dfrac{3-\sqrt{14+6\sqrt{5}}}{\sqrt{21+12\sqrt{3}}}$

SOAL TANTANGAN

1. Tentukanlah nilai dari:

a. $\sqrt[3]{2\sqrt{3\sqrt[3]{2\sqrt{3\sqrt[3]{2\sqrt{3\sqrt[3]{\ldots}}}}}}}$

b. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}}}}$

c. $1+\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{\ldots}}}}}}$

2. Jika a,b bilangan asli dengan $a \le b$ dan $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}}$ adalah bilangan rasional, tentukan pasangan (a,b). (OSN 2005/2006)

3. Nyatakan b dalam a dan c dari persamaan $\dfrac{\sqrt[3]{b\sqrt{c}}}{\sqrt{c\sqrt[3]{a}}} = abc$.

4. Sederhanakan bentuk $\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}$.

5. Tentukan nilai a dan b dari

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1.000.000}+\sqrt{1.000.001}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$$

6. Hitunglah $\sqrt{54+14\sqrt{5}} + \sqrt{12-2\sqrt{35}} + \sqrt{32-10\sqrt{7}} =$

7. Jika $(3+4)(3^2+4^2)(3^4+4^4)(3^8+4^8)(3^{16}+4^{16})(3^{32}+4^{32}) = (4^x-3^y)$, tentukan nilai $x-y$.

Tugas proyek ini sebagai merupakan tugas individu ataupun kelompok. Setelah tugas ini selesaikan dikerjakan dalam waktu tertentu minta siswa untuk menyajikan laporannya di depan kelas.Gunakan rubrik penilaian tugas dan projek yang telah disajikan di bagain akhir buku ini

Projek

Tidak semua bilangan pecahan desimal tak hingga adalah bilangan irasional. Sebagai contoh 0,333... bukanlah bilangan irasional, karena dapat dinyatakan

sebagai pecahan $\frac{1}{3}$. Kenyataannya, bilangan pecahan desimal tak hingga dengan desimal berulang seperti 0,333... dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan.

a. Rancang sebuah prosedur untuk mengkonversi bilangan pecahan desimal tak hingga dengan desimal berulang menjadi bilangan pecahan. Beri contoh penerapan prosedur yang kamu rancang.

b. Berdasarkan penjelasan di atas, karena bilangan irasional π tidak mungkin sama dengan $\frac{22}{7}$, karena $\frac{22}{7}$ hanyalah pendekatan untuk nilai π sebenarnya.

   1) Berapakah kesalahan $\frac{22}{7}$ terhadap nilai π?
   2) Dengan menggunakan prosedur yang kamu rancang di atas tentukan pecahan yang lebih mendekati nilai π daripada $\frac{22}{7}$ (kesalahannya lebih kecil).
   3) Apakah lebih baik menggunakan angka yang kamu peroleh daripada menggunakan $\frac{22}{7}$
   4) Buat laporan projek ini dan paparkan di depan kelas.

9. Menemukan Konsep Logaritma

Arahkan siswa mengamati berbagai masalah nyata membangun konsep logaritma melalui pemecahan masalah nyata dengan model-model matematika yang ditemukan pada langkah pemecahan masalah.

Telinga manusia dapat mendengar suara dengan intensitas yang rentangnya luar biasa. Suara paling keras yang dapat didengar oleh orang yang sehat tanpa merusak gendang telinga memiliki intensitas 1 triliun (1.000.000.000.000) kali lebih kuat dari pada suara paling rendah yang bisa didengar.

Menghitung intensitas bunyi dengan rentang begitu besar tentu sangat tidak nyaman. Namun, dengan logaritma perhitungan ini akan menjadi lebih sederhana. Alexander Graham Bell (1847–1922) menggunakan logaritma untuk menghitung skala bunyi. Skala ini dinamakan *decibel*, dan didefinisikan sebagai $D = 10\log\dfrac{I}{I_0}$, dengan D adalah skala *decibel* bunyi, I adalah intensitas bunyi dengan satuan Watt per meter persegi $\left(W/m^2\right)$, dan I_0 adalah intensitas bunyi paling minimum yang bisa didengar orang yang sehat, yaitu $1{,}0 \times 10^{-12}$. Sebagai gambaran, berikut ini adalah tabel intensitas bunyi beberapa objek.

Tabel 1.1 Intensitas bunyi beberapa suara

Intensitas Bunyi $\left(W/m^2\right)$	Intensitas Bunyi
$1{,}0 \times 10^{-12}$	Ambang batas bawah pendengaran
$5{,}2 \times 10^{-10}$	Suara bisik-bisik
$3{,}2 \times 10^{-6}$	Percakapan normal
$8{,}5 \times 10^{-4}$	Lalu lintas padat
$8{,}3 \times 10^{2}$	Pesawat jet lepas landas

Banyak masalah kehidupan yang penyelesaiannya melibatkan berbagai aturan dan sifat logaritma. Cermatilah masalah berikut.

Ajukan Masalah 1.5, minta siswa mengamati masalah tersebut dan mendorong siswa mengajukan pertanyaan sekitar pemahaman masalah dan analisisnya. Pahami masalah dan tuliskan informasi yang diketahui pada soal. Selanjutnya meminta siswa membuat tabel keterkaitan antara jumlah uang Yusuf dengan waktu penyimpanan. Arahkan siswa menemukan model matematika yang menyatakan hubungan total uang simpanan dengan waktu menyimpan dan bunga uang. Diharapkan siswa menuliskan sesuai dengan penyelesaian yang ada di buku

Masalah-1.5

Yusuf adalah seorang pelajar kelas X di kota Kupang. Ia senang berhemat dan menabung uang. Selama ini dia berhasil menabung uangnya sejumlah Rp1.000.000,00 di dalam sebuah celengan yang terbuat dari tanah liat. Agar uangnya lebih aman, ia menabung uangnya di sebuah bank dengan bunga 10% per tahun. Berapa lama Yusuf menyimpan uang tersebut agar menjadi Rp1.464.100,00.

Pahami masalah dan tuliskan informasi yang diketahui pada soal. Buat tabel keterkaitan antara jumlah uang Yusuf dengan waktu penyimpanan. Selanjutnya temukan model matematika yang menyatakan hubungan total uang simpanan dengan waktu menyimpan dan bunga uang.

Diketahui:
Modal awal (M_0) = 1.000.000 dan besar uang tabungan setelah sekian tahun (M_t) = 1.464.100, besar bunga yang disediakan bank untuk satu tahun adalah 10% = 0,1.

Ditanya:
Berapa tahun (t) Yusuf menabung agar uangnya menjadi (M_t) = 1.464.100.-

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan pola pertambahan jumlah uang Yusuf setiap akhir tahun pada tabel berikut.

Tabel 1.2 Perhitungan besar suku bunga pada setiap akhir tahun *t*

Akhir Tahun	Bunga uang (10% × Total Uang)
0	0
1	Rp100.000,00
2	Rp110.000,00
3	Rp121.000,00
4	Rp133.100,00

Total = Modal + Bunga	Pola Total Uang pada saat *t*
Rp1.000.000,00	$1.000.000\ (1+0,1)^0$
Rp1.100.000,00	$1.000.000\ (1+0,1)^1$
Rp1.210.000,00	$1.000.000\ (1+0,1)^2$
Rp1.331.000,00	$1.000.000\ (1+0,1)^3$
Rp1.464.100,00	$1.000.000\ (1+0,1)^4$

Dari tabel di atas, jelas kita lihat bahwa Yusuf harus menabung selama 4 tahun agar uangnya menjadi Rp1.464.100,00. Selanjutnya, kita akan menyelesaikan permasalahan di atas dengan menggunakan logaritma, setelah kita mengenal sifat-sifat logaritma.

Dalam pembahasan sebelumnya, kita telah membahas tentang pemangkatan suatu bilangan. Kita tahu bahwa 2^3 hasilnya adalah 8 yang dapat ditulis $2^3 = 8$. Sehingga bila ada persamaan $2^x = 8$, maka nilai x yang memenuhi persamaan tersebut adalah $x = 3$.

Perhatikan Tabel-1.2, kita peroleh $1.464.100 = 1.000.000\ (1+0,1)^4$. Jika $4 = t$, maka persamaan tersebut menjadi $1.464.100 = 1.000.000\ (1 + 0,1)^t$. Hal ini dapat dikaitkan dengan bentuk eksponen yang sudah dipelajari sebelumnya, yaitu $a^c = b$, dengan memisalkan $a = (1 + 0,1)$, $b = 1,464100$, dan $c = t$. Bagaimana cara menentukan nilai $c = t = 4$?

Permasalahan ini dapat diselesaikan menggunakan invers dari eksponen, yaitu logaritma. Logaritma, dituliskan sebagai "log", didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.7

Misalkan a, $b \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, dan c bilangan rasional, ${}^a\log b = c$ jika dan hanya jika $a^c = b$.

dimana: a disebut basis ($0 < a < 1$ atau $a > 1$)
b disebut numerus ($b > 0$)
c disebut hasil logaritma

Tanyakan kepada siswa berbagai batasan yang tersedia pada Definisi 1.8. Misalnya, mengapa ada syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$ dalam definisi di atas? Minta siswa berdiskusi dalam kelompok. Berikan bantuan ketika siswa mengalami kesulitan.

Jawaban yang diharapkan dari siswa terkait pertanyaan dalam diskusi di samping, misalnya
Jika $a = 0$, maka sesuai Definisi 1.8, diperoleh $0^c = b$. Tentu tidak ada bilangan real $b > 0$ dan c bilangan rasional, yang memenuhi $0^c = b$.

Diskusi

Mengapa ada syarat $a > 0$ dan $a \neq 1$ dalam definisi di atas? Diskusikan dengan temanmu atau guru. Demikian juga dengan $b > 0$.

Berdasarkan definisi di atas, kita dapatkan bentuk-bentuk berikut.

- $2^x = 5 \Leftrightarrow x = {}^2\log 5$ (notasi $\Leftrightarrow$ dibaca jika dan hanya jika)
- $3^y = 8 \Leftrightarrow y = {}^3\log 8$
- $5^z = 3 \Leftrightarrow z = {}^5\log 3$

Catatan:

- ♦ Jika logaritma dengan basis e (yaitu $e \approx 2{,}718\ldots$, e adalah bilangan *Euler*), maka ${}^e\log b$ ditulis $\ln b$.
- ♦ Bilangan pokok (basis) 10 tidak ditulis, sehingga ${}^{10}\log a = \log a$.

Selanjutnya orientasikan Masalah 1.6 pada siswa untuk diamati dan dianalisis berbagai informasi yang diketahui dan yang ditanyakan. Minta siswa mencermati data pada Tabel 1.3 dan membangun pola pertambahan penduduk dari tahun ke tahun berikutya. Ajukan berbagai pertanyaan untuk menguji pemahaman siswa terhadap langkah-langkah pemecahan masalah.

Masalah-1.6

Di tahun 2013 jumlah penduduk Negara X adalah 100 juta orang. Bila pertambahan penduduk 1% per tahun, berapa jumlah penduduk negara itu pada akhir tahun 2017 dan tahun 2038? Pada tahun berapa jumlah penduduk negara itu menjadi dua kali lipat?

Diketahui:
Jumlah penduduk Negara X pada tahun 2013 adalah 100 juta jiwa.
Persentase pertambahan penduduk per tahun adalah 1%
Ditanya:
a) Jumlah penduduk pada tahun 2017 dan tahun 2038
b) Pada tahun berapa, jumlah penduduk menjadi dua kali lipat.

Alternatif Penyelesaian

Jumlah penduduk di awal (P_0) = 100 juta
Misalkan: P_t adalah jumlah penduduk pada tahun t
r adalah persentase pertambahan penduduk.

Tabel 1.3 Perhitungan jumlah penduduk Negara X untuk setiap tahun

Akhir Tahun	Pertambahan penduduk (1% × total penduduk) (juta)
2013	0
2014	1
2015	1,01
2016	1,0201
2017	1,030301
Total = Jumlah Penduduk awal + Pertambahan (juta)	**Pola Total Penduduk pada saat *t***
100	$100\ (1+0,01)^0$
101	$100\ (1+0,01)^1$
102,01	$100\ (1+0,01)^2$
103,0301	$100\ (1+0,01)^3$
104,060401	$100\ (1+0,01)^4$

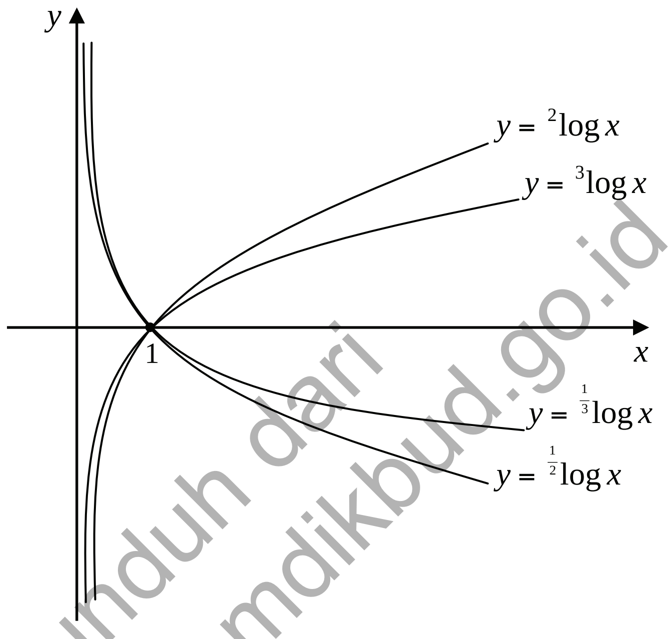
Dari tabel di atas, jelas kita lihat bahwa total penduduk pada akhir tahun 2017 adalah 104.060.401. Selanjutnya, kita akan menyelesaikan permasalahan di atas dengan menggunakan logaritma, setelah kita mengenal sifat-sifat logaritma.

Perhatikan Tabel 1.3 di atas, kita peroleh 104.060.401 = $100\ (1+0,01)^4$. Jika $4 = t$, maka persamaan tersebut menjadi $104.060.401 = 100\ (1+0,01)^t$. Hal ini dapat dikaitkan dengan bentuk eksponen yang sudah dipelajari sebelumnya, yaitu $a^c = b$, dengan memisalkan $a = (1 + 0,01)$, $b = 104.060.401$, dan $c = t$. Bagaimana cara menentukan nilai $c = t = 4$? Selanjutnya bagaimana menentukan jumlah penduduk pada akhir tahun 2038 dan tahun berapa jumlah penduduk Negara *X* menjadi dua kali lipat.

Meminta siswa melengkapi Tabel 1.3 di samping, untuk mencermati titik-titik yang dilalui grafik fungsi logaritma yang diberikan. Untuk menguatkan konsep siswa, minta siswa untuk mengamati dan mencoba menemukan sifat-sifat grafik fungsi logaritma. Misalnya grafik fungsi $f(x) = {}^2\log x$ *, x bilangan real,* $x > 0$*. Sifat grafik yang diharapkan ditemukan siswa, antara lain:*

1. *Grafik seluruhnya di atas sumbu-y.*
2. *Sumbu-x sebagai asimtot.*
3. *Memotong sumbu-y pada satu titik, saat* $x = 0$*.*
4. *Grafik tidak memotong sumbu-y, untuk y menuju 0.*
5. *Untuk nilai x semakin besar, maka nilai y semakin besar. Sebaliknya untuk nilai x semakin kecil, diperoleh nilai y semakin kecil.*
6. *Untuk x menuju ∞, diperoleh y menuju ∞. Untuk x menuju 0, diperoleh y menuju -∞.*

Selanjutnya cermati grafik fungsi $y = f(x) = {}^2\log x$, $f(x) = -{}^2\log x$, $f(x) = {}^3\log x$, dan $f(x) = -{}^3\log x$ yang disajikan berikut.



Gambar 1.2 Grafik Fungsi Logaritma

Perhatikan grafik fungsi di atas. Isilah tabel berikut.

Tabel 1.3 Perhitungan Nilai Fungsi Logaritma

	x								
	1/2	1/3	1/4	1	2	3	4	8	9
$f(x) = {}^2\log x$				0					
$f(x) = \infty$				0					
$f(x) = {}^3\log x$				0					
$f(x) = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$				0					

Coba temukan sifat-sifat grafik fungsi logaritma pada Gambar 1.2 di atas.

Contoh 1.12

Ajukan beberpa contoh keterkaitan bilangan berpangkat dengan logaritma, untuk mendalami Definisi 1.7. Ajukan berbagai pertanyaan untuk menguji pemahaman siswa.

1. Tulislah bentuk logaritma dari:
   a. $2^5 = 32$ maka ${}^2\log 32 = 5$
   b. $4^3 = 64$ maka ${}^4\log 64 = 3$
   c. $2^{-2} = \frac{1}{4}$ maka ${}^2\log \frac{1}{4} = -2$
2. Tulislah bentuk pangkat dari:
   a. ${}^{11}\log 121 = 2$ maka $11^2 = 121$
   b. ${}^3\log 81 = 4$ maka $3^4 = 81$
   c. $\log 1000 = 3$ maka $10^3 = 1000$
3. Hitunglah nilai logaritma berikut.
   a. ${}^2\log 2 = 1$ karena $2^1 = 2$
   b. ${}^2\log 1 = 0$ karena $2^0 = 1$
   c. ${}^2\log 128 = 7$ karena $2^7 = 128$

10. Sifat-sifat Logaritma

Ajak siswa menganalisis sifat-sifat logaritma dengan berbagai contoh dan pembuktian kebenaran sifat tersebut.

Dari Definisi 1.7, logaritma merupakan invers dari perpangkatan. Oleh karena itu terdapat 3 sifat dasar logaritma, yaitu:

Sifat-6. Sifat Dasar Logaritma

Misalkan a dan n bilangan real, $a > 0$ dan $a \neq 1$, maka
1. ${}^a\log a = 1$
2. ${}^a\log 1 = 0$
3. ${}^a\log a^n = n$

Contoh 1.13

1. ${}^a\log a = x \Leftrightarrow a^x = a$ sehingga $x = 1$ atau ${}^a\log a = 1$
2. ${}^a\log 1 = y \Leftrightarrow a^y = 1$. Karena $a^0 = 1$, maka $y = 0$
3. ${}^a\log a^n = z \Leftrightarrow a^x = a^n$ sehingga $z = n$ serta ${}^a\log a^n = n$

BEBERAPA SIFAT OPERASI LOGARITMA

Sifat-7

Untuk a, b, dan c bilangan real positif, $a \neq 1$, dan $b > 0$, berlaku ${}^a\log(b \times c) = {}^a\log b + {}^a\log c$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.7 maka diperoleh:

${}^a\log b = x \Leftrightarrow b = a^x$

${}^a\log c = y \Leftrightarrow c = a^y$

Dengan mengalikan b dengan c, maka:

$b \times c = a^x \times a^y \Leftrightarrow b \times c = a^{x+y}$

$\Leftrightarrow {}^a\log(b \times c) = x + y$

Substitusi x dan y

$\Leftrightarrow {}^a\log(b \times c) = {}^a\log b + {}^a\log c$

(terbukti)

Sifat-8

Untuk a, b, dan c bilangan real dengan $a > 0$, $a \neq 1$, dan $b > 0$, berlaku ${}^a\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^a\log b - {}^a\log c$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.7, diperoleh:

${}^a\log b = x \Leftrightarrow b = a^x$

${}^a\log c = y \Leftrightarrow c = a^y$

Dengan membagi b dengan c, maka diperoleh

$\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = a^{x-y}$

$\Leftrightarrow {}^a\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^a\log a^{x-y}$

$\Leftrightarrow {}^a\log\left(\frac{b}{c}\right) = x - y$ Substitusi nilai x dan y

$\Leftrightarrow {}^a\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^a\log b - {}^a\log c$ (terbukti)

Sifat-9

Untuk a, b bilangan real dan n bilangan asli, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, berlaku ${}^a\log b^n = n\,{}^a\log b$

Bukti:

$${}^a\log b^n = {}^a\log\left(\underbrace{b \times b \times b \times \ldots \times b}_{n\ faktor}\right) \qquad \text{ingat,}$$

$$a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m\ faktor}$$

$$\Leftrightarrow\ {}^a\log b^n = \underbrace{{}^a\log b + {}^a\log b + \ldots + {}^a\log b}_{n\ faktor} \qquad \text{ingat, Sifat-8}$$

$$\Leftrightarrow\ {}^a\log b^n = n\,{}^a\log b \quad \text{(terbukti)}$$

Sifat-10

Untuk a, b, dan c bilangan real positif, $a \neq 1$, $b \neq 1$, dan $c \neq 1$, berlaku ${}^a\log b = \dfrac{{}^c\log b}{{}^c\log a} = \dfrac{1}{{}^b\log a}$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.7, diperoleh:

${}^a\log b = x \Leftrightarrow b = a^x$

Ambil sembarang c bilangan real, c > 0, dan $c \neq 1$ sedemikian sehingga:

$${}^c\log b = {}^c\log a^x \ \Leftrightarrow\ {}^c\log b = x\,{}^c\log a \qquad \text{ingat, Sifat-9}$$

$$\Leftrightarrow\ x = \frac{{}^c\log b}{{}^c\log a} \qquad \text{substitusi nilai } x$$

$$\Leftrightarrow\ {}^a\log b = \frac{{}^c\log b}{{}^c\log a} \quad \text{(terbukti)}$$

Karena c bilangan real dan $c \neq 1$ sembarang dengan ketentuan di atas dapat dipenuhi $c = b$ sehingga diperoleh

$$\Leftrightarrow \quad {}^{a}\log b = \frac{{}^{b}\log b}{{}^{b}\log a} \quad \text{ingat, Sifat pokok 2}$$

$$\Leftrightarrow \quad = \frac{1}{{}^{b}\log a} \quad \text{(terbukti)}$$

Sifat-11

Untuk a, b, dan c bilangan real positif dengan $a \neq 1$ dan $b \neq 1$, berlaku

$${}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log c$$

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.7 maka diperoleh:

$${}^{a}\log b = x \Leftrightarrow b = a^{x}$$

$${}^{b}\log c = y \Leftrightarrow c = b^{y}$$

$${}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log a^{x} \times {}^{b}\log b^{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log b \times {}^{b}\log b^{y} \quad \text{ingat, } c = b^{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = y\ {}^{a}\log b \times {}^{b}\log b \quad \text{ingat, Sifat pokok 2}$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = y\ {}^{a}\log b \quad \text{ingat, Sifat 6}$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log b^{y} \quad \text{ingat, } c = b^{y}$$

$$\Leftrightarrow \quad {}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log c \quad \text{(terbukti)}$$

Sifat-12

Untuk a dan b bilangan real positif dengan $a \neq 1$, berlaku ${}^{a^m}\log b^n = \frac{n}{m}({}^{a}\log b)$, dengan m, n bilangan rasional dan $m \neq 0$.

Bukti: (Silahkan coba sendiri)

Sifat-13

Untuk a bilangan real positif $a \neq 1$, berlaku

$$a^{{}^{a}\log b} = b$$

Bukti: (coba sendiri)

Misalkan a, b bilangan real dengan $a > 0$, $a \neq 1$, dan $b > 0$.

Misalkan $(a)^{{}^{a}\log b} = x$

Ajak siswa membuktikan Sifat-12 di samping. Alternatif jawaban yang diharapkan dari siswa adalah

Misalkan a, b bilangan real dengan $a > 0$, $a \neq 1$, dan $b > 0$.

Ambil sebarang m, n bilangan rasional dan $m \neq 0$.

$${}^{a^m}\log b^n = \frac{\log b^n}{\log a^m}$$

Berdasarkan Sifat-9 dan Sifat-10) diperoleh

$$= \frac{n \log b}{m \log a}$$

$$= \frac{n}{m}\left(\frac{\log b}{\log a}\right)$$

$$= \frac{n}{m}\left({}^{a}\log b\right)$$

(terbukti)

Selanjutnya bukti Sifat-13 disajikan langsung di samping.

$(a)^{^a\log b} = x \Rightarrow {}^a\log x = {}^a\log b$ (Sifat pokok logaritma)

$\Rightarrow x = b$

Dengan demikian $a^{^a\log b} = b$ (terbukti)

Logaritma saling *invers* dengan eksponen. Misalkan ${}^a\log b = c$. Kita subtitusikan ${}^a\log b = c$ ke $a^c = (a)^{^a\log b}$, sehingga diperoleh $a^c = b$

Untuk mendalami sifat-sifat di atas, perhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh 1.14

Mari kita tinjau kembali **Masalah-1.5**. Kita akan menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan konsep logaritma. Cermatilah kembali **Tabel 1.2**. Kita dapat menyatakan hubungan total jumlah uang untuk t tahun sebagai berikut:

$M_t = M_0 (1+i)^t$

dimana M_t : total jumlah uang diakhir tahun t

t : periode waktu

i : bunga uang

Dengan menggunakan notasi di atas, maka soal tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

Diketahui : $M_0 = 1.000.000$, $M_t = 1.464.100$, $i = 0,1$

Ditanya : t

Alternatif Penyelesaian

$$1.464.100 = 1.000.000\,(1+0,1)^t$$

$$\Leftrightarrow \log 1.464.100 = \log [1.000.000\,(1,1)^t]$$

$$\Leftrightarrow \log 1.464.100 = \log 1.000.000 + \log (1,1)^t$$

$$\Leftrightarrow \log 1.464.100 - \log 1.000.000 = t \log 1,1$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{1.464.100}{1.000.000} = t \log 1,1$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{14.641}{10.000} = t \log 1,1$$

$$\Leftrightarrow \log \left(\frac{11}{10}\right)^4 = t \log 1,1$$

Ingatkan kembali siswa bahwa eksponen dan logaritma adalah dua operasi yang saling berbalikan (saling invers).

Selanjutnya jelaskan penyelesaian Masalah 1.5 yang belum tuntas sebelumnya, dan akan dibahas dalam Contoh 1.14 di samping. Dalam penyelesaian soal Contoh 1.14, kita menggunakan sifat eksponen dan logaritma yang sudah dipelajari sebelumnya.

Jelaskan Contoh 1.15 dan Contoh 1.16 kepada siswa, lebih memahami konsep dan sifat logaritma dalam berbagai siatuasi soal. Beri kesempatan kepada siswa menanyakan hal-hal yang belum dipahami pada langkah-langkah penyelesaian soal.

$\Leftrightarrow \quad 4 \log (1{,}1) = t \log 1{,}1$

$\Rightarrow \quad t = 4$

Jadi, Yusuf harus menabung selama 4 tahun agar mendapatkan uang sebesar Rp1.464.100,00.

Contoh 1.15

Misalkan $\log^2 a$ adalah notasi untuk $(\log a)^2$. Tentukan nilai a yang memenuhi
$\log^2 a + \log a = 6$!

Alternatif Penyelesaian

Misalkan $P = \log a$

$$\begin{aligned}
\log^2 a + \log a = 6 &\Leftrightarrow (\log a)^2 + (\log a) = 6\\
&\Leftrightarrow P^2 + P - 6 = 0\\
&\Leftrightarrow (P + 3)(P - 2) = 0\\
&\Leftrightarrow P = -3 \text{ atau } P = 2\\
&\Leftrightarrow \log a = -3 \text{ atau } \log a = 2\\
&\Leftrightarrow a = 10^{-3} \text{ atau } a = 10^2
\end{aligned}$$

Jadi, nilai a yang memenuhi persamaan di atas adalah $a = 0{,}001$ atau $a = 100$.

Contoh 1.16

Nyatakan b dalam a supaya berlaku ${}^a\log b - 2\,{}^b\log a = 1$.

Alternatif Penyelesaian

${}^a\log b - 2\,{}^b\log a = 1$

Ingat, ${}^b\log a = \dfrac{1}{{}^a\log b}$

$\Leftrightarrow \quad {}^a\log b - \dfrac{2}{{}^a\log b} - 1 = 0$

Misalkan: $P = {}^a\log b$

$\Leftrightarrow \quad P - \dfrac{2}{P} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $P^2 - P - 2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(P + 1)(P - 2) = 0$

$\Leftrightarrow$ $P = -1$ atau $P = 2$

$\Leftrightarrow$ ${}^a\log b = -1$ atau ${}^a\log b = 2$

Sekarang akan kita nyatakan b dalam a, yaitu,

$${}^a\log b = -1 \Leftrightarrow a^{{}^a\log b} = a^{-1} \text{ atau } {}^a\log b = 2$$

$$\Leftrightarrow a^{{}^a\log b} = a^2$$

$$\Leftrightarrow b = a^{-1}$$

$$\Leftrightarrow b = a^2$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{1}{a}$$

Jadi, $b = \frac{1}{a}$ atau $b = a^2$.

Uji Kompetensi 1.3

Ajak siswa untuk mencoba menyelesaikan berbagai soal-soal yang terdapat pada Uji Kompetensi 1.3 di samping. Soal-soal uji kompetensi ini bertujuan untuk mengetahui apakah siswa memahami tentang konsep logaritma. Soal-soal ini juga dapat diberikan sebagai tugas di rumah.

1. Tuliskan dalam bentuk logaritma dari:

   a. $5^3 = 125$ c. $4^3 = 64$

   b. $10^2 = 100$ d. $6^1 = 6$

2. Tuliskan dalam bentuk pangkat dari:

   a. $\log 0{,}01 = -2$

   b. ${}^{0,5}\log 0{,}0625 = 4$

   c. ${}^2\log \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$

   d. ${}^3\log \frac{1}{9} = -2$

3. Hitunglah nilai setiap bentuk:

   a. $\log 10^4$ d. ${}^2\log 0{,}25$

   b. ${}^5\log 125$ e. ${}^4\log 4^{10}$

   c. ${}^3\log \frac{1}{27}$ f. ${}^5\log 1$

4. Diketahui log 2 = 0,3010; log 3 = 0,4771 dan log 7 = 0,8451 tentukan:
   a. log 18 c. log 10,5
   b. log 21 d. $\log \frac{1}{7}$

5. Sederhanakan
   a. $\frac{2}{3} \times {}^{2}\log 64 - \frac{1}{2} \times {}^{2}\log 16$
   b. ${}^{a}\log 2x + 3\left({}^{a}\log x - {}^{a}\log y\right)$
   c. ${}^{a}\log \frac{a}{\sqrt{x}} - {}^{a}\log \sqrt{ax}$
   d. $\log \sqrt{a} + \log \sqrt{b} - \frac{1}{2}\log ab$

6. Jika ${}^{2}\log 3 = a$ dan ${}^{3}\log 5 = b$, nyatakan bentuk berikut dalam a dan b!
   a. ${}^{2}\log 15$ d. ${}^{2}\log 5$
   b. ${}^{4}\log 75$ e. ${}^{30}\log 150$
   c. ${}^{25}\log 36$ f. ${}^{100}\log 50$

7. Jika $b = a^4$, a dan b bilangan real positif, $a \neq 1$, $b \neq 1$ tentukan nilai ${}^{a}\log b - {}^{b}\log a$!

8. Jika ${}^{a}\log b = 4$, ${}^{c}\log b = 4$ dan a, b, c bilangan positif, $a, c \neq 1$, tentukan nilai $\left[{}^{a}\log (bc)^4\right]^{\frac{1}{2}}$!

9. Buktikan log 1 = 0 dan log 10=1!

10. Buktikan bahwa untuk $a > b > 0$, ${}^{a}\log b < 0$ dan sebaliknya untuk $0 < a < b$, ${}^{a}\log b > 0$!

11. $\log^2 a$ adalah notasi untuk $(\log a)^2$. Berapakah nilai a yang memenuhi $2 \times \log^2 a + \log a = 6$?

12. Nyatakan p dalam q supaya berlaku ${}^{p}\log q - 6\ {}^{q}\log p = 1$!

13. ${}^{2}\log^2 a$ adalah notasi untuk $({}^{2}\log a)^2$. Jika a adalah bilangan bulat positif, maka berapakah nilai a yang meme-nuhi ${}^{2}\log^2 (a^2 - 3a) + {}^{2}\log (a^2 - 6a)^2 = 8$.

14. Untuk $a > 0$, $a \neq 1$, nyatakan b dalam a yang memenuhi persamaan
$^{a}\log^{2}\,(b^{a} + a) - {}^{a}\log\,(b^{a} + a)^{3} + 2 = 0$

15. Pada awal tahun, Rony menabung uang di bank sebesar Rp125.000,00. Ia menyimpan uang tersebut selama 8 tahun. Berapa jumlah uang Rony pada akhir tahun ke delapan jika bank memberi suku bunga majemuk 6% setahun?

16. Pak Thomas menabung Rp. 2.000.000,00 selama 5 tahun dengan bunga 12% per tahun. Jika perhitungan bunga tiga bulanan, berapakah besar bunga yang diterima Pak Thomas?

17. Tentukan skala *decibel* suara berikut.
    a. Percakapan normal yang memiliki intensitas $3{,}2 \times 10^{-6}$ Watt per meter kuadrat.
    b. Pesawat jet yang baru lepas landas yang memiliki intensitas $8{,}3 \times 10^{2}$ Watt per meter kuadrat.

18. Gemuruh suara Air terjun Niagara memiliki skala *decibel* 90. Tentukan intensitas bunyi dari air terjun tersebut. Apakah intensitas tersebut masih aman untuk telinga manusia?

SOAL TANTANGAN

19. Jika $^{4}\log a = p$ dan $^{8}\log b = q$ maka tentukanlah

$$\sqrt{a^{5}\sqrt[3]{b\sqrt{a^{5}\sqrt[3]{b\sqrt{a^{5}\sqrt[3]{b\sqrt{\ldots}}}}}}}$$ dalam p dan q.

Berikan tugas projek di samping untuk dikerjakan secara berkelompok. Gunakan rubrik penilaian projek yang tersedia di akhir buku ini.

Projek

Skala logaritma dipergunakan untuk banyak keperluan selain menyatakan intensitas bunyi. Cari informasi tentang besaran lain yang menggunakan skala logaritma. Untuk membedakan analisis menggunakan logaritma bahkan digambarkan grafik dalam skala logaritma. Cari informasi ada berapa macam skala logaritma biasa dipergunakan dan beri contoh penelitian penggunaan skala logaritma. Buat laporan hasil pengamatan dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Arahkan siswa membuat rangkuman dari berbagai hal yang sudah dipelajari. Penutup di samping berisi tentang kumpulan informasi-informasi penting yang telah dipelajari

Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep dan sifat eksponen dan logaritma di atas, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut.

1. Konsep eksponen dan logaritma dapat ditemukan kembali dari berbagai pemecahan masalah nyata di sekitar kehidupan kita.
2. Operasi eksponen adalah perluasan dari operasi perpangkatan yang sudah dipelajari di Sekolah Dasar dan SMP. Operasi perpangkatan pasti merupakan eksponen. Pada operasi perpangkatan, kita menggunakan bilangan bulat, tetapi pada eksponen tergantung variabel bilangan real sebagai eksponen dari basisnya. Misalnya $p^x = q$, x sebagai eksponen dari p, dimana x rasional dan p bilangan real, tetapi $2^3 = 8$, 3 adalah sebuah bilangan pangkat dari 2.
3. Sifat-sifat perpangkatan dapat digunakan untuk menurunkan sifat-sifat penarikan akar.
4. Jika grafik fungsi eksponen dicerminkan terhadap sumbu $y = x$, maka diperoleh grafik fungsi logaritma.

5. Penguasaan berbagai konsep dan sifat-sifat eksponen dan logaritma adalah prasyarat untuk mempelajari fungsi eksponen dan fungsi logaritma. Secara mendalam, berbagai sifat-sifat dari fungsi eksponen dan logaritma serta penerapannya akan dibahas dipokok bahasan peminatan.

Pada Bahasan 2 (Bab 2), kita akan mempelajari persamaan dan pertidaksamaan linier yang melibatkan variabel berpangkat satu. Sama halnya dengan penemuan kembali konsep eksponen dan logaritma melalui pemecahan masalah nyata, akan kita temukan konsep dan sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan linier dari berbagai situasi nyata kehidupan disekitar kita. Penguasaan kamu pada materi eksponen dan logaritma akan berguna untuk mempelajari materi pada bab berikutnya. Perlu kami tekankan bahwa mempelajari materi matematika mulai bahasan 1 sampai 12, harus dipelajari secara terurut, jangan melompat-lompat, sebab sangat dimungkinkan penguasaan materi pada bahasan berikutnya didasari penguasaan materi pada bahasan sebelumnya.

Catatan:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Bab 2

Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

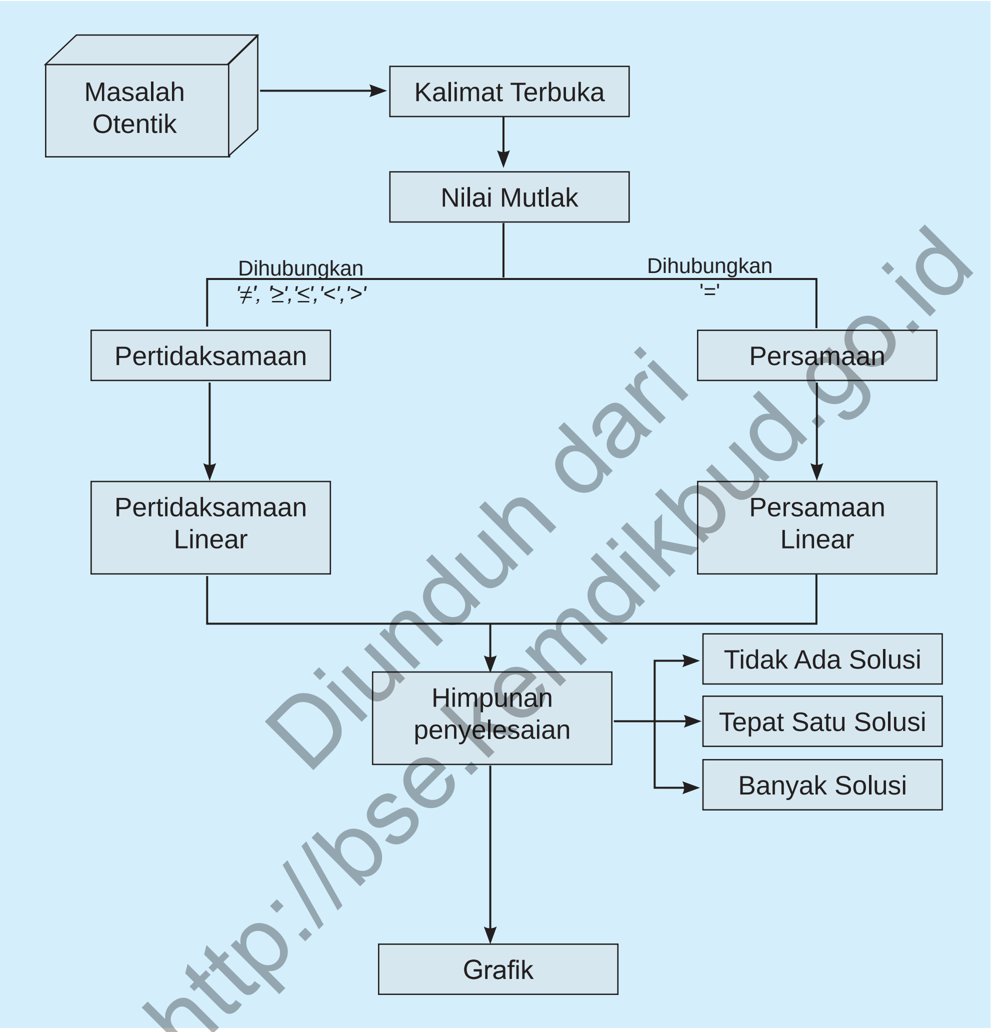
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran persamaan dan pertidaksamaan linear, siswa mampu: 1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya. 2. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 3. Mampu mentransformasi diri dalam berperilaku jujur, tangguh, menghadapi masalah, kritis, dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika. 4. Mendeskripsikan dan menganalisis konsep nilai mutlak dalam persamaan dan pertidaksamaan serta menerapkannya dalam pemecahan masalah nyata. 5. Menerapkan konsep nilai mutlak dalam persamaan dan pertidaksamaan linier dalam memecahkan masalah nyata. 6. Membuat model matematika berupa persamaan dan pertidaksamaan linear dua variabel yang melibatkan nilai mutlak dari situasi nyata dan matematika, serta menentukan jawab dan menganalisis model sekaligus jawabnya.	Melalui pembelajaran materi persamaan dan pertidaksamaan linear, siswa memperoleh pengalaman belajar: • menghadapi permasalahan yang aktual terkait nilai – nilai mutlak • menghadapi permasalahan pada kasus persamaan dan pertidaksamaan linear di kehidupan sehari-hari. • berpikir kreatif dalam membangun konsep dan sifat permasalahan persamaan dan pertidaksamaan linear dan menerapkannya dalam kehidupan nyata • membangun model matematika permasalahan nyata terkait dengan persamaan dan pertidaksamaan linear nilai mutlak. • berpikir kritis dalam mengamati permasalahan. • mengajak untuk melakukan penelitian dasar dalam membangun konsep persamaan dan pertidaksamaan linear nilai mutlak dan menerapkannya dalam kehidupan sehari – hari. • mengajak kerjasama tim dalam menemukan solusi suatu permasalahan.

Istilah Penting

- *Persamaan linear*
- *Pertidaksamaan linear*
- *Lebih dari*
- *Kurang dari*
- *Nilai mutlak*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Pada bab ini, kita akan mempelajari persamaan dan pertidaksamaan linear yang berkaitan dengan nilai mutlak. Kamu harus mengingat kembali pelajaran tentang persamaan linear dan pertidaksamaan linear yang telah kamu pelajari di kelas VIII. Jadi, pertama kali, kita akan mempelajari konsep nilai mutlak, persamaan linear, pertidaksamaan linear dan kemudian kita akan melibatkan nilai mutlak dalam persamaan dan pertidaksamaan linear tersebut. Nah, kamu perhatikan dan amati ilustrasi dan masalah berikut.

Motivasi siswa mempelajari persamaan dan pertidaksamaan linear dengan menunjukkan berbagai kasus nyata dalam kehidupan sehari-hari. Ingatkan siswa bahwa materi ini melibatkan nilai mutlak. Orientasi siswa pada situasi nyata untuk membangun inspirasi penemuan konsep nilai mutlak. Motivasi siswa melalui pemaparan manfaat mempelajari persamaan dan pertidaksamaan linear. Beri kesempatan pada siswa bertanya dan me–ngajukan ide-ide secara bebas dan terbuka.

1. Memahami dan Menemukan Konsep Nilai Mutlak

Gambar 2.1 Anak Pramuka

Ilustrasi:
Kegiatan pramuka adalah salah satu kegiatan ekstrakurikuler yang diadakan di sebuah sekolah. Sebuah grup pramuka sedang belajar baris berbaris di lapangan sekolah pada hari Sabtu. Sebuah perintah dari pimpinan pasukan: “Maju 4 langkah, jalan!”, hal ini berarti jarak pergerakan barisan adalah 4 langkah ke depan. Jika perintah pimpinan pasukan: “Mundur 3 langkah, jalan!”, hal ini berarti bahwa pasukan akan bergerak melawan arah sejauh 3 langkah. Demikian seterusnya.

Besar pergerakan langkah pasukan tersebut merupakan nilai mutlak, tidak ditentukan arah. “Maju 4 langkah”, berarti mutlak 4 langkah dari posisi diam dan “mundur 3 langkah, berarti mutlak 3 langkah dari posisi diam. Dalam hal ini, yang dilihat adalah nilainya, bukan arahnya. Lebih jelasnya, mari bersama-sama mempelajari kasus-kasus di bawah ini.

Beri kesempatan kepada siswa untuk memahami ilustrasi berikut. Uji pemahaman siswa dengan memperagakan ilustrasi tersebut. Beri kesempatan pada siswa berdiskusi dalam kelompok belajar tentang nilai mutlak pada ilustrasi sehingga mereka menemukan sendiri konsep nilai mutlak. Arahkan siswa mempresentasikan hasil pemahaman mereka. Arahkan siswa untuk saling menghargai pendapat.

Arahkan siswa untuk memahami masalah berikut, kemudian berikan kesempatan kepada mereka untuk menghubungkan masalah ini dengan masalah ilustrasi di atas. Masalah ini telah dilengkapi penyelesaian, maka arahkan siswa untuk memberi pendapat masing-masing.

Masalah-2.1

Seorang anak bermain lompat-lompatan di lapangan. Dari posisi diam, si anak melompat ke depan 2 langkah, kemudian 3 langkah ke belakang, dilanjutkan 2 langkah ke depan, kemudian 1 langkah ke belakang, dan akhirnya 1 langkah lagi ke belakang.

Permasalahan:

a. Dapatkah kamu membuat sketsa lompatan anak tersebut?

b. Tentukanlah berapa langkah posisi akhir anak tersebut dari posisi semula!

c. Tentukanlah berapa langkah yang dijalani anak tersebut!

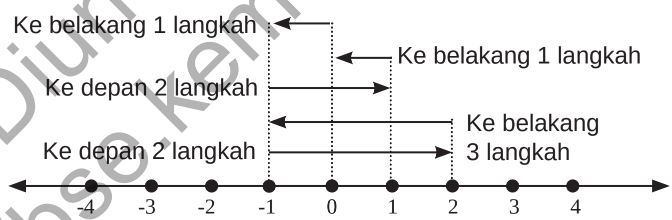
Beri kesempatan kepada siswa untuk membuat sketsa yang lain (jika ada) dan menjelaskannya di depan kelas. Arahkan siswa untuk saling menghargai pendapat.

Beri penghargaan (pujian) kepada siswa yang berani menyampaikan pendapatnya. Dorong siswa untuk berani berkomentar. Ingat, siswa jangan disalahkan tetapi pendapatnya diluruskan bila ada pendapat yang kurang cocok terhadap permasalahan.

Alternatif Penyelesaian

Kita mendefinisikan lompatan ke depan adalah searah dengan sumbu x positif, sebaliknya lompatan ke belakang adalah searah dengan sumbu x negatif.

Perhatikan sketsa berikut:



Gambar 2.2 Sketsa lompatan

Dari gambar di atas, kita misalkan bahwa $x = 0$ adalah posisi awal si anak. Anak panah yang pertama di atas garis bilangan menunjukkan langkah pertama si anak sejauh 2 langkah ke depan (mengarah ke sumbu x positif atau +2), anak panah kedua menunjukkan 3 langkah si anak ke belakang (mengarah ke sumbu x negatif atau -3) dari posisi akhir langkah pertama, demikianlah seterusnya sampai akhirnya si anak berhenti pada langkah ke 5.

Jadi, kita dapat melihat pergerakan akhir si anak dari posisi awal adalah 1 langkah saja ke belakang ($x = (+2) + (-3) + (+2) + (-1) + (-1) = -1$). Banyak langkah yang dijalani si anak merupakan konsep nilai mutlak, karena kita hanya menghitung banyak langkah, bukan arahnya. Banyak langkah selalu dinyatakan dengan bilangan bulat positif walaupun arahnya ke arah sumbu x negatif. Banyak langkah dapat dinyatakan dengan nilai mutlak dari sebuah bilangan bulat. Misalnya mundur 3 langkah dinyatakan dengan nilai mutlak negatif 3 (atau $|-3|$), sehingga banyak langkah anak tersebut adalah $|2| + |-3| + |2| + |-1| + |-1| = 9$ (9 langkah).

Perhatikan Tabel 2.1 berikut.

Beri kesempatan kepada siswa untuk mengamati tabel disamping. Minta siswa untuk menyampaikan pendapatnya. Beri pertanyaan kepada siswa, bagaimana dengan nilai mutlak pada nilai desimal, pecahan?

Tabel 2.1 Nilai Mutlak

Nilai	Nilai Mutlak
5	5
3	3
2	2
0	0
–2	2
–3	3
–4	4
–5	5

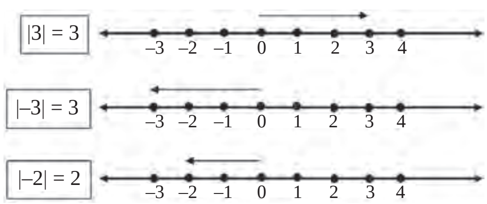
Dari ilustrasi dan tabel di atas, dapatkah kamu menarik sebuah kesimpulan tentang pengertian nilai? Jika x adalah variabel pengganti semua bilangan real, dapatkah kamu menentukan nilai mutlak x tersebut?

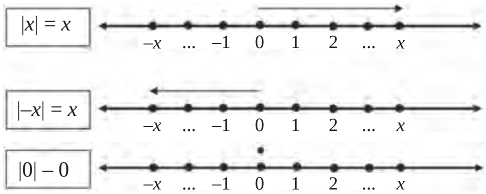
Perhatikan, x bilangan real, dituliskan dengan $x \in R$.

Dari contoh pada tabel tersebut, kita melihat bahwa nilai mutlak akan bernilai positif atau nol (nonnegatif). *Nilai mutlak adalah jarak antara bilangan itu dengan nol pada garis bilangan real*. Perhatikan garis bilangan berikut! Kita melakukan beberapa percobaan perpindahan posisi pada garis bilangan sebagai berikut.

Pandu kembali siswa untuk menemukan konsep nilai mutlak dengan mengamati percobaan pada garis bilangan di samping.

Buat satu persoalan nilai mutlak yang baru, kemudian minta siswa untuk menggambarkannya pada garis bilangan serta minta dia untuk menjelaskan pendapatnya terhadap kinerjanya sendiri. Jawaban yang kurang cocok, harus diperbaiki oleh guru.





Gambar 2.3 Selang Nilai Mutlak

Berdasarkan masalah – masalah di atas, dapat kita definisikan konsep nilai mutlak, sebagai berikut.

Definisi 2.1

Misalkan x bilangan real, nilai mutlak x, dituliskan $|x|$, didefinisikan $|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$

Berikut ini, kita akan mencoba menggambar grafik $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$.

Perhatikan beberapa titik yang mewakili grafik fungsi di atas.

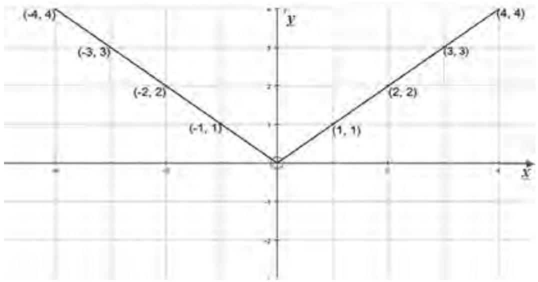
Tabel 2.2 Beberapa Pasangan Koordinat Titik pada gafik $f(x) = |x|$

x	...	–4	–2	–1	0
$y = f(x)$	...	4	2	1	0
(x,y)	...	(–4,4)	(–2,2)	(–1,1)	(0,0)
x	1	2	4	5	...
$y = f(x)$	1	2	4	5	...
(x,y)	(1,1)	(2,2)	(4,4)	(5,5)	...

Titik-titik yang kita peroleh pada tabel ini, disajikan dalam koordinat kartesius sebagai berikut.

Beri kesempatan kepada siswa untuk menarik kesimpulan nilai mutlak . Minta menarik kesimpulan tentang nilai mutlak. Arahkan siswa menghubungkan kesimpulan yang mereka tarik ke Definisi 2.1. Minta siswa untuk membuat contoh baru sesuai dengan definisi.

Arahkan siswa untuk belajar menggambar grafik fungsi mutlak, yaitu dengan melengkapi Tabel 2.2 berdasarkan pemahaman sebelumnya. Minta siswa untuk meletakkan setiap koordinat titik yang di peroleh ke bidang koordinat kartesius. Ingatkan siswa cara meletakkan pasangan titik (x,y) pada bidang koordinat, kemudian beri kesempatan kepada mereka



Gambar 2.4: Grafik $y = f(x)=|x|$

Berdasarkan definisi dan gambar grafik di atas dapat kita simpulkan bahwa nilai $|x|$ pada dasarnya menyatakan besar simpangan dari titik $x = 0$.

Contoh 2.1

Gambarkan grafik $f(x) = |x-2|$ dengan memanfaatkan Definisi 2.1.

Alternatif Penyelesaian

Mari amati langkah– langkah berikut.

Langkah 1.

Buatlah tabel untuk menunjukkan pasangan beberapa titik yang mewakili grafik tersebut. Tentukan pertama kali nilai x yang membuat nilai fungsi tersebut nol. Tentu $x = 2$, bukan? Jadi, koordinat awal kita adalah (2,0)

Tabel 2.3 Beberapa pasangan koordinat pada grafik $f(x) = |x-2|$

x	...	-4	-3	-2	-1	0
y	...	...	5	...	...	2
(x,y)	...	...	(-3,5)	...	...	(0,2)
x	1	2	3	4	...	
y	...	0	...	2	...	
(x,y)	...	(2,0)	...	(4,2)	...	

untuk meletakkan pasangan titik pada Tabel 2.2 di atas ke bidang sumbu koordinat kartesius. Minta mereka menghubungkan setiap titik yang telah diletakkan.

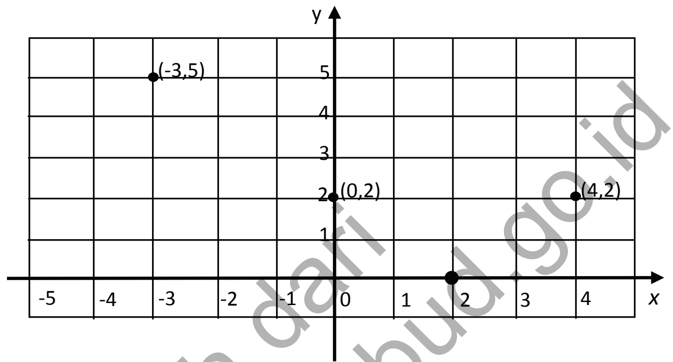
Motivasi siswa secara internal melalui menunjukkan kebergunaan mempelajari nilai mutlak dalam kehidupan sehari-hari. Ajukan contoh berikut untuk lebih mendalami materi. Beri kesempatan pada siswa menganalisis masalah dan makna nilai mutlak dari berbagai kemungkinan nilai bilangan riel.

Minta siswa melengkapi tabel yang ada pada buku siswa seperti yang tertera pada tabel di bawah ini. Selanjutnya minta siswa menggambarkan grafik fungsi $f(x) = |x-2|$, dengan langkah – langkah berikut. Contoh ini telah diselesaikan.

Lengkapilah tabel di atas dan kamu akan menemukan beberapa koordinat titik yang memenuhi fungsi $f(x) = |x-2|$ tersebut!

Minta siswa untuk kembali meletakkan pasangan titik pada Tabel 2.3 ke bidang koordinat.

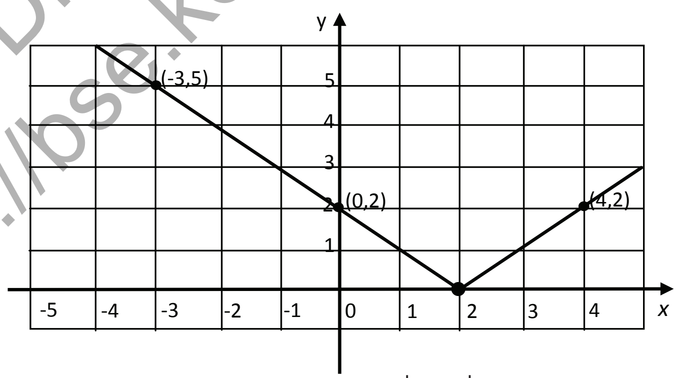
Langkah 2.
Letakkanlah titik – titik yang kamu peroleh pada tabel di atas koordinat kartesius.



Gambar 2.5: Titik pada kurva *f* (*x*) = |*x* – 2|

Minta siswa untuk menghubungan titik – titik tersebut sehingga terbentuk kurva garis seperti di samping. Arahkan siswa untuk mengamti grafik tersebut dan memberikan pendapatnya. Bantu siswa untuk menganalisis kurva fungsi mutlak di samping.

Langkah 3.
Buatlah garis lurus yang menghubungkan titik – titik yang sudah kamu letakkan di bidang koordinat tersebut sesuai dengan urutan nilai *x*. Kamu akan mendapat grafik seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.6: Grafik *f* (*x*) = |*x* – 2|

Latihan 2.1

Perhatikan grafik $f(x)=|x-2|$ pada Gambar 2.6. Lihatlah penyimpangan grafik terhadap sumbu *x*. Nilai dari fungsi tersebut adalah besar penyimpangan kurva terhadap sumbu x.

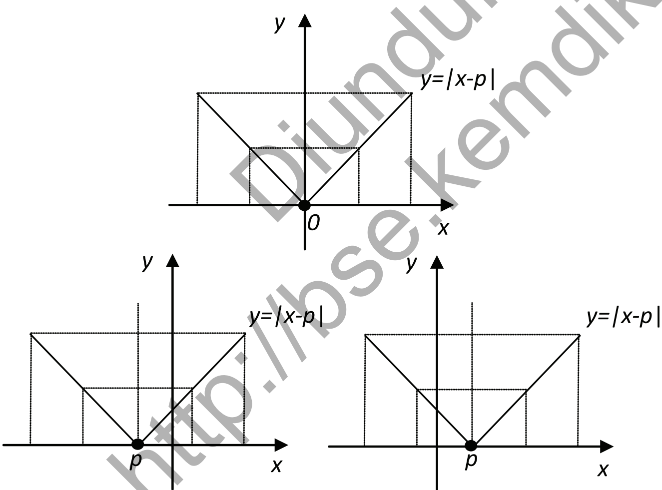
Bagaimana penyimpangan grafik $f(x)=|x-p|$ terhadap sumbu *x*, untuk *p* bilangan real?

Minta siswa memahami Contoh 2.1 dan mengerjakan Latihan 2.1 serta menarik kesimpulan secara umum dari analisis grafik $f(x)=|x-p|$ (Latihan 2.1 telah di selesaikan)

Alternatif Penyelesaian

$$f(x)=|x-p|=\begin{cases} x-p & \text{jika } x \geq p \\ -x+p & \text{jika } x < p \end{cases}$$

Karena *p* adalah bilangan real sembarang, maka ambil *p* < 0, *p* = 0, *p* > 0 sehingga sketsa grafik yang diperoleh adalah:



Berdasarkan gambar, nilai dari fungsi tersebut adalah besar penyimpangan kurva terhadap sumbu *x*.

Untuk memperdalam pemahaman, arahkan siswa untuk melengkapi Tabel 2.4, kemudian bantu mereka untuk menganalisis nilai antara $|x|$ dengan $\sqrt{x^2}$

Berikutnya, mari kita amati hubungan antara $|x|$ dengan $\sqrt{x^2}$? Mari kita lakukan percobaan sederhana dengan mengamati nilai kedua fungsi tersebut. Untuk memudahkan pengamatan, kita sajikan data – data pada tabel berikut.

Tabel 2.4 Hubungan |x| dan $\sqrt{x^2}$

x	–3	–2	–1	0
x^2	9	4	1	0
$\|x\|$	3	2	1	0
$\sqrt{x^2}$	3	2	1	0
x	1	2	3	4
x2	1	4	9	16
$\|x\|$	1	2	3	4
$\sqrt{x^2}$	1	2	3	4

Pastikan siswa sudah memahami hubungan antara $|x|$ dengan $\sqrt{x^2}$. Minta siswa untuk membuat nilai yang lain.

Apakah hasil pengamatanmu? Tentu saja, kamu dapat melihat bahwa nilai kedua fungsi sama, bukan? Dengan demikian, kamu mendapatkan hubungan kedua fungsi : yaitu $|x| = \sqrt{x^2}$.

Arahkan siswa untuk mengerjakan Latihan 2.2, kemudian beri kesempatan kepada siswa untuk mempresentasikan hasil kerjanya. Minta siswa untuk menemukan syarat nilai a dan b pada soal disamping. Latihan 2.2 telah diselesaikan sebagai alternatif penyelesaian.

Latihan 2.2

Dari Definisi nilai mutlak yang kita pelajari, maka

$$|ax+b| = \begin{cases} ax+b & jika \quad x \geq -\dfrac{b}{a} \\ -ax-b & jika \quad x < -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Dengan *a*, *b* bilangan real dan *a* tidak nol

2. Persamaan Linear

Setelah kita mempelajari konsep nilai mutlak, kita akan mempelajari konsep persamaan linear. Berikut beberapa masalah yang dapat memberi pemahaman persamaan linear satu atau dua peubah. Cermatilah masalah berikut!

Ingatkan kembali siswa tentang pelajaran persamaan linear di kelas VIII. Minta siswa untuk mencari kasus – kasus dalam kehidupan sehari – hari yang melibatkan persamaan linear.

Masalah-2.2

Andi dalam tiga hari berturut-turut membelanjakan uangnya untuk membeli keperluan sekolah. Pada hari Minggu dia menghabiskan $\frac{1}{2}$ dari uang yang dimilikinya. Pada hari Senin, dia membelanjakan uangnya Rp4.000,00 lebih sedikit dari uang yang dia belanjakan hari Minggu. Sementara uang yang dibelanjakan pada hari Selasa hanya $\frac{1}{3}$ dari belanja hari Senin. Sekarang dia masih memiliki uang sisa belanja sebanyak Rp1.000,00.

Dapatkah kamu membuat model dari permasalahan tersebut? Buatlah model matematika dari masalah tersebut! Tentukan uang Andi sebelum dibelanjakan?

Orientasi siswa pada Masalah-2.2 berikut. Arahkan siswa belajar dalam kelompok! Beri bantuan bagi siswa atau kelompok yang mengalami masalah. Beri kesempatan pada siswa bertanya dan mengajukan ide-ide secara bebas dan terbuka.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Belanja hari Minggu = $\frac{1}{2}$ × jumlah uangnya.

Belanja hari Senin = Rp4.000,00 lebih sedikit dari belanja hari Minggu.

Belanja hari Selasa = $\frac{1}{3}$ × belanja hari Senin.

Sisa uang belanja = Rp 1.000,00

Ditanya:

- Buatlah model matematika dari permasalahan di atas.
- Tentukan banyak uang Andi sebelum dibelanjakan.

Marilah kita bersama-sama menyelesaikan permasalahan ini.

Misalkan banyak uang Andi sebelum dibelanjakan adalah x rupiah

Arahkan siswa untuk memodelkan Masalah 2.2. Pandu siswa untuk mengamati proses penyelesaian masalah di samping.

Dari yang diketahui diperoleh

Belanja hari Minggu = $\frac{1}{2}x$

Belanja hari Senin = $\frac{1}{2}x - 4000$

Belanja hari Selasa = $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 4.000\right)$

Kita buat sebuah persamaan dari kasus ini, yaitu:
Uang Andi = jumlah uang yang dibelanjakan + sisa uang belanja
sehingga penyelesaian permasalahan ini, adalah:

$$x = \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2} - 4.000\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - 4.000\right) + 1.000 \text{ ....(1)}$$

Jika persamaan (1) diselesaikan maka

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - 4.000 + \frac{x}{6} - \frac{4.000}{3} + 1.000$$

$6x = 3x + 3x - 24.000 + x - 8.000 + 6.000$
$6x = 7x - 26.000$
$x = 26.000$

Dengan demikian uang Andi mula-mula adalah Rp26.000,00.

Minta siswa memahami Masalah 2.3. Beri kesempatan pada siswa memikirkan penyelesaian masalah tersebut. Guru dapat memberikan bantuan ketika siswa mengalami kesulitan.

Masalah-2.3

Di sebuah desa, terdapat sepasang manula yang tinggal di rumah tua. Pada saat sensus penduduk awal tahun 2013, kakek dan nenek tersebut belum memiliki KTP. Untuk pembuatan KTP, kakek dan nenek tersebut diminta data tanggal lahir mereka, tetapi mereka tidak pernah mengetahui tahun lahir mereka. Mereka hanya mengingat bahwa saat menikah, selisih umur mereka 3 tahun. Saat itu nenek berusia 20 tahun, yaitu 11 tahun setelah proklamasi.
Dapatkah kamu membuat persamaan linear dari persoalan di atas? Dapatkah kita ketahui tahun lahir mereka?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan: Umur kakek = K tahun
Umur nenek = N tahun
Tahun lahir kakek = TK
Tahun lahir nenek = TN

Minta siswa memahami alternatif penyelesaian di samping. Bantu siswa untuk memodelkan masalah tersebut.

Pemodelan

Selisih umur kakek dan nenek adalah 3 tahun sehingga
$K – N = 3$

Nenek berusia 20 tahun, yaitu 11 tahun sesudah proklamasi 1945. Jika sekarang awal tahun 2013 maka usia nenek adalah:
$N = (20 – 11) + (2013 – 1945)$ atau $N = 77$ sehingga dengan $K – N = 3$ diperoleh $K = 80$.
Selanjutnya kita mendapatkan dugaan tahun lahir mereka dengan:

Tahun lahir + Usia = Tahun sekarang

sehingga dugaan tahun lahir mereka adalah:
$TN + 77 = 2013$ dan $TK + 80 = 2013$..............................(2)
Bila persamaan (2) diselesaikan maka $TN = 1936$ dan $TK = 1933$
Dengan demikian, tahun lahir nenek dan kakek adalah 1936 dan 1933.

Masalah-2.4

Umur ayah 4 tahun yang lalu adalah 2/3 kali umur ayah pada c tahun yang akan datang, (c adalah bilangan bulat positif). Sekarang, umur ayah adalah 27 tahun lebihnya dari 1/5 umurnya pada 7 tahun yang lalu.
Apakah kamu dapat menentukan umur ayah saat ini?
Tentukanlah nilai c pada kasus tersebut!

Minta siswa untuk memahami Masalah 2.4 di samping. Bantu siswa untuk memodelkan masalah tersebut.

Masalah di samping telah di selesaikan. Arahkan siswa dalam proses pe–nyelesaian. Arahkan siswa untuk mengamati cerita masalah sehingga ter–bentuk model matematika atau persamaan. Ingat–kan, pemodelan matema-tika adalah bagian yang sangat penting dalam proses penyelesaian ma-salah nyata dalam kehidu-pan sehari-hari.

Alternatif Penyelesaian

1. Misalkan umur ayah sekarang adalah x tahun.
2. Berdasarkan informasi masalah di atas, dapat dituliskan

   Umur ayah 4 tahun yang lalu adalah 2/3 kali umur ayah pada c tahun yang akan datang,

   atau $x - 4 = \frac{2}{3}(x + c)$ ....(3)
3. Umur ayah sekarang 27 tahun lebihnya dari 1/5 kali umurnya pada 7 tahun yang lalu atau

   $x = \frac{1}{5}(x - 7) + 27$ ....(4)
4. Model yang telah diperoleh, kita selesaikan sebagai berikut:

   $x - 4 = \frac{2}{3}(x + c) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2c + 12$

   $x = \frac{1}{5}(x - 7) + 27 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 128 = 0$

   $\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad x = 32$

Subsitusikan $x = 32$ ke $x = 2c + 12$ diperoleh $32 = 2c + 12$ atau $c = 10$.
Jadi, umur ayah saat ini adalah 32 tahun.

Beri kesempatan ke–pada siswa untuk bekerja kelompok untuk me–nyelesaikan masalah di samping. Minta siswa mempresentasikan hasil kerja dan arahkan proses pembelajaran ke bentuk tanya jawab.

Diskusi

Coba kamu teliti kasus berikut. Berikan jawaban atau komentarmu, apakah kasus berikut logis?
Umur Ayah 5 tahun yang lalu adalah 2/3 kali umurnya pada *c* tahun yang akan datang. Sekarang, umur ayah adalah 6 tahun lebihnya dari 1/2 kali umurnya 7 tahun yang lalu. Coba kamu analisis nilai c yang kamu peroleh.

Alternatif Penyelesaian

Kita harus membuat model matematika dari cerita di atas. Misalkan umur ayah sekarang adalah x tahun sehingga umurnya 5 tahun yang lalu adalah $(x – 5)$ tahun, umurnya 7 tahun yang lalu adalah $(x – 7)$ tahun dan umurnya c tahun akan datang adalah $(x + c)$ tahun. Dengan demikian, kita memperoleh model persamaan:

a. Umur ayah 5 tahun yang lalu adalah 2/3 kali umurnya pada c tahun yang akan datang, menjadi atau $(x – 5) = \frac{2}{3}(x + c)$ atau $x = 2c + 15$

b. Sekarang, umur ayah adalah 6 tahun lebihnya dari 1/2 kali umurnya 7 tahun yang lalu menjadi, $x = \frac{1}{2}(x - 7) + 6$ atau $x = -1$

Dengan menyelesaikan kedua persamaan, yaitu mensubstitusi $x = -1$ ke $x = 2c + 15$ maka diperoleh $c = -8$.

Bila kita analisis, maka kasus tersebut dapat diselesaikan secara perhitungan matematika, tetapi bukan merupakan kasus yang logis atau nyata, karena:

1. Umur adalah bilangan nonnegatif. Sementara, umur ayah saat ini menjadi -1 tahun.

2. Dari cerita, (x + c) adalah umur ayah akan datang, sementara nilai c adalah bilangan negatif.

Perhatikan alternatif penyelesaian. Arahkan siswa membuat model matematika dari perso–alan cerita tersebut. Pandu siswa membuat model persamaan mate–matika seperti (a) dan (b). Arahkan siswa untuk me-nyelesaikan model persa-maan yang telah ditemu-kannya.

Minta siswa meng–analisis hasil yang di–peroleh. Kasus di sam–ping, adalah kasus tidak logis. Perhatikan alasan (1) dan (2). Sampaikan kepada siswa, pentingnya analisis pada matematika dengan demikian siswa sadar bahwa matematika bukan sekedar perhitu–ngan membutuhkan ilmu pemodelan kasus dan analisis.

Ketiga permasalahan di atas menjadi dasar ide tentang bentuk persamaan linear satu variabel dan dua variabel. Perhatikan persamaan (1), (2), (3), dan (4). Keempat persamaan tersebut disebut persamaan linear. Secara induktif, bentuk umum persamaan linear satu variabel dan dua variabel adalah sebagai berikut.

Minta siswa meng–amati bentuk persamaan (1), (2), (3) dan (4) dan mendefinisikan persa-maan linear satu atau dua variabel. Bersama – sama dengan siswa, guru mene-mukan konsep persamaan linear.

Arahkan siswa mengamati Definisi 2.2 dan Definisi 2.3 Minta siswa untuk membuat beberapa contoh sesuai dengan definisi tersebut dan minta siswa untuk menggambarkan setiap contoh yang mereka buat.

Definisi 2.2

Persamaan linear satu variabel adalah persamaan berbentuk $ax + b = 0$
dengan $a, b \in R$ dan $a \neq 0$, dan
x : variabel real
a : koefisien x
b : konstanta

Definisi 2.3

Persamaan linear dua variabel adalah persamaan berbentuk $ax + by + c = 0$ dengan $a, b, c \in R$, a dan b tidak keduanya nol, dimana
x,y: variabel real
a : koefisien x
b : koefisien y
c : konstanta

Minta siswa kembali untuk membuktikan Sifat 2.1 dengan contoh baru yang mereka buat sendiri di atas.

Sifat-2.1

Misal l adalah persamaan linear, maka:
a. Penambahan dan pengurangan bilangan di kedua ruas persamaan l, tidak mengubah solusi persamaan tersebut.
b. Perkalian bilangan tidak nol di kedua ruas pada persamaan l, tidak mengubah solusi persamaan tersebut.

Ingatkan kembali siswa masalah daerah asal sebuah relasi atau fungsi. Minta siswa untuk membedakan daerah asal x bilangan real dengan daerah asal $x \geq 0$ untuk x bilangan real.
Minta siswa, melengkapi Tabel 2.5. Minta siswa

Contoh 2.2

Jika $x \geq 0$, tentukan pasangan titik (x, y) yang memenuhi persamaan linear $x - 4y = 12$, untuk $x, y \in R$, kemudian gambarkan grafiknya!

Alernatif Penyelesaian

Pertama-tama kita tentukan nilai x dan y yang memenuhi persamaan $x - 4y = 12$ dan kita buat pada tabel berikut.

Tabel 2.5 Pasangan titik (x,y) pada grafik x – 4y = 12 untuk x ≥ 0

x	0	1	2	3	...
y	–3	-11/4	-10/4	-9/4	...
(x,y)	(0,–3)	(1,-11/4)	(2,-10/4)	(3,-9/4)	...

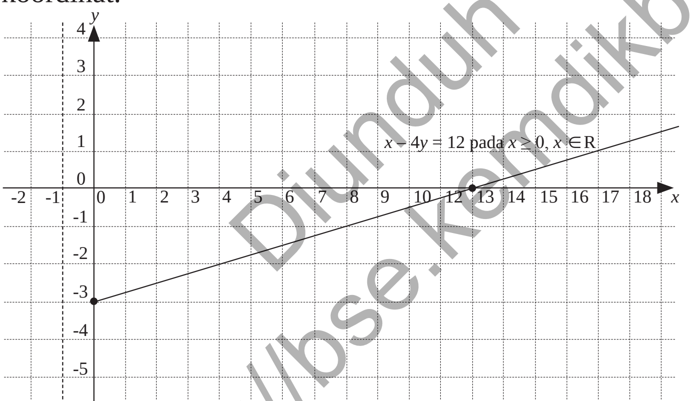
untuk menunjukkan bahwa himpunan penyelesaian ada tak hingga banyaknya.

Dari data Tabel 2.5 dapat dinyatakan bahwa terdapat tak hingga banyaknya pasangan titik (x, y) yang memenuhi persamaan $x – 4y = 12$, yaitu:

$$\text{HP} = \left\{(0,-3),(1,-\frac{11}{4}),(2,-\frac{10}{4}),(3,-\frac{9}{4}),(4,-\frac{9}{4}),\ldots\right\}$$

Grafik $x – 4y = 12$ ini memotong sumbu x di titik (12, 0) dan memotong sumbu y di titik (0, -3). Selanjutnya dengan menggunakan titik pada tabel di atas, kita dapat menggambarkan grafik $x – 4y = 12$ untuk $x \geq 0$ pada bidang koordinat.

Minta siswa menggambarkan grafik fungsi tersebut. Minta siswa untuk menganalisis grafik. Arahkan siswa memahami bahwa sepanjang garis adalah solusi persamaan tersebut.



Gambar 2.7 Grafik x – 4y = 12 untuk x ≥ 0

Contoh 2.3

Diberikan persamaan linear $y = 3x – 4$, untuk setiap $x \in R$. Gambarlah grafik persamaan linear tersebut!

Minta siswa untuk memahami contoh di samping dan minta siswa melengkapi Tabel 2.6 serta menambahi nilai lainnya.

Alernatif Penyelesaian

Pertama-tama kita tentukan nilai x dan y yang memenuhi persamaan $y = 3x – 4$ dan kita buat tabel berikut.

Tabel 2.6 Pasangan titik (*x*,*y*) untuk grafik *y* = 3*x* – 4 untuk $x \in R$

x	...	–4	–3	–2
y	...	–16	–13	–10
(*x*, *y*)	...	(-4, -16)	(-3,-13)	(-2, -10)
x	–1	0	$\frac{4}{3}$	...
y	–7	–4	0	...
(*x*,*y*)	–16	(0,–4)	$\left(\frac{4}{3},0\right)$	...

Minta siswa meletakkan koordinat yang diperoleh pada bidang koordinat kartesius, kemudian meng–hubungkan titik tersebut sehingga terbentuk sebuah garis.

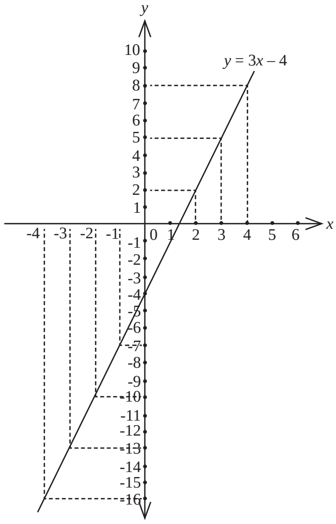
Minta siswa untuk memberi komentar tentang garis yang diperoleh.

Minta siswa untuk membedakan Contoh 2.3 dengan Contoh 2.2.

Dari data Tabel 2.6 dapat dinyatakan bahwa terdapat tak hingga pasangan (*x*, *y*) yang memenuhi persamaan $y = 3x - 4$ adalah tak hingga banyaknya, yaitu

$HP = \{..., (-4,-16),(-3,-13),(-2,-10),(-1,-7),(0,-4),(\frac{4}{3},0) ....\}$.

Dari data pasangan titik sebagai anggota himpunan penyelesaian, dapat dikatakan bahwa grafik $y = 3x - 4$ memotong sumbu *x* pada titik $(\frac{4}{3},0)$ dan memotong sumbu *y* pada titik (0, –4). Selanjutnya kita gambarkan grafik $y = 3x - 4$ pada bidang koordinat kartesius dengan menggunakan pasangan (*x*, *y*) tersebut.



Gambar 2.8 Grafik $y = 3x - 4$

Definisi 2.4

Misalkan a, b, dan c bilangan real dan a, b keduanya tidak nol.

Himpunan penyelesaian persamaan linear $ax + by = c$ adalah himpunan semua pasangan (x,y) yang memenuhi persamaan linear tersebut.

Diskusi

Berdasarkan Definisi 2.4, diskusikanlah dengan temanmu satu kelompok untuk menjawab beberapa pertanyaan berikut.

1. Dapatkah sebuah persamaan linear dua variabel memiliki anggota himpunan penyelesaian adalah tepat satu atau penyelesaian tunggal? Jika dapat, berikan contoh persamaanya!
2. Dapatkah sebuah persamaan linear dua variabel tidak memiliki anggota himpunan penyelesaian? Jika dapat, beri contoh persamaannya!

Arahkan siswa memahami Definisi 2.4. Minta siswa untuk memberi komentar bila syarat nilai a, b, c, x, y tidak dipenuhi. Minta siswa untuk memberikan contoh lain, kemudian menentukan beberapa penyelesaian persamaan dan yang bukan penyelesaian persamaan tersebut.

Arahkan siswa berdiskusi atau kerja kelompok untuk menyelesakan permasalahan di samping. Beri kesempatan kepada siswa mempresentasikan hasil kerjanya. Arahkan proses belajar ke sesi tanya ja–wab.

Alternatif Penyelesaian.

Sebuah persamaan linear dua variabel boleh saja tidak memiliki penyelesaian. Hal ini bergantung pada daerah pendefinisian variabel yang dimiliki oleh persamaan tersebut. Jika, solusi persamaan berada pada daerah pendefinisian maka disebut mempunyai solusi, sebaliknya tidak. Contoh:

1. Untuk x, y bilangan real maka tentukan penyelesaian $2x - 3y + 6 = 0$. (Salah satu penyelesaian adalah (3,4). Jadi, mempunyai penyelesaian, bukan?)
2. Untuk x, y bilangan bulat positif, $1 \leq x \leq 4$, maka tentukan penyelesaian $2x - 3y - 6 = 0$.

Bila kita buat tabel penyelesaian maka diperoleh:

x	1	2	3	4
y	-4/3	-2/3	0	2/3
Keterangan	Bukan solusi	Bukan solusi	Bukan solusi	Bukan solusi

Jadi, sepanjang daerah pendefinisian, persamaan linear di atas tidak mempunyai penyelesaian.

3. Pertidaksamaan Linier

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak kita jumpai kasus yang melibatkan pembatasan suatu hal. Contohnya, lowongan kerja mensyaratkan pelamar dengan batas usia tertentu, batas nilai cukup seorang pelajar agar dinyatakan lulus dari ujian, dan batas berat bersih suatu kendaraan yang diperbolehkan oleh dinas angkutan umum. Perhatikan masalah berikut!

Masalah-2.5

Ayah Budi lebih muda dibanding pamannya tetapi lebih tua dari ibunya. Sementara umur bibinya hanya satu tahun lebih tua dari umur ibunya tetapi satu tahun lebih muda dari umur ayahnya. Budi berencana mengurutkan umur antara ayah, ibu, paman, dan bibinya berdasarkan umur mereka yang lebih tua.
Dapatkah kamu membantu Budi dalam mengatasi permasalahan tersebut?

Ingatkan siswa pelajaran pertidaksamaan li–near satu variabel di kelas VIII. Berikan penjelasan kepada siswa tentang aplikasi pertidaksamaan, kemudian minta siswa untuk memberikan contoh lain pertidaksamaan di kehidupan sehari – hari.

Beri kesempatan pada siswa mencoba menyelesaikan masalah berikut. Organisasikan siswa belajar dalam kelompok. Amatilah mereka bekerja, berkeliling mencermati berbagai kesulitan yang

Alternatif Penyelesaian

Pertama sekali didefinisikan variabel-variabelnya sebagai berikut:

Umur ayah = A tahun Umur ibu = I tahun
Umur paman = P tahun Umur bibi = B tahun

Dari penjelasan permasalahan di atas, diperoleh informasi sebagai berikut.

a. Ayah lebih muda dibanding paman
 $A < P$ atau $A - P < 0$ ....(5)
b. Ayah lebih tua dari ibu
 $A > I$ atau $I < A$...(6)
c. Umur bibi hanya satu tahun lebih tua dari umur ibu
 $B - 1 = I$ atau $B > I$ ....(7)
d. Umur bibi satu tahun lebih muda dari ayah
 $B + 1 = A$ atau $B < A$ ....(8)

Dengan mengamati pola di atas, yaitu $A < P$, $I < A$, $I < B$, dan $B < A$.

Urutan umur mereka mulai dari tertua ke termuda adalah $P > A > B > I$.

Jadi, kesimpulannya adalah paman lebih tua dibanding ayah, ayah lebih tua dibanding bibi, dan bibi lebih tua dibanding ibu.

dialami siswa. Berilah bantuan pada siswa yang mengalami kesulitan, ujilah pemahaman siswa atas berbagai proses penyelesaian masalah.
Minta siswa untuk memahami alternatif penyelesaian di samping. Minta pendapat siswa bagaimana menyimpulkan persamaan (5), (6), (7), dan (8) bisa menjadi $P > A > B > I$.

Diskusi

Diskusikan masalah urutan berikut dengan menggunakan metodemu sendiri! Pak Anto, Pak Yusuf, dan Pak Doni gemar memancing. Mereka selalu memancing ikan di sungai setiap Sabtu. Suatu hari, setelah mereka selesai memancing, mereka menghitung banyak ikan mereka masing-masing. Banyak ikan yang ditangkap Pak Anto ternyata lebih daripada banyak ikan yang ditangkap Pak Yusuf. Walaupun banyak ikan yang ditangkap Pak Anto dikali dua, juga masih lebih sedikit dibanding dengan tangkapan Pak Yusuf dan Pak Doni. Berdasarkan cerita di atas, dapatkah kamu menentukan urutan mereka berdasarkan banyak ikan yang mereka tangkap?

Arahkan siswa berdiskusi dengan temannya satu kelompok, fasilitasi siswa untuk dapat menentukan urutan banyaknya ikan yang diperoleh ketiga orang tersebut dengan menggunakan konsep pertidaksamaan linear dan konsep logika matematika (implikasi)

Beri kesempatan kepada siswa untuk memahami masalah di samping. Minta siswa untuk memikirkan masalah lain yang berkaitan dengan pembatasan suatu hal (contoh kasus petidaksamaan).

Masalah-2.6

Santi berbelanja di toko peralatan sekolah dengan uang yang tersedia Rp250.000,00. Harga setiap barang di toko tersebut telah tersedia di daftar harga barang sehingga Santi dapat memperkirakan peralatan sekolah apa saja yang sanggup dia beli dengan uang yang dia miliki. Berdasarkan daftar harga, jika Santi membeli 2 seragam sekolah dan 3 buku maka dia masih mendapatkan uang kembalian. Dapatkah kamu memodelkan harga belanjaan Santi tersebut?

Minta siswa untuk mempelajari dan memahami penyelesaian berikut. Bantu siswa untuk memodelkan permasalahan di atas.

Alternatif Penyelesaian

Minta siswa untuk mempelajari dan memahami penyelesaian berikut. Bantu siswa untuk memodelkan permasalahan di atas.

Dengan memisalkan harga seragam sekolah = x rupiah dan harga buku = y rupiah maka permasalahan di atas dapat dimodelkan sebagai berikut:

Santi membeli 2 seragam sekolah dan 3 buku dan mendapatkan uang kembalian mempunyai arti $2x + 3y < 250.000$ ....(9)

Dari masalah di atas, pertidaksamaan (5), (6), (7) , (8) dan (9) disebut pertidaksamaan linear. Berikut definisi pertidaksamaan linear.

Definisi 2.5

Pertidaksamaan linear satu variabel adalah persamaan yang berbentuk

$ax + b < 0$

$ax + b \leq 0$

$ax + b > 0$

$ax + b \geq 0$ dengan

a : koefisien x, $a \neq 0$, $a \in R$

b : konstanta ($b \in R$)

x : variabel real

Minta siswa untuk mengamati pertidaksamaan (5), (6), (7), (8) dan (9) di atas. Bersama – sama dengan siswa, guru mendefinisikan pertidaksamaan li–near satu variabel. Minta siswa untuk membuat contoh dan menyelesaikannya.

Definisi 2.6

Pertidaksamaan linear dua variabel adalah persamaan yang berbentuk

$ax + \text{by} + c < 0$

$ax + \text{by} + c \leq 0$

$ax + \text{by} + c > 0$

$ax + \text{by} + c \geq 0$ dengan

a,b : koefisien ($a \neq 0$, $b \neq 0$, a, $b \in R$)

c : konstanta ($c \in R$)

x,y : variabel real

Minta siswa untuk mengamati pertidaksamaan (5), (6), (7), (8) dan (9) di atas. Bersama – sama dengan siswa, guru mendefinisikan pertidaksamaan li–near dua variabel. Minta siswa untuk membuat contoh dan menyelesaikannya.

Sifat-2.2

Misal k adalah pertidaksamaan linear, maka:

a. Penambahan dan pengurangan bilangan di kedua ruas pertidaksamaan k, tidak mengubah solusi persamaan tersebut.

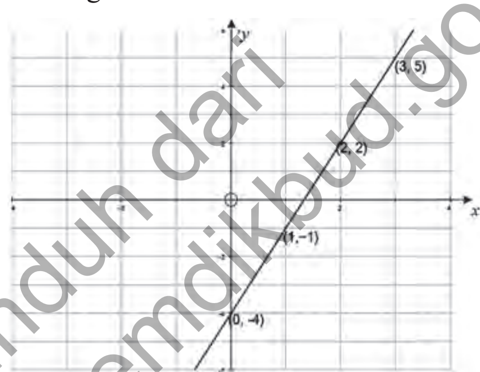
b. Perkalian bilangan tidak nol di kedua ruas pada pertidaksamaan k, tidak mengubah solusi persamaan tersebut.

Uji Kompetensi 2.1

Soal-soal pada uji kompetensi ini dapat dijadikan tugas bagi siswa untuk dikerjakan di rumah. Tujuan dari uji ini adalah untuk mengetahui apakah siswa memahami tentang konsep persamaan linear dan pertidaksamaan li–near

1. Salah satu penyakit sosial remaja sekarang ini adalah merokok. Ahli kesehatan merilis informasi bahwa, menghisap satu batang rokok akan mengurangi waktu hidup seseorang selama 5,5 menit. Seorang remaja mulai merokok 1 (satu) batang rokok perhari sejak umur 15 tahun. Berapa waktu hidup remaja tersebut berkurang sampai dia berumur 40 tahun?

2. Perhatikan grafik di bawah ini!



   Dari pasangan titik-titik yang diberikan, tentukanlah persamaan linear yang memenuhi pasangan titik-titik tersebut.

3. Apakah syarat agar persamaan linear $ax + by = c$ tepat memiliki satu penyelesaian? Jelaskan!

4. Tentukanlah himpunan penyelesaian untuk setiap persamaan linear berikut ini!

   a. $5x - 3y = 7$

   b. $\frac{2}{3}y - 4x - 1 = 0$

   c. $y = \frac{1}{3} - 5x$

5. Untuk dapat diterima sebagai suster di RS.SEHAT, seorang calon suster akan menjalani tes sebanyak 4 kali, yaitu tes tertulis, psikotes, tes ketrampilan, dan wawancara dengan perbandingan hasil tes berturut-turut adalah 4 : 3 : 2 : 1. Total nilai tes tidak boleh kurang dari 793. Windy adalah seorang calon suster yang telah mengikuti tes dengan hasil sebagai berikut: Tes Tertulis= 75, Psikotes =78, dan Tes Wawancara=85. Tentukan nilai terendah Tes Keterampilannya agar ia dapat diterima di rumah sakit tersebut.

6. Berat astronot dan pesawatnya ketika mendarat di bulan tidak boleh melebihi 200 kg. Berat pesawat di bumi 900 kg dan berat benda di bulan 1/6 dari berat benda di bumi. Tentukan berat maksimum astronot di bumi!

7. Seorang penderita diabetes sedang mengontrol berat badannya. Ia menggunakan indeks berat badannya dengan rumus $I = W/h^2$, dengan W adalah berat badan (kg), dan h adalah tinggi badan (meter). Nilai I yang dimiliki setiap orang memiliki arti sebagai berikut.
   - $I \leq 25$ berarti berat badan normal
   - $25 < I \leq 30$ berarti kelebihan berat badan
   - $30 < I \leq 35$ berarti obesitas ringan
   - $35 < I \leq 40$ berarti obesitas sedang
   - $I > 40$ berarti obesitas kronis

   a. Jika tinggi badan orang tersebut 175 cm, berapa berat badan maksimal supaya tergolong berat badan normal?

   b. Jika orang tersebut sudah memiliki berat badan 80 kg dan yang akan dikontrol adalah tinggi badan dengan melakukan suatu terapi tertentu, tentukan batas tinggi badan agar digolongkan dalam katagori kelebihan berat badan.

8. Gambarkanlah grafik $g(x) = |2x–1|$ untuk $1 < x < 10$!

Minta siswa untuk mengerjakan tugas projek berikut. Tugas projek ini dapat dilakukan secara pribadi atau berkelompok. Minta siswa membuat laporan hasil kerja dan mempresentasikannya di depan kelas. Arahkan proses belajar menjadi sesi tanya – jawab. Arahkan siswa untuk bersikap saling menghormati dan menghargai pendapat teman.

Projek

Perhatikan bahwa persamaan linear dua variabel dapat dibuat grafiknya asal diketahui dua titik yang dilaluinya. Padahal, persamaan linear dua variabel memiliki dua koefisien dan satu konstanta. Selidiki apa implikasi dari kenyataan ini. Selidiki apakah hanya ada satu persamaan linear dua variabel yang melalui dua titik yang sama. Apakah ini berarti ada beberapa persamaan linear dua variabel berbeda yang melalui dua titik yang sama. Ataukah walaupun banyak, semua persamaan linear dua variabel melalui dua titik yang sama sebenarnya adalah sama. Buat laporan hasil kegiatanmu dan paparkan di depan kelas.

Motivasi siswa untuk belajar nilai mutlak dan kaitannya dengan persamaan linear. Memunculkan keingintahuan siswa tentang kebergunaan materi nilai mutlak dan persamaan linear.

4. Persamaan Linear Yang Melibatkan Nilai Mutlak

Kita telah memahami lewat pengamatan terhadap beberapa kasus pada nilai mutlak dan persamaan linear satu atau dua variabel. Selanjutnya kita akan mempelajari persamaan linear nilai mutlak. Kamu diharapkan mampu memahami aplikasi kedua konsep tersebut. Perhatikan dan pahami masalah berikut.

Masalah-2.7

Gambar 2.9 Sungai

Sungai Bengawan Solo sering meluap pada musim hujan dan kering di musim kemarau. Debit air sungai tersebut adalah *p* liter/detik pada cuaca normal. Perubahan debit pada cuaca tidak normal adalah sebesar *q* liter/detik.

Tunjukkanlah sketsa penurunan minimum dan peningkatan maksimum debit air sungai tersebut!

Minta siswa untuk membaca dan memahami Masalah 2.7. Arahkan siswa untuk menghubungkan masalah ini ke konsep persamaan linear dengan melibatkan nilai mutlak.

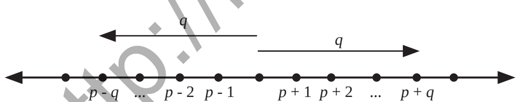
Alternatif Penyelesaian

Kamu telah mengetahui penyimpangan suatu nilai tertentu dapat dinyatakan dengan nilai mutlak. Nilai mutlak peningkatan dan penurunan debit air tersebut dengan perubahan sebanyak q liter/detik dapat dimodelkan dengan persamaan:

Masalah 2.7 diselesaikan dengan memanfaatkan garis bilangan. Minta siswa mempelajari alternatif penyelesaian.

$|x - p| = q$ dimana, x: debit air sungai.

Dengan pemahaman yang telah kita miliki, kita dapat menggambarkan grafiknya sebagai berikut.



Misalkan debit air sungai = x liter/detik

Simpangan x terhadap nilai pada cuaca normal adalah $|x - p|$. Jika perubahan debit air tersebut bernilai q maka $|x - p| = q$, sehingga diperoleh $x = p + q$ atau $x = p - q$.

Dari grafik di atas, tampak jelas bahwa penurunan minimum debit air adalah $(p - q)$ liter/detik dan peningkatan maksimum debit air adalah $(p + q)$ liter/detik.

Minta siswa untuk me–nyelesaikan pertidaksamaan tersebut dengan memanfaatkan Definisi 2.1. (Telah dijawab di samping)

Alternatif Penyelesaian Lainnya

Dengan memanfaatkan Definisi 2.1 maka

$$|x-p| = \begin{cases} x-p & jika \quad x \geq p \\ -x+p & jika \quad x < p \end{cases}$$

atau

$$|x-p| = q \Leftrightarrow \begin{cases} x-p=q & jika \quad x \geq p \\ -x+p=q & jika \quad x < p \end{cases}$$

sehingga diperoleh $x = p + q$ atau $x = p - q$

Pandu siswa untuk memahami proses penyelesaian pada contoh di samping. Berikan kesempatan kepada siswa untuk bertanya dan mendiskusikan bersama - sama perta–nyaan yang muncul tersebut. Arahkan siswa memahami proses pembentukan persamaan nilai mutlak di samping.
Arahkan siswa memahami pentingnya analisis kembali solusi yang diperoleh dengan daerah asal pendefinisian persamaan.

Contoh 2.4

Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $|x-3| + |2x-8| = 5$.

Alternatif Penyelesaian

Dengan menggunakan Definisi 2.1 maka diperoleh,

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & jika \quad x \geq 3 \\ -x+3 & jika \quad x < 3 \end{cases}$$ dan

$$|2x-8| = \begin{cases} 2x-8 & jika \quad x \geq 4 \\ -2x+8 & jika \quad x < 4 \end{cases}$$ sehingga

a. Untuk $x < 3$ maka

$-x + 3 - 2x + 8 = 5 \Leftrightarrow -3x + 11 = 5$
$\Leftrightarrow -3x = -6$
$\Leftrightarrow x = 2$

(memenuhi karena $x = 2$ berada pada domain $x < 3$)

b. Untuk $3 \leq x < 4$ maka

$x - 3 - 2x + 8 = 5 \Leftrightarrow -x + 5 = 5$
$\Leftrightarrow -x = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$

(tidak memenuhi karena $x = 0$ tidak berada pada domain $3 \leq x < 4$)

c. Untuk $x \geq 4$ maka

$$x - 3 + 2x - 8 = 5 \Leftrightarrow 3x - 11 = 5$$
$$\Leftrightarrow 3x = 16$$
$$\Leftrightarrow x = 16/3$$

(memenuhi karena $x = 16/3$ berada pada domain $x \geq 4$)

Jadi, penyelesaian $|x-3|+|2x-8|=5$ adalah HP = {(2,16/3)}

Bangkitkan motivasi siswa dengan memberikan informasi bahwa banyak penerapan pertidaksamaan dalam dunia nyata. Sampaikan Masalah 2.8 sebagai salah satu contoh masalah, kemudian minta siswa untuk memikirkan dan memberikan contoh – contoh masalah dunia nyata yang berkaitan dengan pertidaksamaan.

5. Pertidaksamaan Linear Yang Melibatkan Nilai Mutlak

Selanjutnya kita akan mengaplikasikan konsep nilai mutlak ke pertidaksamaan linier, dengan memahami dan meneliti kasus-kasus berikut.

Masalah-2.8

Gambar 2.10 Inkubator

Seorang bayi lahir prematur di sebuah Rumah Sakit Ibu dan Anak dengan berat badan 2.200 gram. Untuk mengatur suhu tubuh bayi tetap stabil, maka harus dirawat di dalam inkubator selama beberapa hari. Suhu inkubator harus dipertahankan berkisar antara 32°C hingga 35°C selama 2 hari. Ternyata jika berat badan berada pada interval BB: 2.100–2.500 gram, maka suhu inkubator yang harus dipertahankan adalah 34°C. Jika pengaruh suhu ruangan membuat suhu inkubator menyimpang sebesar 0.2°C maka hitunglah interval perubahan suhu inkubator!

Alternatif Penyelesaian

Pada kasus bayi ini, kita sudah mendapatkan data dan suhu inkubator yang harus dipertahankan selama 1–2 hari sejak kelahiran adalah 34°C. Misalkan T adalah segala kemungkinan perubahan suhu inkubator akibat pengaruh suhu ruangan, dengan perubahan yang diharapkan sebesar 0.2°C, maka nilai mutlak suhu tersebut dapat kita modelkan, sebagai berikut:

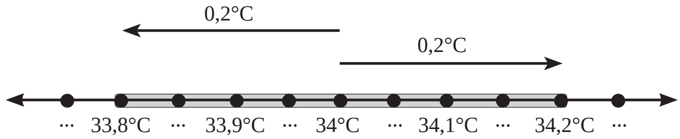
$$|T - 34^oC| \leq 0{,}2^oC$$

Minta siswa memahami masalah di atas. Pandu siswa untuk mengamati garis bilangan dan menjelaskan maksud dari interval $\{T \mid 33{,}8^oC \leq T \leq 34{,}2^oC\}$

Minta siswa memberikan pendapat tentang maksud dari sketsa di samping. Arahkan dia dari nilai pembuat nol fungsi dan arti dari simpangan.

Kasus ini dapat kita selesaikan melalui cara berikut.

Cara I. (Dengan mengamati sketsa)



Gambar 2.11 Interval perubahan suhu

sehingga interval kenaikan suhu inkubator adalah interval $\{T \mid 33{,}8^{o}\text{C} \le T \le 34{,}2^{o}\text{C}\}$.

Cara II telah diselesaikan di samping. Arahkan siswa untuk mendapatkan penyelesaian tersebut. Arahkan siswa untuk membandingkan jawaban pertidaksamaan tersebut dengan memanfaatkan $|x| = \sqrt{x^2}$ pada Contoh 2.6.

Cara II. (Dengan memanfaatkan Definisi 2.1)

Berdasarkan Definisi 2.1 maka

$$\left|T - 34^0C\right| = \begin{cases} T - 34^0C & jika \quad T \ge 34^0C \\ -T + 34^0C & jika \quad T < 34^0C \end{cases}$$

atau

$$\left|T - 34^0C\right| \le 0.2°C = \begin{cases} T - 34^0C \le 0.2°C & jika \quad T \ge 34^0C \\ -T + 34^0C \le 0.2°C & jika \quad T < 34^0C \end{cases}$$

Jawaban pertidaksamaan menjadi $T \le 34.2^{\circ}\text{C}$ untuk $T \ge 34^{\circ}\text{C}$ dan $T \ge 33.8^{\circ}\text{C}$ untuk $T < 34.2^{\circ}\text{C}$. Karena kita mempartisi pertidaksamaan berdasarkan daerah asalnya maka jawaban pertidaksamaan yang dipartisi akan digabungkan sehingga diperoleh $\{T \mid 33{,}8^{o}\text{C} \le T \le 34{,}2^{o}\text{C}\}$.

Arahkan siswa melihat Contoh 2.6

Cara III (dengan memanfaatkan $|x| = \sqrt{x^2}$)

Kamu dapat lihat pada Contoh 2.6

Masalah-2.9

Gambar 2.12 Tentara menembak

Beberapa tentara melakukan latihan menembak di sebuah daerah kosong warga sipil. Salah satu dari mereka berencana menembak obyek yang telah ditentukan di sebuah perbukitan. Jika $x = 0$ adalah posisi awal tentara tersebut, maka pola lintasan peluru yang mengarah ke objek diperkirakan memenuhi persamaan $2y - x - 0{,}66 = 0$ dengan x adalah jarak penembak dengan sasaran dan y adalah ketinggian peluru dari permukaan tanah. Kecepatan angin dan hentakan senjata akan mempengaruhi pergerakan peluru sehingga kemungkinan lintasan peluru dapat berubah menjadi $y - 0{,}475x - 0{,}35 = 0$. Pada jarak berapakah lintasan peluru akan menyimpang 0,05 m oleh pengaruh-pengaruh perubahan arah tersebut?

Minta siswa memahami Masalah 2.9 kemudian minta siswa untuk memikirkan dan memberikan contoh lain tentang masalah dunia nyata yang berkaitan dengan perti–daksamaan.

Alternatif Penyelesaian

Cara I (Dengan memanfaatkan Definisi 2.1)

Karena $x = 0$ adalah posisi awal peluru, maka lintasan peluru haruslah pada interval $x \geq 0$ sehingga model yang diperoleh adalah $\left|(0{,}5x + 0{,}33) - (0{,}475x + 0{,}35)\right| \leq 0.05$ atau $\left|0{,}025x - 0{,}02\right| \leq 0.05$. Dengan Definisi 2.1 maka

$$|0,025x - 0,02| = \begin{cases} 0,025x - 0,02 & \text{jika } x \geq 0,8 \\ -0,025x + 0,02 & \text{jika } 0 \leq x < 0,8 \end{cases}$$

sehingga

$$|0,025x - 0,02| \leq 0,05 \Leftrightarrow \begin{cases} 0,025x - 0,02 \leq 0,05 & \text{jika } x \geq 0,8 \\ -0,025x + 0,02 \leq 0,05 & \text{jika } 0 \leq x < 0,8 \end{cases}$$

Dengan menyelesaikan kedua pertidaksamaan maka:

a. Untuk $x \geq 0{,}8$ maka $0{,}025x - 0{,}02 \leq 0.05$ atau $x \leq 2{,}8$

Dengan mengiris $x \geq 0{,}8$ dan $x \leq 2{,}8$ maka solusi 1 yang diperoleh adalah $0{,}8 \leq x \leq 2{,}8$.

Berikut adalah penyele–saian Masalah 2.9 dengan memanfaatkan Definisi 2.1. Beri kesempatan kepada siswa untuk menyelesaikan masalah tersebut terlebih dulu. Ajukan pertanyaan kepada siswa tentang proses penyelesai–an di samping:

Kenapa fungsi dikurang pada $\left|(0{,}5x + 0{,}33) - (0{,}475x + 0{,}35)\right| \leq 0.05$

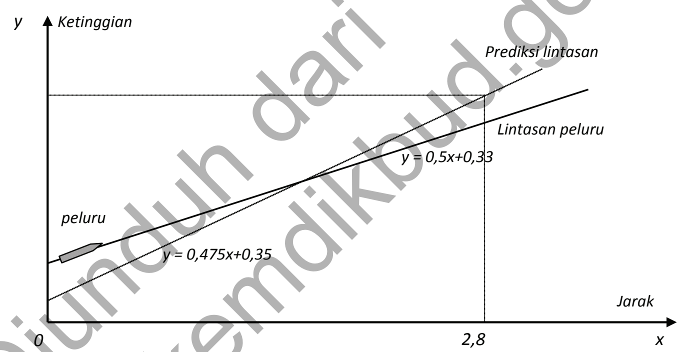
Minta siswa memberikan pendapat tentang proses penyelesaian di samping.

b. Untuk $0 \le x < 0{,}8$ maka $-0{,}025x + 0{,}02 \le 0.05$ atau $x \ge -1{,}2$

Dengan mengiris $0 \le x < 0{,}8$ dan $x \ge -1{,}2$ maka solusi 2 yang diperoleh adalah $0 \le x < 0{,}8$.

Jika jawaban (a) dan (b) digabung maka penyelesaian yang diperoleh adalah $0 \le x \le 2{,}8$. Artinya penyimpangan lintasan peluru akibat pengaruh kecepatan angin dan hentakan senjata sebesar 0,05 m terjadi sejauh 2,8 m dari posisi awal.

Permasalah di atas dapat dinyatakan dengan grafik sebagai berikut.



Gambar 2.13 Lintasan Peluru

Minta siswa untuk meng–analisis grafik disamping. Minta siswa menunjukkan penyimpangan lintasan peluru pada kenyataan dengan prediksi. Arahkan siswa untuk membandingkan jawaban pertidaksamaan tersebut dengan memanfaatkan $|x| = \sqrt{x^2}$ *pada Contoh 2.7.*

Dari Gambar 2.13, jelas kita lihat bahwa grafik lintasan peluru yang diprediksi mengalami penyimpangan. Penyimpangan sejauh 0,05 m akan terjadi sampai $x = 2{,}8$ m.

Secara umum, pertidaksamaan linear nilai mutlak dapat disaji kan dalam bentuk:

$$|x| \le a \text{ untuk } a \ge 0,\ a \in \mathrm{R}$$
$$|x| \ge a \text{ untuk } a \in \mathrm{R}.$$

Perkenalkan bentuk umum pertidaksamaan di sam–ping. Minta siswa untuk membuat contoh dengan memilih sembarang nilai a. Minta siswa untuk me–nganalisis pertidaksamaan jika mereka memilih nilai a positif, nol, atau negatif.

Ingat pada pelajaran sebelumnya bahwa fungsi nilai mutlak tidak pernah bernilai negatif. Jika demikian, menurut pendapatmu, apa yang akan terjadi dalam bentuk umum di atas jika $a < 0$?

Berikutnya, mari kita temukan penyelesaian pertidaksamaan linear nilai mutlak $|x| \leq a$ dan $|x| \geq a$ untuk $a \geq 0$, $a \in R$.

Kasus 1.

$|x| \leq a$ untuk $a \geq 0$, $a \in R$

Dengan menggunakan Definisi 2.1 maka:

Untuk $x \geq 0$ maka $|x| = x$ sehingga $x \leq a$.

untuk $x < 0$ maka $|x| = -x$ sehingga $-x \leq a$ atau $x \geq -a$.

Dengan demikian, solusi pertidaksamaan $|x| \leq a$ untuk $a \geq 0$, $a \in R$ adalah $x \leq a$ dan $x \geq -a$ (atau sering dituliskan dengan $-a \leq x \leq a$).

Kasus 2

$|x| \geq a$ untuk $a \geq 0$, $a \in R$

Dengan menggunakan Definisi 2.1 maka:

Untuk $x \geq 0$ maka $|x| = x$ sehingga $x \geq a$

Untuk $x < 0$ maka $|x| = -x$ sehingga $-x \geq a$ atau $x \leq -a$

Dengan demikian, solusi pertidaksamaan $|x| \geq a$ untuk $a \geq 0$, $a \in R$ adalah $x \leq -a$ atau $x \geq a$.

Diskusi

Diskusikan dengan teman – temanmu, apa yang menjadi penyelesaian umum pertidaksamaan linear nilai mutlak dengan bentuk umum:

$$|ax + b| \leq c \text{ untuk } c \geq 0,\ a, b, c, \in R$$

$$|ax + b| \geq c \text{ untuk } c \geq 0,\ a, b, c, \in R$$

$$|ax + b| \leq |cx + d| \text{ untuk } a, b, c, \in R$$

Kasus 1 dan kasus 2 dapat juga diselesaikan dengan memanfaatkan sifat $|x| = \sqrt{x^2}$ (lihat kembali Latihan 2.1). Tentu saja, kita membutuhkan konsep persamaan kuadrat. Konsep persamaan kuadrat akan kamu pelajari pada Bab VII. Namun, mari kita pelajari sekilas penyelesaian pertidaksamaan kuadrat sebagai alternatif penyelesaian Masalah 2.8 dan 2.9 dengan memperhatikan contoh berikut:

Minta komentar siswa, apa yang terjadi?

Minta siswa untuk membaca, mempelajari, meng–analisis penyelesaian pertidaksamaan pada kasus 1 dan kasus 2. Berikan kesempatan kepada siswa untuk menjelaskan proses penyelesaian tersebut.

Minta siswa untuk me–nyelesaikan kasus 1 dan kasus 2 dengan menggunakan grafik atau garis bilangan. Berikan kesempatan kepada siswa untuk menyampaikan pendapatnya.

Arahkan siswa untuk berdiskusi tentang per–tidaksamaan linear dan nilai mutlak. Minta siswa menyelesaikan masalah pertidaksamaan linear di samping dengan memanfaatkan Definisi 2.1

Contoh di samping adalah alternatif penyelesaian pertidaksamaan dengan memanfaatkan kesetaraan $|x| = \sqrt{x^2}$. Namun, konsep persamaan kuadrat akan dipelajari pada bab selanjutnya, jadi berikut adalah pembahasan sekilas tentang pertidaksamaan bentuk kuadrat. Jadi, arahkan dan pandu siswa memahami langkah – langkah penyelesaian berikut.

Contoh 2.5

Selesaikanlah pertidaksamaan berikut dengan metode umum $|2x + 1| \geq |x - 3|$!

Alternatif Penyelesaian

Pertidaksamaan di atas dapat diselesaikan dengan memanfaatkan $|x| = \sqrt{x^2}$ dan $|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$ serta grafik. Perhaatikan langkah penyelesaian berikut!

Langkah 1: Ingat bahwa $|x| = \sqrt{x^2}$ sehingga:

$$\begin{aligned} |2x+1| \geq |x-3| &\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)^2} \geq \sqrt{(x-3)^2} \\ &\Leftrightarrow (2x+1)^2 \geq (x-3)^2 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 \geq x^2 - 6x + 9 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 10x - 8 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (3x-2)(x+4) \geq 0 \end{aligned}$$

Langkah 2: Menentukan pembuat nol.

$$x = \frac{2}{3} \text{ atau } x = -4$$

Langkah 3: Letakkan pembuat nol dan tanda pada garis bilangan

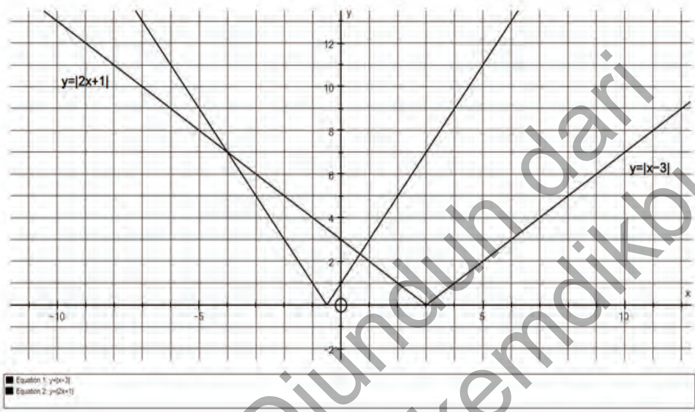
Langkah 4: Menentukan interval penyelesaian.

Dalam hal ini, interval penyelesaian merupakan selang nilai x yang membuat pertidaksamaan bernilai positif, sesuai dengan tanda pertidaksamaan pada soal di atas. Dengan demikian arsiran pada interval di bawah ini adalah interval penyelesaian pertidaksamaan tersebut.

Langkah 5: Menuliskan kembali interval penyelesaian

$$HP = \left\{ x \middle| x \leq -4 \text{ atau } x \geq \frac{2}{3} \right\}$$

Permasalahan di atas dapat diselidiki dengan memperlihatkan grafik $y = |2x + 1|$ dan grafik $y = |x + 3|$, untuk setiap $x \in R$. Berdasarkan grafik pada Gambar 2.4, kita memperoleh grafik sebagai berikut.



Minta siswa mengamati grafik kedua fungsi nilai mutlak di samping. Minta siswa mengamati tanda pertidaksamaan pada soal dengan posisi kurva dengan kurva lainnya. Beri kesempatan pada siswa untuk menyampaikan pendapatnya.

Pertidaksamaan $|2x + 1| \geq |x - 3|$ dapat dilihat sebagai grafik fungsi $f(x) = |2x + 1|$ berada di atas grafik $f(x) = |x - 3|$. Dari Gambar 2.11 terlihat bahwa pernyataan itu benar untuk nilai x dalam himpunan $\left\{ x \mid x \leq -4 \text{ atau } x \geq \frac{2}{3}, x \in R \right\}$.

Contoh 2.6

Perhatikan kembali Masalah 2.8. Alternatif penyelesaian lainnya dari masalah ini dapat dilihat pada cara III berikut.

Contoh berikut adalah alternatif penyelesaian lainnya pada Masalah 2.8. Arahkan dan pandu siswa dalam menyelesaikan masalah ini dengan memanfaatkan $|T| = \sqrt{T^2}$.

Alternatif Penyelesaian

Cara III (Secara Aljabar)

Dengan mengingat bahwa $|T| = \sqrt{T^2}$ maka:

$|T - 34^oC| \leq 0{,}2^oC \Leftrightarrow \sqrt{(T - 34°C)^2} \leq 0.2°C$
(kuadratkan)

$$\Leftrightarrow (T - 34^oC)^2 \leq (0{,}2^oC)^2$$
$$\Leftrightarrow (T - 34^oC)^2 - (0{,}2^oC)^2 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow [(T - 34^oC) - (0{,}2^oC)]\,[(T - 34^oC) + (0{,}2^oC)] \leq 0$$
$$\Leftrightarrow [T - 34{,}2^oC]\,[T - 33{,}8^oC] \leq 0$$

Nilai pembuat nol adalah T = 34,2°C atau T = 33,8°C

$\{T\,|33{,}8^oC \leq T \leq 34{,}2^oC\}$

Contoh berikut adalah alternatif penyelesaian lainnya pada Masalah 2.9. Arahkan dan pandu siswa dalam menyelesaikan masalah ini dengan memanfaatkan $|y| = \sqrt{y^2}$.

Contoh 2.7

Perhatikan kembali Masalah 2.9. Alternatif penyelesaian lainnya dari masalah ini dapat dilihat pada cara II berikut.

Alternatif Penyelesaian

Dengan mengingat bahwa y bilangan real, $|y| = \sqrt{y^2}$ maka:

$$|(0,5x + 0,33) - (0,475x + 0,35)| \leq 0,05$$
$$\Leftrightarrow |0,025x - 0,02| \leq 0,05$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(0,025x - 0,02)^2} \leq 0,05 \textit{ (kuadratkan)}$$
$$\Leftrightarrow (0,025x - 0,02)^2 \leq (0,05)^2$$
$$\Leftrightarrow (0,025x - 0,02)^2 - (0,05)^2 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow [0,025x + 0,03][0,025x - 0,07] \leq 0$$

Nilai pembuat nol adalah x = -1,2 dan x = 2,8

Selang nilai x yang membuat pertidaksamaan bernilai nonpositif, adalah $-1{,}2 \leq x \leq 2{,}8$, tetapi karena $x = 0$ adalah posisi diam tentara atau posisi awal peluru, maka lintasan peluru haruslah pada interval $x \geq 0$. Dengan demikian, interval $-1{,}2 \leq x \leq 2{,}8$ akan kita iriskan kembali dengan

$x \geq 0$ seperti berikut.

$$\{x \mid 0 \leq x \leq 2{,}8\}$$

Diskusi

Diskusikan kembali dengan teman – temanmu! Tentukan penyelesaian umum pertidaksamaan linear nilai mutlak dengan bentuk umum berikut dengan memanfaatkan $|x| = \sqrt{x^2}$:

$|x| \leq c$ untuk $c \geq 0$

$|x| \geq c$ untuk $c \geq 0$

$|ax + b| \leq c$ untuk $c \geq 0$, $a, b, c, \in R$

$|ax + b| \geq c$ untuk $c \geq 0$, $a, b, c, \in R$

$|ax + b| \leq |cx + d|$ untuk $a, b, c, \in R$

Arahkan siswa membentuk kelompok diskusi. Minta siswa menyelesaikan masing – masing pertidaksamaan linear di samping. (Satu bentuk untuk satu kelompok). Minta setiap kelompok mempresentasikan hasil kerjanya. Arahkan siswa untuk membandingkan jawaban dengan diskusi sebelumnya (memanfaatkan Definisi 2.1).

Berikan soal - soal uji kompetensi ini sebagai tugas di rumah bagi siswa. Tujuan pemberian uji kompetensi ini adalah untuk mengetahui apakah siswa sudah memahami tentang konsep pertidak–samaan linear dengan penerapannya terhadap nilai mutlak

Uji Kompetensi 2.2

Selesaikan soal-soal berikut.

1. Dengan menggunakan Definisi 2.1 maka ubahlah bentuk nilai mutlak berikut!

   a. $|x-2|$

   b. $|5x-15|$

   c. $\left|\frac{5x}{6}-3\right|$

   d. $|x|+|2x-5|$

   e. $|x-1|+|x|+|x+1|$

2. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan berikut!

   a. $|x-2|=6$

   b. $|3x-5|=7$

   c. $|x|+|x-5|=7$

   d. $|2x-2|+|3x-8|=5$

   e. $|x-1|+|2x|+|3x+1|=6$

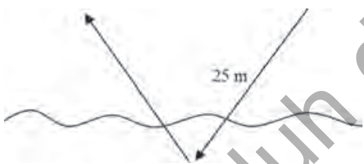
3. Sketsalah grafik $y=\left|\frac{x}{3}-2\right|+6$, untuk setiap nilai x bilangan real.

   Petunjuk: Tentukan pertama kali pasangan koordinat titik yang memenuhi persamaan pada tabel berikut. Kamu diperbolehkan menambahi pasangan koordinat titik sebanyak mungkin pada tabel. Letakkanlah pasangan koordinat titik yang kamu peroleh pada bidang koordinat kartesius. Selanjutnya, hubungkanlah pasangan titik – titik tersebut.

x	...	3	4	5	6	7	8	9	10	...
y	...	7	...	...	6	...	...	7	...	...
(x,y)	...	(3,7)	...	...	(6,6)	...	...	(9,7)	...	...

4. Sketsalah grafik $y = |3x - 2| - 1$, untuk $-2 \leq x \leq 5$, x bilangan real.

5. Seekor burung camar laut terbang pada ketinggian 17 meter melihat ikan pada jarak 25 m pada kedalaman 3 meter dari permukaan laut. Burung tersebut terbang menukik lurus ke permukaan laut dan menyelam sejauh 3 meter untuk menangkap ikan dan langsung bergerak kembali ke permukaan dan langsung terbang kembali seperti gambar.



Jika diasumsikan permukaan laut sebagai sumbu x, ketinggian sebagai sumbu y, posisi ikan pada koordinat $I(0,-3)$ dan pergerakan burung memenuhi fungsi $f(x) = k|x - a| + b$ dari ketinggian 17 m sampai kedalaman 3 m, dengan a, b, k, dan x adalah bilangan real, tentukanlah nilai a, b dan k.

6. Selesaikanlah pertidaksamaan nilai mutlak sebagai berikut!

   a. $|3 - 2x| < 4$

   b. $\left|\frac{x}{2} + 5\right| \geq 9$

   c. $|3x + 2| \leq 5$

   d. $2 < \left|2 - \frac{x}{2}\right| \leq 3$

   e. $|x + 5| \leq |1 - 9x|$

7. Buktikan

   a. $\left| a + b \right| \leq \left| a + b \right|$

   b. $\left| a - b \right| \leq \left| a + b \right|$

8. Buktikan bahwa grafik persamaan linier dua variabel adalah garis lurus!

9. Gambarkanlah semua titik (x,y) pada bidang yang memenuhi $\left| x + y \right| + \left| x - y \right| = 2$.

10. Gambarkanlah himpunan penyelesaian pertidak–samaan linear berikut ini dalam bentuk diagram garis!

    a. $4 < \left| x + 2 \right| + \left| x - 1 \right| < 5$

    b. $\left| x - 2 \right| \leq \left| x + 1 \right|$

Berikan kerja Projek di samping kepada siswa untuk diselesaikan. Dari kerja Projek, dapatkan informasi tingkat pemahaman siswa terhadap konsep, keterampilan berpikir, ketelitian, semangat kerja dan kejujuran.
Minta dibuat laporan kerja dan membuat persiapan untuk presentasi di depan kelas.

Projek

Dalam kehidupan sehari-hari terdapat banyak besaran yang nilainya dinyatakan dalam persamaan linear. Misalkan saja besar tagihan telepon terhadap pemakaian.

- Dapatkan informasi tentang besaran-besaran yang nilainya dinyatakan dengan persamaan linear dan bagaimana bentuk persamaan linear tersebut.
- Demikian juga dengan nilai mutlak. Ketelitian selalu dinyatakan dengan nilai mutlak, karena ketelitian tidak memperhatikan apakah penyimpangan pada nilai sebenarnya adalah positif atau negatif. Dengan kata lain, penyimpangan sebesar –0,05 adalah sama tidak telitinya dengan penyimpangan sebesar 0,05.
- Dapatkan informasi tentang penggunaan nilai mutlak dalam kehidupan sehari-hari yang kamu jumpai.

- Buat laporan tentang hasil pencarian dan pengkajianmu serta paparkan hasilnya di depan kelas. Akan lebih menarik apabila kamu juga membandingkan beberapa alternatif pembayaran yang ditawarkan oleh penyedia jasa (misalnya: telepon, listrik) untuk menentukan alternatif mana yang paling menguntungkan sesuai dengan penggunaan.

D. PENUTUP

Penutup ini merupakan rangkuman dari beberapa konsep yang telah dipelajari pada bab ini. Sampaikan kepada siswa bahwa konsep persamaan dan pertidaksamaan ini adalah materi prasyarat untuk pelajaran sistem persamaan dan sitem pertidaksamaan pada bab selanjutnya.

Setelah kita membahas materi persamaan dan pertidaksamaan linear, maka dapat diambil berbagai simpulan sebagai acuan untuk mendalami materi yang sama pada jenjang yang lebih tinggi dan mempelajari bahasan berikutnya. Beberapa simpulan disajikan sebagai berikut.

1. Nilai mutlak sebuah bilangan adalah positif. Nilai ini sama dengan akar sebuah bilangan selalu nonnegatif. Misal $a \in$ R, maka $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$.
2. Persamaan dan pertidaksamaan linear dapat melibatkan fungsi nilai mutlak yang diberikan. Misalnya, jika diketahui $|ax + b| = c$, untuk $a, b, c \in R$, $c \geq 0$ maka menurut definisi nilai mutlak diperoleh persamaan $ax + b = c$ atau $-ax - b = c$. Demikian juga untuk pertidaksamaan linear.
3. Bentuk umum persamaan linear dinyatakan: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = 0$ dengan setiap koefisien merupakan bilangan real. Jika $a_1 \neq 0$ dan $a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$, maka diperoleh persamaan linear satu variabel dan jika $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ dan $a_3 = a_4 = ... = a_n = 0$, maka diperoleh persamaan linear dua variabel.
4. Pertidaksamaan linear adalah suatu kalimat terbuka yang menggunakan relasi $<$, $\leq$, $>$, dan $\geq$. Misal $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n > 0$ dengan setiap koefisien dan variabelnya merupakan bilangan-bilangan real. Jika $a_1 \neq 0$ dan $a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$, maka ditemukan

pertidaksamaan linear satu variabel dan jika $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ dan $a_3 = a_4 = ... = a_n = 0$, maka diperoleh pertidaksamaan linear dua variabel.

5. Himpunan penyelesaian suatu persamaan dan pertidaksamaan linear adalah suatu himpunan yang anggotanya nilai variabel yang memenuhi persamaan atau pertidaksamaan tersebut. Banyak anggota himpunan penyelesaiannya sebuah persamaaan linear dapat (1) tepat satu, (2) lebih dari satu (berhingga atau tak berhingga banyak penyelesaian), atau (3) tidak punya penyelesaian.
6. Grafik persamaan linear satu variabel adalah sebuah garis lurus yang horizontal atau vertikal.
7. Grafik persamaan linear dua variabel adalah sebuah garis lurus yang mungkin memotong sumbu x dan sumbu y atau tidak memotong sumbu x tetapi memotong sumbu y atau hanya memotong sumbu y.

Konsep dan sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan linear telah kita temukan dan kita terapkan dalam penyelesaian masalah kehidupan dan penyelesaian masalah matematika. Penguasaan kamu terhadap berbagai konsep dan sifat-sifat persamaan dan pertidaksamaan linear adalah syarat perlu untuk mempelajari bahasan sistem persamaan linear dua variabel dan tiga variabel serta sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel. Kita akan temukan konsep dan berbagai sifat sistem persamaan linear dua dan tiga variabel melalui penyelesaian masalah nyata yang sangat bermanfaat bagi dunia kerja dan kehidupan kita. Persamaan dan pertidaksamaan linear memiliki himpunan penyelesaian demikian juga sistem persamaan dan pertidaksamaan linear. Pada bahasan sistem persamaan linear dua dan tiga variabel, kamu pelajari berbagai metode penyelesainya untuk menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan dan pertidaksamaan tersebut. Seluru konsep dan aturan-aturan yang kita temukan diaplikasikan dalam penyelesaian masalah yang menuntut kamu berpikir kreatif, tangguh menghadapi masalah, mengajukan ide-ide secara bebas dan terbuka, baik terhadap teman maupun terhadap guru.

Bab 3

Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar

Setelah mengikuti pembelajaran sistem persamaan dan pertidaksamaan linear, siswa mampu:

1. Menunjukkan sikap bertanggung jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan.
2. Mendeskripsikan konsep sistem persamaan linear dua variabel serta pertidaksamaan linear dua variabel dan mampu menerapkan berbagai strategi yang efektif dalam menentukan himpunan penyelesaiannya serta memeriksa kebenaran jawabannya dalam pemecahan masalah matematika.
3. Menggunakan SPLDV, SPLTV, dan sistem pertidaksamaan linear dua variabel (SPtLDV) untuk menyajikan masalah kontekstual dan menjelaskan makna setiap besaran secara lisan maupun tulisan.
4. Membuat model matematika berupa SSPLDV, SPLTV, dan SPtLDV dari situasi nyata dan matematika, serta menentukan jawab dan menganalisis model sekaligus jawabannya.

Pengalaman Belajar

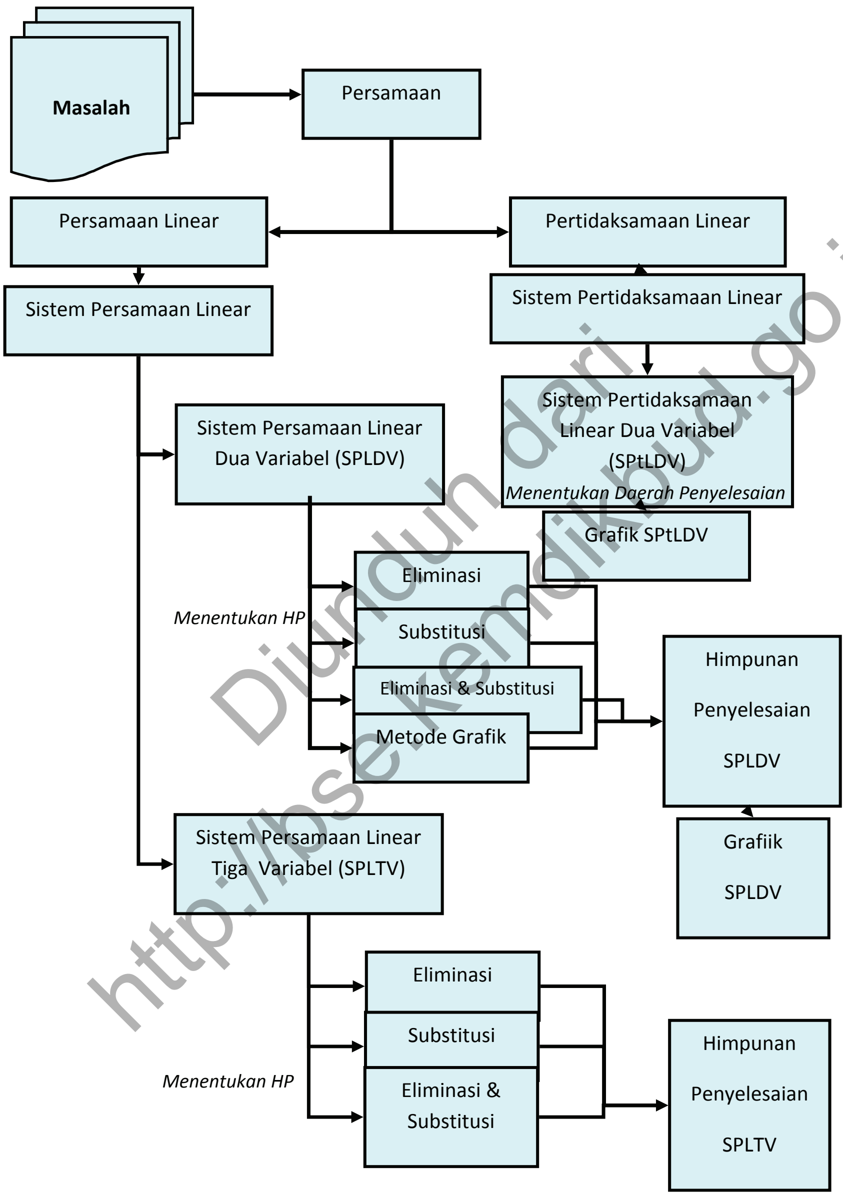
Melalui pembelajaran materi sistem persamaan dan pertidaksamaan linear, siswa memperoleh pengalaman belajar:

- menjelaskan karakteristik masalah otentik yang penyelesaiannya terkait dengan model Matematika sebagai SPLDV atau SPLTV atau SPtLDV.
- merancang model matematika dari sebuah permasalahan otentik yang merupakan SPLDV atau SPLTV atau SPtLDV.
- menyelesaikan model matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan.
- menginterpretasikan hasil penyelesaian masalah yang diberikan.
- menemukan ciri-ciri SPLDV atau SPLTV atau SPtLDV dari model matematika.
- menuliskan konsep SPLDV atau SPLTV atau SPtLDV berdasarkan ciri-ciri yang ditemukan dengan bahasanya sendiri.
- bekerjasama dalam memecahkan masalah dalam kelompok yang heterogen.
- berlatih berpikir kritis dan kreatif.

Istilah Penting

- *SPL*
- *SPLDV*
- *SPLTV*
- *Himpunan Penyelesaian*
- *Grafik Persamaan Linear*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Persamaan dan sistem persamaan linear dua variabel sudah kamu pelajari saat duduk di kelas VIII SMP. Pada saat ini kita perdalam kajian, pemahaman dan jangkauan pemikiran tentang konsep sistem persamaan linear dari apa yang kamu sudah miliki sebelumnya. Pola pikir dan cara belajar yang dituntut dalam mempelajari materi ini, kamu berupaya menemukan ide-ide, berpikir kritis dan kreatif dalam mencari strategi penyelesaian masalah dan mengungkapkannya, berdiskusi dengan teman, mengajukan pertanyaan kepada guru dan teman kelompok.

Proses pembelajaran sistem persamaan linear, kita menerapkan problem-based learning dengan pendekatan scientific learning. Sehingga dalam mengonstruksi konsep sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) dan tiga variabel (SPLTV) berbasis pemecahan masalah melalui penemuan model matematika berupa SPLDV dan SPLTV. Selanjutnya menganalisis sifat-sifat dari objek-objek matematika yang dikaji.

Banyak permasalahan dalam kehidupan nyata yang menyatu dengan fakta dan lingkungan budaya kita terkait dengan sistem persamaan linear. Permasalahan-permasalahan tersebut kita jadikan bahan inspirasi dan menyusun model-model matematika yang ditemukan dari proses penyelesaiannya. Model matematika tersebut, kita jadikan bahan abstraksi untuk membangun konsep sistem persamaan linear dan konsep sistem persamaan linear dua variabel.

Cermatilah masalah berikut!

Masalah-3.1

Gambar 3.1 Kartu Bergambar

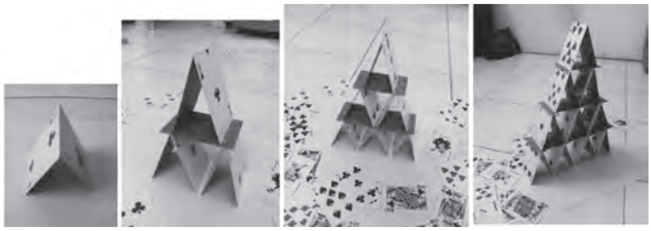
Kartu bergambar dapat dijadikan bahan inspirasi menemukan konsep dan aturan yang terkait dengan sistem persamaan linear melalui masalah yang dirancang.

Motivasi siswa belajar dengan menunjukkan kebergunaan matematika dalam pemecahan Masalah 3.1. Untuk menemukan konsep sistem persamaan linear dua variabel, ajukan pada siswa masalah-masalah di samping secara berkelanjutan untuk dipecahkan. Upayakan siswa lebih dahulu berusaha memikirkan, bersusah payah mencari ide-ide, berdiskusi dalam kelompok, mencari pemecahan masalah di dalam kelompok.

Anto bermain kartu bergambar bersama temannya. Ketika mereka selesai bermain, Budi, adiknya Anto mengumpulkan kartu-kartu tersebut. Kemudian ia asyik membangun rumah bertingkat yang diberi nama **Rumah**

Meminta siswa mengamati susunan kartu pada rumah kartu bertingkat di samping dan menganalisis bagian-bagiannya serta memunculkan berbagai pertanyaan kritis sekitar penggunaan kartu sesuai banyaknya tingkat rumah.

Kartu. Susunan kartu untuk setiap tingkatnya dapat dicermati pada gambar berikut.



Gambar 3.2 Rumah Kartu Bertingkat

Mendorong siswa merenungkan berbagai pertanyaan arahan dalam pemecahan masalah, dan memikirkan berbagai konsep matematika yang diperlukan atau yang terkait dalam pemecahan masalah. Selanjutnya ingatkan kembali materi prasyarat yang telah dipelajari sebelumnya, misalnya konsep relasi dan fungsi untuk menemukan hubungan banyak kartu dan banyak tingkat rumah.

Setelah Budi menyusun beberapa rumah kartu bertingkat, ia bertanya dalam pikirannya, bagaimana hubungan antara banyak kartu dan banyak tingkat rumah. Berapa banyak kartu yang dibutuhkan untuk membangun rumah kartu 30 tingkat? Dapatkah kamu membantu Budi untuk menyelesaikan masalah tersebut?

Sebelum kamu menyelesaikan masalah tersebut, kira-kira apakah tujuan masalah tersebut dipecahkan terkait materi? Pikirkan strategi apa yang kamu gunakan. Selesaikanlah masalah di atas. Agar pekerjaan kamu lebih efektif renungkan dan pikirkan beberapa pertanyaan berikut:

1) informasi apa saja yang kamu temukan dalam masalah tersebut?
2) konsep apa saja yang terkait untuk menemukan hubungan antara banyak tingkat rumah dan banyak kartu yang digunakan untuk setiap tingkatnya?
3) bagaimana strategi kamu menemukan hubungan antara banyak tingkat rumah dan banyak kartu bergambar yang digunakan?
4) misalkan t menyatakan banyak tingkat rumah dan k banyak kartu yang dipakai untuk setiap tingkat. Dapatkah kamu rumuskan aturan yang memasangkan banyak tingkat rumah dengan banyak kartu bergambar yang digunakan?
5) adakah kesulitan yang harus didiskusikan dengan teman atau bertanya kepada guru untuk menentukan hubungan antara t dan k?

6) apakah aturan pemasangan yang kamu rumuskan memenuhi situasi penyusunan kartu pada gambar di atas?
7) adakah sistem persamaan linear kamu temukan dari rumusan hubungan antara banyak kartu dan banyak tingkat?
8) dapatkah kamu menjawab permasalahan Budi? Berapa banyak kartu yang digunakan untuk membangun rumah kartu 30 tingkat?

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Gambar 3.2 di atas, diperoleh informasi sebagai berikut.
Rumah kartu bertingkat 1 mengunakan 2 kartu
Rumah kartu bertingkat 2 mengunakan 7 kartu
Rumah kartu bertingkat 3 mengunakan 15 kartu
Rumah kartu bertingkat 4 mengunakan 26 kartu

Sehingga banyak tingkat dan banyak kartu dapat dikorespondensikan satu-satu membentuk suatu relasi sama dengan atau banyak kartu dapat dinyatakan dalam banyak tingkat rumah.
Temukan aturan yang memasangkan banyak tingkat (t) dengan banyak kartu (k).

Banyak Tingkat Rumah (t)	Banyak Kartu (k)	Pola Banyak Kartu
1	2	1 + 1 + 0
2	7	4 + 2 + 1
3	15	9 + 3 + 3
4	26	16 + 4 + 6

Cermati pola, bahwa bilangan 1, 4, 9, 16 adalah kuadrat dari bilangan 1, 2, 3, 4 dan bilangan 1, 2, 3, 4 adalah banyaknya tingkat rumah. Apakah bilangan 0, 1, 3, dan 6 dapat dinyatakan dalam t^2 dan t? Asumsikan bahwa jawabanya adalah ya.
Misalkan x dan y adalah bilangan bilangan yang akan ditentukan berkaitan dengan banyak kartu dan banyak tingkat rumah yang dinyatakan dalam persamaan berikut.

Minta siswa menemukan aturan yang pemasangan banyak tingkat dengan banyak kartu yang digunakan untuk setiap tingkat dengan mengaitkan banyak tingkat dan banyak kartu.

Memberi bantuan kepada siswa dalam menyelesaikan masalah. Arahkan siswa melihat pola, bahwa bilangan 1, 4, 9, 16 adalah kuadrat dari bilangan 1, 2, 3, 4 dan bilangan-bilangan 1, 2, 3, 4 adalah bilangan tingkat itu sendiri. Kemudian tanyakan pada siswa apakah bilangan 0, 1, 3, dan 6 dapat dinyatakan dalam t^2 dan t. Diharapkan siswa menyatakan relasi $k = xt^2 + yt$

$$k = x\,t^2 + y\,t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Cermati kembali Gambar 3.2! Untuk mendapatkan model matematika berupa dua persamaan linear dengan variabel x dan y yang saling terkait.

Untuk $t = 1$ dan $k = 2$ diperoleh persamaan $x + y = 2$

Untuk $t = 2$ dan $k = 7$ diperoleh persamaan $4x + 2y = 7$

Dengan demikian kita peroleh dua buah persamaan linear dua variabel, yaitu

$$\begin{cases} x + y = 2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 4x + 2y = 7 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Ingat Kembali!

Materi yang telah dipelajari sebelumnya di SMP, yaitu tentang cara menentukan himpunan penyelesaian dua persamaan linear dengan berbagai metode (eliminasi, substitusi, eliminasi dan substitusi, serta metode grafik).

Ingat Sifat 2.1 pada Bab II dan metode eliminasi di SMP dapat digunakan untuk menentukan nilai x dan y dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ 4x + 2y = 7 \end{array}\right| \begin{array}{l} \times 4 \\ \times 1 \end{array} \Big| \longrightarrow \begin{array}{l} 4x + 4y = 8 \\ 4x + 2y = 7\ - \\ \hline 2y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ 4x + 2y = 7 \end{array}\right| \begin{array}{l} \times 2 \\ \times 1 \end{array} \Big| \longrightarrow \begin{array}{l} 2x + 2y = 4 \\ 4x + 2y = 7\ - \\ \hline -2x = -2 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{array}$$

Diperoleh himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

- Evaluasi hasil yang diperoleh, apakah hasil yang diperoleh adalah solusi terbaik.

Minta siswa mengingat kembali materi yang telah dipelajari sebelumnya di SMP tentang cara menentukan himpunan penyelesaian dua buah persamaan linear dengan berbagai metode (eliminasi, substitusi, eliminasi dan substitusi, serta metode grafik biarkan siswa yang menentukan cara apa yang mereka gunakan). Kemudian menyuruh siswa menentukan nilai x dan y. Diharapkan siswa memilih salah satu metode dan menggunakannya menentukan nilai variabel x dan y. Sebagai alternatif pilihan siswa adalah metode eliminasi.

Minta siswa mengevaluasi hasil yang diperoleh, apakah hasil yang diperoleh adalah solusi terbaik dengan menguji nilai x

$$k = xt^2 + yt$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 = \dfrac{3}{2}(1)^2 + \dfrac{1}{2}(1) \text{ (pernyataan benar)} \\ 7 = \dfrac{3}{2}(2)^2 + \dfrac{1}{2}(2) \text{ (pernyataan benar)} \\ 15 = \dfrac{3}{2}(3)^2 + \dfrac{1}{2}(3) \text{ (pernyataan benar)} \\ 26 = \dfrac{3}{2}(4)^2 + \dfrac{1}{2}(4) \text{ (pernyataan benar)} \end{array}$$

Dapat disimpulkan, aturan pengaitan banyak tingkat dengan banyak kartu yang digunakan untuk membangun rumah kartu adalah $k = xt^2 + yt$ dengan nilai konstanta x dan y adalah $\frac{3}{2}$ dan $\frac{1}{2}$.

- Tentukan banyak kartu yang digunakan membuat rumah kartu dengan 30 tingkat.

Untuk $t = 30$, diperoleh $k = \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t = \frac{3}{2}(30)^2 + \frac{1}{2}(30)$

$$k = \frac{3}{2}(900) + 15 = 1365$$

Jadi, banyak kartu yang dibutuhkan membangun rumah kartu bertingkat 30 adalah 1365 kartu.

dan y pada model SPLDV sebelumnya. Beri kesempatan bertanya tentang hal-hal yang belum dipahami.

Setelah nilai x dan y diperoleh dengan metode eliminasi Selanjutnya minta siswa menentukan banyak kartu yang digunakan membuat rumah kartu dengan 30 tingkat.

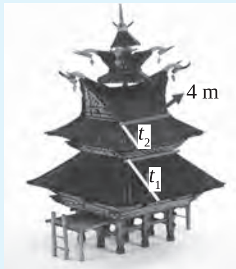
Perhatikan masalah berikut yang dirancang pada sebuah rumah adat salah satu suku di Indonesia.

Arahkan siswa memahami masalah, menggali informasi yang terkandung dalam masalah dan menginterpretasikan masalah dalam gambar dengan memperhatikan bentuk asli rumah adat pada gambar di samping.

Katakan pada siswa, sebelum kamu memecahkan masalah, koordinasi pengetahuan dan keterampilan yang kamu sudah miliki untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan dan struktur-struktur yang belum diketahui. Pahamilah Masalah-3.2 dan meminta siswa menuliskan hal apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan interpretasikan masalah dalam gambar.

Beri bantuan kepada siswa menginterpretasikan masalah dalam gambar. Minta siswa mengamati bangun apa yang terbentuk dan sifat-sifat trapesium, sifat kesebangunan, rumus luas segitiga yang perlu diingatkan kembali, Arahkan siswa melakukan matematisasi dan manipulasi aljabar

Masalah-3.2



Gambar 3.3 Rumah Adat

Perhatikan gambar rumah adat di samping.

Atap rumah terbuat dari ijuk pohon aren (Nira). Perban-dingan banyak ijuk yang digunakan untuk menutupi permukaan atap bagian bawah dengan permukaan atap bagian tengah adalah 7 : 4. Perbandingan tinggi permukaan atap bagian bawah dengan tinggi permukaan atap bagian tengah adalah 3 : 2. Coba tentukan berapa panjang alas penampang atap bagian bawah dan tengah.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Perbandingan luas penampang atap bagian bawah dengan bagian tengah adalah 7 : 4.

Perbandingan tinggi penampang atap bagian bawah dengan bagian tengah adalah 3 : 2.

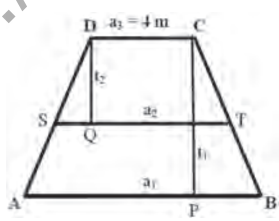
Panjang sisi puncak atap bagian tengah (panjang sisi a_3 pada Gambar-3.3) adalah 4 m.

Ditanya:

a. Panjang alas penampang atap bagian bawah

b. Panjang alas penampang atap bagian tengah

Perhatikan ilustrasi masalah seperti gambar berikut!



Perhatikan gambar di samping, konsep apa yang melekat pada penampang atap rumah adat tersebut.

Misalkan panjang $AB = a_1$, $ST = a_2$, dan $DC = a_3 = 4$ m

Misal: Luas penampang atap bawah ($ABCD$) = L_1

Luas penampang atap tengah ($STCD$) = L_2

Karena penampang atap rumah berbentuk trapesium, maka

$$L_1 = \frac{1}{2}(AB + DC) \times \text{tinggi}$$

$$L_1 = \frac{1}{2} \times (a_1 + a_3) \times t_1$$

$$L_2 = \frac{1}{2}(ST + DC) \times \text{tinggi} = \frac{1}{2} \times (a_2 + a_3) \times t_2$$

Karena perbandingan banyak ijuk yang digunakan menutupi penampang atap bagian bawah dengan banyaknya ijuk yang digunakan menutupi atap bagian tengah adalah 7 : 4, dapat diartikan bahwa $L_1 : L_2 = 7 : 4$.

Petunjuk Lakukan matematisasi dan manipulasi aljabar untuk mendapatkan model matematika berupa persamaan linear.

$$L_1 : L_2 = 7 : 4 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_3)t_1}{(a_2 + a_3)t_2} = \frac{7}{4}$$

$$a_3 = 4 \text{ m dan } t_1 : t_2 = 3 : 2 \Rightarrow \frac{3(a_1 + 4)}{2(a_2 + 4)} = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(a_1 + 4)}{(a_2 + 4)} = \frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow 6a_1 + 24 = 7a_2 + 28$$

$$\Rightarrow 6a_1 - 7a_2 = 4$$

$\therefore 6a_1 - 7a_2 = 4$ ....(1)

Ingat Kembali!

Syarat dua bangun datar dikatakan sebangun.

Cermati bahwa trapesium *ABCD* dan trapesium *STCD* adalah sebangun.

$$PB = \frac{1}{2}(a_1 - a_3) \text{ dan } SQ = \frac{1}{2}(a_2 - a_3)$$

Karena trapesium *ABCD* dan trapesium *STCD* adalah sebangun,

untuk mendapatkan model matematika berupa sistem persamaan linear.

Bantu siswa mengubah bahasa verbal ke bahasa matematika dan menerapkan rumus menentukan luas trapesium dengan menggunakan perbandingan banyak ijuk yang digunakan menutupi penampang atap bagian bawah dengan banyaknya ijuk yang digunakan menutupi atap bagian tengah.

Minta siswa mengingat kembali apa yang dimaksud dua bangun dikatakan sebangun dan mencermati bahwa trapesium ABCD dan trapesium STCD adalah sebangun. Dari hasil pengamatan tersebut, siswa diharapkan melakukan matematisasi dan menemukan persamaan linear dengan variabel a_1 dan a_2

Terapkan sifat dua bangun dikatakan sebangun dan ukuran-ukuran yang diketahui dalam soal. Guru boleh memberikan anak tangga (bantuan) *pada siswa, tetapi upayakan mereka sendiri yang memanjatnya (melakukan tugas-tugas pemecahan masalah) menuju tingkat pemahaman dan proses berpikir yang lebih tinggi.*

$$\frac{PB}{SQ} = \frac{t_1}{t_2} \Rightarrow \frac{a_1 - a_3}{a_2 - a_3} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 - 4}{a_2 - 4} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2a_1 - 8 = 3a_2 - 12$$

$$\Rightarrow 2a_1 - 3a_2 = -4$$

$\therefore\ 2a_1 - 3a_2 = -4$ ....(2)

Bantu siswa menerapkan metode substitusi yang telah dipelajari di SMP dalam menentukan nilai a_1 dan a_2. Uji pemahaman siswa dengan mengajukan pertanyaan, seperti mengapa -4 diubah menjadi $-\frac{24}{6}$.

Dengan demikian, kita telah memperoleh dua persamaan linear dengan variabel a_1 dan a_2 yang saling terkait, yaitu:

$$\begin{cases} 6a_1 - 7a_2 = 4 & \text{.......................................(1)} \\ 2a_1 - 3a_2 = -4 & \text{.......................................(2)} \end{cases}$$

Ingat Sifat 2.1 pada Bab II dan metode substitusi di SMP dapat digunakan untuk menentuka nilai x dan y dapat ditentukan sebagai berikut

Dari persamaan (1) diperoleh

$6a_1 - 7a_2 = 4 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6}$ ....(3)

Subtitusikan persamaan (3) ke persamaan (2), diperoleh

$$a_1 = \frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6} \Rightarrow 2a_1 - 3a_2 = -4$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6}\right) - 3a_2 = -4$$

$$\Rightarrow \frac{14}{6}a_2 + \frac{8}{6} - \frac{18}{6}a_2 = -\frac{24}{6}$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{6}a_2 = \frac{-32}{6}$$

$$\Rightarrow a_2 = 8$$

Menguji pemahaman siswa dengan mengajukan pertanyaan, apakah nilai a_1 = 10 m dan a_2 = 8 m memenuhi persamaan (1) dan (2) di atas.

$$a_2 = 8 \Rightarrow a_1 = \frac{7}{6}a_2 + \frac{4}{6} = \frac{56}{6} + \frac{4}{6} = \frac{60}{6}$$

$$\Rightarrow a_1 = 10$$

Himpunan penyelesaian persamaan linear $6a_1 - 7a_2 = 4$ dan $2a_1 - 3a_2 = -4$ adalah {(10,8)}.

Dengan demikian diperoleh panjang alas penampang atap bagian bawah a_1 = 10 m dan panjang alas penampang atap bagian tengah a_2 = 8 m.

Dari pemecahan Masalah-3.1dan Masalah-3.2 diperoleh model matematika berupa sistem persamaan linear dua variabel.

$$\begin{cases} x + y = 2 & \text{...(1)} \\ 4x + 2y = 7 & \text{...(2)} \end{cases}$$

- Dari pemecahan masalah-2 diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 6a_1 - 7a_2 = 4 & \text{..(1)} \\ 2a_1 - 3a_2 = -4 & \text{..(2)} \end{cases}$$

Meminta siswa mengecek kembali kebenaran langkah-langkah pemecahan Masalah 3.1 dan Masalah 3.2. Selanjutnya siswa diarahkan menemukan beberapa model matematika berupa sistem persamaan linear dari langkah pemecahan masalah. Diharapkan siswa menemukan dua contoh model SPLDV seperti tertera di samping.

Diskusi

Masih ingatkah kamu contoh sistem persamaan linear dua variabel ketika belajar di SMP. Perhatikan kembali setiap langkah penyelesaian Masalah-3.1 dan Masalah-3.2.

- ♦ Coba temukan contoh sistem persamaan linear dari setiap permasalahan yang merupakan sistem persamaan linear dua variabel.
- ♦ Temukan ciri-ciri sistem persamaan linear tersebut dan diskusikan dengan temanmu secara klasikal.

Definisi 3.1

Sistem persamaan linear adalah himpunan beberapa persamaan linear yang saling terkait, dengan koefisien-koefisien persamaan adalah bilangan real.

Sistem persamaan linear dua variabel merupakan sistem persaman linear. Berikut ini didefinisikan sistem persamaan linear dua variabel.

Memotivasi siswa menuliskan ciri-ciri sistem persamaan linear dua variabel secara individual dan mendiskusikan hasilnya secara kelompok. Diharapkan siswa menuliskan ciri-ciri berikut

Ciri-ciri sistem persamaan linear dua variabel.

- *Merupakan sistem persamaan linier.*
- *Memuat persamaan dengan dua variabel.*

Berdasarkan ciri-ciri sistem persamaan linear di atas, suruh siswa menuliskan pengertian sistem persamaan linear dua variabel dengan kata-katanya sendiri dan hasilnya diskusikan secara klasikal.

Definisi 3.2

Sistem persamaan linear dua variabel (SPLDV) adalah suatu sistem persamaan linear dengan dua variabel.

Selanjutnya guru bersama-sama dengan siswa menuliskan bentuk umum sistem persamaan linear dua peubah dan menguji pemahaman siswa terhadap persyaratan atau batasan konsep SPLDV.

Bentuk umum sistem persamaan linear dengan dua variabel x dan y adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \text{.........................(1)} \\ a_2x + b_2y = c_2 & \text{.........................(2)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 bilangan real; a_1 dan b_1 tidak keduanya 0; a_2 dan b_2 tidak keduanya 0.

x, y : variabel real

a_1, a_2 : koefisien variabel x

b_1, b_2 : koefisien variabel y

c_1, c_2 : konstanta persamaan

Ajak siswa diskusi dalam kelompok dan beri kebebasan berpendapat, mengajukan ide-ide terkait permasalahan yang diajukan. Hasil diskusi siswa, diharapkan diperoleh jawaban sebagai berikut.

Diberikan dua persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ dan $2x + 3y = 2$. Kedua persamaan ini tidak membentuk sistem persamaan linear dua variabel sebab persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ bukan persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ linear. Jika persamaan

Diskusi

Ujilah pemahamanmu. Diskusikan permasalahan di bawah ini dengan kelompokmu.

1. Diberikan dua persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4$ dan $2x + 3y = 2$.

   Apakah kedua persamaan ini membentuk sistem persamaan linear dua variabel?

2. Diberikan dua persamaan $x = 3$ dan $y = -2$. Apakah kedua persamaan tersebut membentuk sistem persamaan linear dua variabel?

Contoh 3.1

Diberikan dua persamaan $x = 3$ dan $y = -2$. Kedua persamaan linear tersebut mem-bentuk sistem persamaan linear dua variabel sebab kedua persamaan linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk $x + 0y = 3$ dan $0x + y = -2$ dan variabel x dan y pada kedua persaman memiliki nilai yang sama dan saling terkait.

Untuk lebih mendalami sistem persamaan linear, cermatilah masalah berikut.

Contoh 3.2

Diberikan beberapa sistem persamaan linear berikut.

a) $2x + 3y = 0$ ………………………… (1a)
   $4x + 6y = 0$ ………………………… (1b)

b) $3x + 5y = 0$………………………… (2a)
   $2x + 7y = 0$………………………… (2b)

Apakah sistem persamaan linear tersebut memiliki penyelesaian tunggal atau banyak? Apakah persamaan-persamaan dalam sistem persamaan tersebut dapat disederhanakan?

Alternatif Penyelesaian

a) $2x + 3y = 0$………………………… (1a)
   $4x + 6y = 0$ ………………………… (1b)

memiliki lebih dari satu penyelesaian, misalnya (3, –2), (–3, 2) dan termasuk (0, 0). Persamaan (1b) merupakan kelipatan dari (1a) sehingga (1b) dapat disederhanakan mnjadi $2x + 3y = 0$. Kedua persamaan tersebut memiliki suku konstan nol dan grafik kedua persamaan berimpit. Apabila sebuah SPLDV memiliki penyelesaian tidak semuanya nol dikatakan memiliki penyelesaian tak trivial.

b) $3x + 5y = 0$ ………………………… (2a)
   $2x + 7y = 0$………………………… (2b)

   memiliki suku konstan nol dan hanya memiliki penyelesaian tunggal, yaitu (0, 0) (mengapa?). Apabila sebuah SPLDV memiliki penyelesaian tunggal (dalam contoh ini $x = 0$ dan $y = 0$), maka SPLDV dikatakan memiliki penyelesaian trivial. SPLDV yang memiliki penyelesaian trivial, maka persamaan tersebut tidak dapat lagi disederhanakan.

Kedua sistem persamaan linear di atas adalah sistem persamaan linear homogen.

diselesaikan sehingga diperoleh persamaan $x + y = 4xy$ tidak linear.
Jawaban soal nomor dua pada Latihan-3.1 lihat Contoh 3.1.

Untuk lebih memahami definisi di atas, ajukan contoh dan bukan contoh yang ada pada buku siswa. Minta siswa memberikan alasan, apakah sistem persamaan yang diberikan termasuk contoh atau bukan contoh sistem persamaan linear dua variabel dan cermati pemahaman siswa melalui alasan-alasan yang diberikan.

Beri bantuan kepada siswa, berupa contoh-contoh soal penggunaan konsep dan aturan SPLDV dalam langkah penyelesaiaanya. Ajak siswa mencoba menyelesaikan sendiri Contoh 3.2 bagian b, setelah bersama-sama dengan guru menyelesaian bagian a.

Ajak siswa mengamati kembali Contoh 3.3 dan menemukan ciri-ciri sebuah sistem persamaan linear yang homogen. Arahkan siswa untuk menuliskan pengertian sistem persamaan linear yang homogen.

Arahkan siswa memahami Contoh 3.3 dan beri kesempatan bertanya tentang apa saja yang belum dipahami terkait penyelesaian soal. Minta salah satu siswa untuk menjelaskan langkah-langkah penyelesaian soal Contoh 3,4, serta uji pemahaman siswa, dengan mengajukan beberapa pertanyaan. Misalnya, apa syarat sebuah SPLDV memiliki penyelesaian tak trivial.

Definisi 3.3

Sistem persamaan linear homogen merupakan sistem persamaan linear dengan suku konstan sama dengan nol dan memenuhi salah satu dari dua hal berikut:
1. Sistem tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial.
2. Sistem tersebut mempunyai tak berhingga banyak penyelesaian tak trivial selain penyelesaian trivial.

Untuk memperdalam pemahaman kamu, mari cermati contoh berikut.

Contoh 3.3

Untuk nilai σ apakah sistem persamaan

$$\left.\begin{aligned}(\sigma-3)x + y &= 0\\ x + (\sigma-3)y &= 0\end{aligned}\right\}$$

mempunyai penyelesaian yang tak trivial?

Alternatif Penyelesaian

$(\sigma - 3)\,x + y = 0 \;\Leftrightarrow\; y = -(\sigma - 3)\,x.$

Kita subtitusikan persamaan $y = -(\sigma - 3)\,x$ ke persamaan $x + (\sigma - 3)\,y = 0.$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x + (\sigma - 3)(-\sigma + 3)\,x = 0 \;&\Rightarrow\; x + (-\sigma^2 + 6\sigma - 9)\,x = 0\\ &\Rightarrow\; x = (\sigma^2 - 6\sigma + 9)\,x \end{aligned}$$

Agar mempunyai penyelesaian tak trivial, maka $x \neq 0$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} (\sigma^2 - 6\sigma + 9) = 1 \;&\Rightarrow\; \sigma^2 - 6\sigma + 8 = 0\\ &\Rightarrow\; (\sigma - 4)(\sigma - 2) = 0\\ &\Rightarrow\; \sigma = 4 \text{ atau } \sigma = 2 \end{aligned}$$

Agar sistem persamaan $(\sigma - 3)\,x + \; y = 0$ dan $x + (\sigma - 3\; y = 0$ mempunyai penyelesaian yang tak trivial, pastilah $\sigma = 4$ atau $\sigma = 2$.

- Coba uji nilai $\sigma = 4$ atau $\sigma = 2$ ke dalam persamaan. Apakah benar sistem tersebut memiliki penyelesaian yang tak trivial.

Untuk lebih mendalami aplikasi sistem persamaan linear di atas cermatilah contoh masalah berikut.

Contoh 3.4

Buktikan bahwa untuk setiap $n \in N$, pecahan $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ tidak dapat disederhanakan.

Bukti

Sebuah pecahan tidak dapat disederhanakan apabila Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) pembilang dan penyebutnya adalah 1.

FPB dari $(21n + 4)$ dan $(14n + 3)$ adalah 1, maka akan ditunjukkan adanya bilangan bulat s dan t sehingga $(21n + 4)\, s + (14n + 3)t = 1$.

Karena FPB dari $(21n + 4)$ dan $(14n +3)$ adalah 1, maka bilangan $(21n + 4)$ dan $(14n + 3)$ saling prima. Jika $(21n + 4)$ dan $(14n + 3)$ saling prima, maka ada bilangan bulat s dan t sedemikian hingga $(21n + 4)\, s + (14n + 3)t = 1$.

$$(21n + 4)\, s + (14n + 3)t = 1 \Rightarrow 21ns + 14nt + 4s + 3t = 1$$
$$\Rightarrow 7n\,(3s + 2t) + (4s + 3t) = 1$$

Agar persamaan $7n\,(3s + 2t) + (4s + 3t) = 1$ dipenuhi untuk setiap n, maka

$3s + 2t = 0$ .... (1)

$4s + 3t = 1$ .... (2)

Dengan menerapkan metode eliminasi terhadap Persamaan-1 dan 2, maka diperoleh s = -2 dan t = 3 (mengapa?).

Karena terdapat penyelesaian Persamaan-1 dan 2, yaitu s = -2 dan t = 3 dari, maka $(21n + 4)$ dan $(14n + 3)$ tidak memiliki faktor positif bersama selain 1 untuk semua nilai n di N.

Kesimpulannya pecahan $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ tidak dapat disederha–nakan (terbukti).

Minta siswa mencoba sendiri untuk membuktikan Masalah 3.3. Beri bantuan kepada siswa memahami langkah pembuktian pada masalah tersebut. Misalnya,

a) Jelaskan apa yang dimaksud sebuah pecahan tidak dapat disederhanakan. Misalnya ketika pembilang dan penyebut sama-sama bilangan prima.

b) Jelaskan apabila pembilang dan penyebut saling prima maka FPB adalah 1.

c) Jelaskan pada siswa, untuk menunjukkan bahwa bilangan (21n + 4) dan (14n + 3) memiliki FPBnya 1, maka dapat ditunjukkan adanya bilangan bulat s dan t sehingga (21n + 4) s + (14n + 3)t = 1.

Berikan soal-soal ujij kompetensi ini sebagai tugas tambahan. Tujuan uji ini adalah untuk mengetahui pemahaman siswa tentang konsep sistem persamaan linear dua variabel. Gunakan rubrik penilaian tugas yang tersedia pada akhir buku ini.

Uji Kompetensi 3.1

1. Beni membeli 4 buku tulis dan 3 pensil dengan harga Rp 12.500,00 dan Udin membeli 2 buku tulis dan sebuah pensil dengan harga Rp 5.500,00 pada toko yang sama. Susunlah model matematika untuk menentukan harga sebuah buku dan sebuah pensil.

2. Angga anak Pak Purwoko memiliki setumpuk kartu. Keseluruhan kartu dapat dipilah menjadi dua bagian menurut bentuknya. Satu jenis berbentuk persegi yang di dalamnya terdapat gambar seekor kerbau dan empat ekor burung. Satu jenis lagi berbentuk segitiga yang di dalamnya terdapat gambar seekor kerbau dan dua ekor burung. Lihat gambar berikut!

   Berapa banyak kartu persegi dan segitiga yang harus diambil dari tumpukan kartu agar jumlah gambar kerbau 33 dan jumlah gambar burung 100.

3. Apakah persamaan – persamaan di bawah ini membentuk sistem persamaan linear dua variabel? Berikan alasan atas jawabanmu!
   a. $xy + 5x = 4$ dan $2x - 3y = 3$, x,y bilangan asli
   b. $x - 3 = 0$ dan $y - 5 = 1$.

4. Jelaskan mengapa penyelesaian sebuah sistem persamaan linear (SPL) adalah salah satu dari tiga kemungkinan berikut: tidak punya penyelesaian, atau memiliki tepat satu penyelesaian atau memiliki tak berhingga penyelesaian!

SOAL TANTANGAN

5. Sebuah perahu yang bergerak searah arus sungai dapat menempuh jarak 46 km dalam 2 jam. Jika perahu tersebut bergerak berlawanan dengan arah arus sungai dapat menempuh jarak 51 km dalam 3 jam. Berapa kecepatan perahu dan kecepatan aliran air sungai?

Projek

Temukan sebuah SPLDV yang menyatakan model matematika dari masalah nyata yang kamu jumpai di lingkungan sekitarmu. Uraikan proses penemuan model matematika yang berupa SPLDV. Kemudian tentukan himpunan penyelesaiannya yang menyatakan pemecahan masalah nyata tersebut. Buat laporan dan persentasikan hasilnya di depan kelas.

Tugas proyek diberikan sebagai tugas individu untuk menginformasikan kepada siswa bahwa belajar tentang SPLDP sangat diperlukan dalam perkembangan ilmu dan dalam menyelesaikan permasalahan kehidupan. Gunakan rubrik penilaian projek untuk menilai hasil kerja siswa. Rubrik penilaian projek tersedia pada bagian akhir buku ini.

2. Menemukan Konsep Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Konsep persamaan linear dan sistem persamaan linear dua variabel sudah kamu temukan dari masalah yang bersumber dari fakta dan lingkungan budayamu. Dengan cara yang sama kita akan menemukan konsep sistem persamaan linear tiga variabel melalui penyelesaian masalah-masalah nyata. Perbedaan sistem persamaan linear dua variabel dengan sistem persamaan linear tiga variabel terletak pada banyak variabel yang akan ditentukan nilainya. Sekarang cermati beberapa masalah yang diajukan.

Cermati masalah petani di daerah Tapanuli berikut ini!

Mata pencaharian rakyat di Daerah Tapanuli pada umumnya adalah bekerja sebagai petani padi dan palawija, karyawan perkebunan sawit, karet, dan coklat, dan sebagai pedagang (khususnya yang tinggal di daerah wisata Danau Toba). Keterkaitan dan kebergunaan matematika (khususnya materi sistem persamaan linear) untuk menyelesaikan masalah yang dialami para petani, karyawan, dan para pedagang dapat dicermati lebih jauh. Ketika kita

Proses pembelajaran dalam pokok bahasan sistem persamaan linear ni, kita menerapkan problem-based learning dengan pendekatan scientific learning. Sehingga dalam mengonstruksi konsep sistem persamaan linear tiga variabel (SPLTV) berbasis pemecahan masalah melalui penemuan model matematika berupa SPLTV. Selanjutnya menganalisis sifat-sifat dari objek-objek matematika yang dikaji.Materi SPLDV sebagai *prasyarat, artinya seluruh konsep dan aturan dalam SPLDV digunakan dalam mempelajari SPLTV.*

menyelesaikan masalah-masalah tersebut menggunakan kerja matematika (coba-gagal, matematisasi, pemodelan masalah secara matematika, melakukan abstraksi, idealisasi, dan generalisasi), kita temukan konsep dan aturan-aturan matematika secara formal. Sekarang mari kita angkat sebuah permasalahan yang dihadapi para petani padi di Kecamatan Porsea di Kabupaten Toba Samosir. Permasalahannya terkait dengan pemakaian pupuk yang harganya cukup mahal.

Motivasi siswa belajar matematika, dengan menunjukkan kebermanfaatan matematika dalam pemecahan masalah nyata, seperti Masalah 3.4 di samping. Arahkan siswa mengamati masalah dan menemukan informasi dari masalah yang diajukan. Beri kesempatan kepada siswa mencoba menganalisis dan menggali berbagai pertanyaan terkait penyelesaian masalah tersebut.

Masalah-3.3

Gambar 3.4: Pematang sawah Pak Panjaitan

Pak Panjaitan memiliki dua hektar sawah yang ditanami padi dan sudah saatnya diberi pupuk. Terdapat tiga jenis pupuk (Urea, SS, TSP) yang harus digunakan agar hasil panen padi lebih maksimal. Harga per karung setiap jenis pupuk adalah Rp75.000,00; Rp120.000,00; dan Rp150.000,00. Banyak pupuk yang dibutuhkan Pak Panjaitan sebanyak 40 karung. Pemakaian pupuk Urea 2 kali banyaknya dari pupuk SS. Sementara dana yang disediakan Pak Panjaitan untuk membeli pupuk adalah Rp4.020.000,00. Berapa karung untuk setiap jenis pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan.

Renungkan pertanyaan yang diajukan pada Masalah 3.3, coba ingat kembali konsep persamaan linear yang sudah dipelajari sebelumnya di kelas X. Katakan pada siswa, sebelum kamu memecahkan masalah, koordinasi pengetahuan dan

Sebelum kamu menyelesaikan masalah tersebut, kira-kira apa tujuan masalah tersebut dipecahkan terkait materi. Pikirkan strategi apa yang kamu gunakan untuk mencapai tujuan. Jika kamu mengalami kesulitan silahkan berdiskusi dengan teman atau bertanya kepada guru. Sebagai arahan/petunjuk pengerjaan masalah, ikuti pertanyaan-pertanyaan berikut!

1) Bagaimana kamu menggunakan variabel untuk menyatakan banyak pupuk yang digunakan untuk setiap jenisnya dan hubungan pemakaian antar jenis pupuk?

2) Bagaimana kamu menggunakan variabel untuk menyatakan hubungan harga setiap jenis pupuk dengan dana yang tesedia?
3) Apa yang kamu temukan dari hubungan-hubungan tersebut? Adakah terkait dengan pengetahuan yang kamu miliki dengan melakukan manipulasi aljabar?
4) Apakah ada kesulitan yang harus kamu diskusikan dengan teman atau bertanya kepada guru untuk menentukan hubungan antar variabel, melakukan manipulasi aljabar, kepastian strategi yang kamu pilih ?
5) Adakah variabel yang harus kamu tentukan nilainya? Bagaimana caranya, apakah prinsip analogi (cara yang mirip) dapat digunakan ketika kamu menentukan nilai variabel pada sistem persamaan dua variabel?
6) Berapa karung pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan untuk setiap jenisnya? Masuk akalkah jawaban kamu?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

– Tiga jenis pupuk: Urea, SS, TSP. Harga per karung untuk setiap jenis pupuk Rp75.000,00; Rp120.000,00; dan Rp150.000,00.
– Banyak pupuk yang dibutuhkan 40 karung.
– Pemakaian pupuk Urea 2 kali lebih banyak daripada pupuk SS.
– Dana yang tersedia Rp4.020.000,00.

Ditanya:

Berapa karung untuk tiap-tiap jenis pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan?

Misalkan: x adalah banyak karung pupuk Urea yang dibutuhkan.
y adalah banyak karung pupuk SS yang dibutuhkan.
z adalah banyak karung pupuk TSP yang dibutuhkan.

Berdasarkan informasi di atas diperoleh hubungan-hubungan sebagai berikut.

$x + y + z = 40$..(1)

$x = 2y$...(2)

keterampilan yang kamu sudah miliki untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan dan struktur-struktur yang belum diketahui. Pahamilah Masalah-3.3 dan meminta siswa menuliskan hal apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan interpretasikan masalah dalam gambar. Meminta siswa memikirkan jawaban pertanyaan arahan yang tertera di samping.

Bantu siswa melakukan kegiatan matematisasi (kegiatan mengkoordinasi pengetahuan dan keterampilan yang dimiliki untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan dan struktur-struktur yang belum diketahui). Bantu siswa menemukan model matematika dengan menunjukkan hubungan x, y, dan, z seperti yang tertera pada buku siswa di samping.

Minta siswa menentukan nilai x, y dan z dengan memilih salah satu metode yang telah dipelajari sebelumnya. Sebagai alternatif pilihan siswa adalah metode eliminasi dan substitusi.

$75.000x + 120.000y + 150.000z = 4.020.000$..................(3)

- Subtitusikan Persamaan-2 ke dalam Persamaan-1, sehingga diperoleh

  $x = 2y$ dan $x + y + z = 40 \quad \Rightarrow \; 2y + y + z = 40$

  $\therefore\; 3y + z = 40$ ………………………………….. (4)

- Subtitusikan Persamaan-2 ke dalam Persamaan-3, sehingga diperoleh

  $x = 2y$ dan $75x + 120y + 150z = 4.020$

  $\Rightarrow\; 150y + 120y + 150z = 4.020$

  $\Rightarrow\; 270y + 150z = 4.020$

  Sederhanakan persamaan sehingga diperoleh

  $\therefore\; 27y + 15z = 402$ ....(5)

Untuk menentukan nilai y atau z, ingat Sifat 2.1 pada Bab II dan terapkan metode eliminasi terhadap persamaan (4) dan (5).

$$\begin{array}{l|l|} 3y + z = 40 & \times 15 \\ 27y + 15z = 402 & \times 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rl} 45y + 15z &= 600 \\ 27y + 15z &= 402 \quad - \\ \hline 18y \quad\quad &= 198 \end{array}$$

$18y = 198 \Rightarrow y = 11$

$y = 11$ dan $x = 2y \;\Rightarrow x = 22$

Dengan mensubtitusikan $x = 22$ dan $y = 11$ ke persamaan $x + y + z = 40$, diperoleh $z = 7$.

Uji pemahaman siswa terhadap langkah-langkah pemecahan masalah, dengan mengajukan beberapa pertanyaan. Misalnya, apakah nilai x = 22, y = 11, dan z = 7 memenuhi persamaan (1), (2), dan (3).

Dengan demikian nilai $x = 22$, $y = 11$, dan $z = 7$. Cek kembali nilai-nilai yang diperoleh ke setiap persamaan. Dapat diinterpretasikan bahwa banyak pupuk yang harus dibeli Pak Panjaitan dengan uang yang tersedia adalah 22 karung Urea, 11 karung SS, dan 7 karung pupuk TSP.

Motivasi siswa memecahkan masalah nyata terkait masalah waktu pembuatan ukiran yang banyak ditemui di pulau Bali. Kita dapat menjadikan masalah ini sebagai bahan

Nenek moyang kita memiliki keahlian seni ukir (seni pahat). Mereka dapat membuat berbagai jenis patung, ornamen-ornamen yang memiliki nilai estetika yang cukup tinggi. Pak Wayan memiliki keterampilan memahat patung yang diwarisi dari Kakeknya. Dalam melakukan pekerjaannya, ia dibantu dua anaknya; yaitu Gede dan

Putu yang sedang duduk di bangku sekolah SMK Jurusan Teknik Bangunan.

Gambar 3.4 Ukiran patung dan ornamen

Masalah-3.5

Suatu ketika Pak Wayan mendapat pesanan membuat 3 ukiran patung dan 1 ornamen rumah dari seorang turis asal Belanda dengan batas waktu pembuatan diberikan selama 5 bulan. Pak Wayan dan Putu dapat menyelesaikan keempat jenis ukiran di atas dalam waktu 7 bulan. Jika Pak Wayan bekerja bersama Gede, mereka dapat menyelesaikan pesanan dalam waktu 6 bulan. Karena Putu dan Gede bekerja setelah pulang sekolah, mereka berdua membutuhkan waktu 8 bulan untuk menyelesaikan pesanan ukiran tersebut. Dapatkah pesanan ukiran diselesaikan dengan batas waktu yang diberikan?

Sebelum kamu menyelesaikan masalah, manfaatkan pengetahuan dan keterampilan yang sudah kamu miliki untuk menemukan aturan, hubungan, dan struktur-struktur yang belum diketahui. Dalam menyelesaikan masalah di atas, langkah penyelesaiannya tersirat dalam beberapa pertanyaan berikut.

1) Bagaimana kamu menentukan kecepatan Pak Wayan, Putu, dan Gede bekerja menyelesaikan satu unit pesanan ukiran tersebut?
2) Dapatkah kamu menentukan hubungan tiap-tiap kecepatan untuk menyelesaikan pekerjaan dalam bentuk persamaan?

inpirasi menemukan konsep SPLTV. Arahkan siswa pada situasi Masalah 3.5 di samping.

Arahkan siswa mengamati memahami masalah, me-nganalisis dan mencoba memunculkan pertanyaan mengunakan informasi yang terkandung dalam masalah. Bantu siswa menemukan hubungan-hubungan antar waktu yang digunakan Pak Wayan, Putu, dan Gede dalam menyelesaikan pesanan ukiran.

Renungkan beberapa pertanyaan penting di samping, sebelum melangkah pada proses pemecahan masalah. Temukan lebih dahulu konse, sifat, dan aturan yang berguna untuk memecahkan Masalah 3.4.

3) Apa yang kamu temukan dari hubungan-hubungan tersebut? Adakah kaitannya dengan pengetahuan yang kamu miliki dengan melakukan manipulasi aljabar?
4) Adakah variabel yang harus kamu tentukan nilainya? Bagaimana caranya, apakah prinsip analogi (cara yang mirip) dapat digunakan ketika kamu menentukan nilai variabel pada sistem persamaan dua variabel?.
5) Bagaimana hubungan antara konsep jarak dan kecepatan dalam menentukan lamanya waktu yang digunakan untuk menyelesaikan suatu pekerjaan?
6) Adakah jawaban permasalahan yang kamu temukan?

Arahkan siswa memilih variabel untuk membangun model matematika berupa sistem persamaan tiga variabel menggunkan informasi yang diketahui dalam Masalah 3.4.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Pesanan pembuatan ukiran patung dan ornamen rumah dengan batas waktu 5 bulan.

Waktu yang dibutuhkan membuat patung dan ornamen:
Pak Wayan dan Putu adalah 7 bulan
Pak Wayan dan Gede adalah 6 bulan
Putu dan Gede adalah 8 bulan

Ditanya: Waktu yang diperlukan bila ketiganya bekerja bersama-sama.

Misalkan: Waktu yang dibutuhkan Pak Wayan adalah x bulan
Waktu yang dibutuhkan Putu adalah y bulan
Waktu yang dibutuhkan I Gede adalah z bulan

Berarti pekerjaan yang dapat diselesaikan Pak Wayan, Putu, dan Gede dengan waktu x, y, dan z, masing-masing $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, dan $\frac{1}{z}$ bagian pekerjaan.

- Pak Wayan dan Putu bekerja bersama dalam satu bulan dapat menyelesaikan $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ bagian pekerjaan.

  Karena Wayan dan Putu membutuhkan 7 bulan menyelesaikan pekerjaan, maka hal ini dapat dimaknai

  $$7\frac{1}{x}+7\frac{1}{y}=1 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7} \quad \text{.....................................(1)}$$

- Bila Pak Wayan dan Gede bekerja bersama dalam satu bulan dapat menyelesaikan $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)$ bagian pekerjaan. Karena Wayan dan Gede membutuhkan 6 bulan menyelesaikan pekerjaan, maka hal ini dapat dimaknai
  $6\frac{1}{x}+6\frac{1}{z}=1 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$ ....(2)
- Bila Putu dan Gede bekerja bersama dalam satu bulan dapat menyelesaikan $\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ bagian pekerjaan. Karena Putu dan Gede membutuhkan 8 bulan menyelesaikan pekerjaan, maka hal ini dapat dimaknai
  $8\frac{1}{y}+8\frac{1}{z}=1 \Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{8}$ ....(3)
- Temukan tiga persamaan linear yang saling terkait dari persamaan (1), (2), dan (3) di atas dengan memisalkan $p = \frac{1}{x}$, $q = \frac{1}{y}$, dan $r = \frac{1}{z}$.
- Tentukan nilai p, q, dan r dengan memilih salah satu metode yang telah dipelajari sebelumnya! Sebagai alternatif pilihan adalah metode campuran eliminasi dan substitusi.

Bantu siswa menerapkan metode substitusi yang telah dipelajari di SMP dalam menentukan nilai x, y dan z. Uji pemahaman siswa dengan mengajukan pertanyaan, seperti mengapa $7\frac{1}{x}+7\frac{1}{y}=1$ menjadi $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{7}$ dan apa tujuannya?

Ingat Sifat 2.1 pada Bab II dan terapkan metode eliminasi yang kamu pelajari di SMP pada persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$\begin{array}{l|l} 7p + 7q = 1 & \times 6 \\ 6p + 6r = 1 & \times 7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 42p + 42q = 6 \\ 42p + 42r = 7 \quad - \\ \hline 42q - 42r = -1 \end{array}$$

$\therefore\ 42q - 42r = -1$ .... (4)

Dengan menerapkan metode eliminasi pada persamaan (3) dan (4) diperoleh

Ingatkan siswa pada sifat persamaan pada Bab II dan metode eliminasi yang sudah dipelajari di SMP, gunakan untuk menentukan nilai p, q, dan r pada sistem persamaan yang diperoleh dari hasil pemecahan masalah. Latih siswa berpikir cermat dan akurat dalam melakukan perhitungan.

$$\begin{array}{l|l|} 8q + 8r = 1 & \times 42 \\ 42q - 42r = -1 & \times 8 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} 336q + 336r = 42 \\ 336q - 336r = -8 \quad - \\ \hline 672r = 50 \end{array}$$

Dari 672 r = 50 diperoleh $r = \dfrac{50}{672}$

$r = \dfrac{50}{672}$ disubtitusikan ke persamaan $8q + 8r = 1$

diperoleh $q = \dfrac{34}{672}$

$q = \dfrac{34}{672}$ disubtitusikan ke persamaan $7p + 7q = 1$

diperoleh $p = \dfrac{62}{672}$

Menguji pemahaman siswa dengan mengajukan pertanyaan, apakah nilai x, y, dan z memenuhi persamaan (1), (2), dan (3) di atas. Ajak siswa menginterpretasikan hasil pemecahan masalah dengan memberi arti t sebagai waktu pembuatan ukiran dan sebagai hasil pemecahan Masalah 3.4.

Cek kebenaran nilai p, q, dan r pada persamaan (1), (2), dan (3). Sebelumnya telah kita misalkan

$$p = \frac{1}{x} \text{ dan } p = \frac{62}{672} \Rightarrow x = \frac{672}{62} = 10,8$$

$$q = \frac{1}{y} \text{ dan } q = \frac{34}{672} \Rightarrow y = \frac{672}{34} = 19,76$$

$$r = \frac{1}{z} \text{ dan } r = \frac{50}{672} \Rightarrow z = \frac{672}{50} = 13,44$$

Karena x, y, dan z berturut-turut menyatakan waktu yang dibutuhkan Pak Wayan, Putu dan Gede menyelesaikan 1 set pesanan ukiran. Jika bekerja secara individual, maka Pak Wayan dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 10,84 bulan, Putu dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 19,76 bulan, dan I Gede dapat menyelesaikan sendiri pesanan dalam waktu 13,44 bulan.

Jadi, waktu yang diperlukan Pak Wayan dan kedua anaknya untuk menyelesaikan 1 set pesanan ukiran patung dan ornamen, jika mereka bekerja secara bersama-sama adalah

$$t = \frac{1}{\left(\dfrac{62}{672} + \dfrac{34}{672} + \dfrac{50}{672}\right)}$$

$$= \frac{672}{146}$$

t = 4,6 bulan

Karena waktu yang diberikan turis adalah 5 bulan, maka ternyata pekerjaan (pesanan) tersebut dapat diterima dan dipenuhi.

Meminta siswa mengecek kembali kebenaran langkah-langkah pemecahan Masalah 3.3 dan Masalah 3.4. Selanjutnya siswa diarahkan menemukan beberapa model matematika berupa sistem persamaan linear dari langkah pemecahan masalah. Diharapkan siswa menemukan dua contoh model SPLTV seperti tertera di samping.

Ingat Kembali!

Pengertian sistem persamaan linear dua variabel yang telah dipelajari sebelumnya dan mencermati kembali Persamaan-1, 2, dan 3 pada langkah penyelesaian Masalah-3.4 dan Masalah-3.5, temukan sistem persamaan linear tiga variabel pada langkah penyelesaian Masalah-3.4 dan Masalah-3.5!

- Dari penyelesaian Masalah 3.4 diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 7p + 7q = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 6p + 6r = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 8q + 8r = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

- Dari penyelesaian Masalah 3.5 diperoleh sistem persamaan linear

$$\begin{cases} x + y + z = 40 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ x = 2y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 75.000x + 120.000y + 150.000z = 4.020.000 \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

- Tuliskan ciri-ciri sistem persamaan linear tiga variabel secara individual dan diskusikan hasilnya dengan temanmu secara klasikal.

Memotivasi siswa menuliskan ciri-ciri sistem persamaan linear dua variabel secara individual dan mendiskusikan hasilnya secara kelompok. Diharapkan siswa menuliskan ciri-ciri berikut

Ciri-ciri sistem persamaan linear dua variabel.

- *Merupakan sistem persamaan linier.*
- *Memuat persamaan dengan tiga variabel.*

Berdasarkan ciri-ciri sistem persamaan linear di atas, suruh siswa me-nuliskan pengertian sistem persamaan linear tiga variabel.

Selanjutnya guru bersama-sama dengan siswa menuliskan bentuk umum sistem persamaan linear dua peubah dan menguji pemahaman siswa terhadap persyaratan atau batasan konsep SPLTV, dengan mengajukan beberapa pertanyaan. Misalnya, mengapa dipersyaratkan a_1, b_1, dan c_1 tidak ketiganya 0, dan sebagainya.

Bantu siswa memahami konsep SPLTV dengan beberapa contoh dan bukan contoh konsep. Minta siswa memberikan alasan

Definisi 3.4

Sistem persamaan linear tiga variabel adalah suatu sistem persamaan linear dengan tiga variabel.

Notasi:

Bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel x, y, dan z adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \text{.......... (1)} \\ a_2x + b_2y + c_3z = d_2 & \text{.......... (2)} \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & \text{.......... (3)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, dan d_3 bilangan real, dan a_1, b_1, dan c_1 tidak ketiganya 0; a_2, b_2, dan c_2 tidak ketiganya 0; dan a_3, b_3, dan c_3 tidak ketiganya 0.

x, y, z : variabel real
a_1, a_2, a_3 : koefisien variabel x
b_1, b_2, b_3 : koefisien variabel y
z_1, z_2, z_3 : koefisien variabel z
d_1, d_2, d_3 : konstanta persamaan

♦ Untuk lebih memahami definisi di atas, pahami contoh dan bukan contoh berikut ini. Berikan alasan, apakah sistem persamaan yang diberikan termasuk contoh atau bukan contoh sistem persamaan linear dua variabel atau tiga variabel?

Contoh 3.5

Diberikan tiga persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$, $2p + 3q - r = 6$, dan $p + 3q = 3$.

Ketiga persamaan ini tidak membentuk sistem persamaan linear tiga variabel sebab persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ bukan persamaan linear. Jika persamaan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$

diselesaikan diperoleh persamaan $z(x + y) + xy = 2xyz$ yang tidak linear. Alasan kedua adalah variabel-variabelnya tidak saling terkait.

mengapa sebuah sistem persamaan merupakan SPLTV dan bukan SPLTV.

Contoh 3.6

Diberikan dua persamaan $x = -2$; $y = 5$; dan $2x - 3y - z = 8$. Ketiga persamaan linear tersebut membentuk sistem persamaan linear tiga variabel sebab ketiga persamaan linear tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\left.\begin{aligned} x + 0y + 0z &= -2 \\ 0x + y + 0z &= 5 \\ 2x - 3y - z &= 8 \end{aligned}\right\}$$

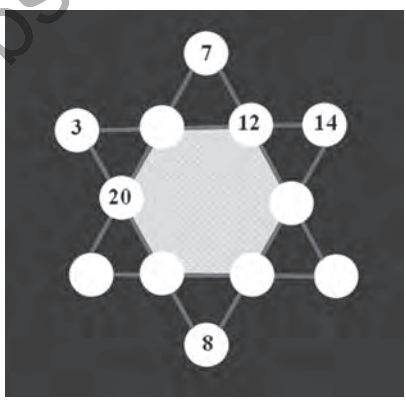
dan variabel-variabelnya saling terkait.

Selanjutnya perhatikan beberapa sistem persamaan linear tiga variabel (*SPLTV*) berikut.

1. Diberikan *SPLTV* $2x + 3y + 5z = 0$ dan $4x + 6y + 10z = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki lebih dari satu penyelesaian; misalnya, (3,–2,0), (–3, 2,0) dan termasuk (0,0,0). Selain itu, kedua persamaan memiliki suku konstan nol dan grafik kedua persamaan adalah berimpit. Apabila penyelesaian suatu *SPLTV* tidak semuanya nol, maka *SPLTV* itu disebut memiliki penyelesaian yang tak trivial.
2. Diberikan *SPLTV* $3x + 5y + z = 0$; $2x + 7y + z = 0$, dan $x - 2y + z = 0$. Sistem persamaan linear ini memiliki suku konstan nol dan mempunyai penyelesaian tunggal, yaitu untuk $x = y = z = 0$. Apabila suatu *SPLTV* memiliki himpunan penyelesaian $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, maka *SPLTV* itu disebut memiliki penyelesaian trivial $(x = y = z = 0)$.

Sebuah *SPLTV* dengan semua konstanta sama dengan nol disebut *SPLTV* homogen. Bila salah satu konstantanya tidak nol, maka *SPLTV* tersebut tidak homogen. *SPLTV* yang homogen memiliki dua kemungkinan, yaitu memiliki penyelesaian yang *trivial* atau memiliki banyak penyelesaian *nontrivial* selain satu penyelesaian *trivial*. Coba tuliskan definisi *SPLTV* yang homogen dan berikan contohnya, selain contoh di atas.

Uji Kompetensi 3.2

1. Apakah persamaan-persamaan di bawah ini membentuk sistem persamaan linear tiga variabel? Berikan alasan atas jawabanmu!
   a. $2x + 5y - 2z = 7$, $2x - 4y + 3z = 3$
   b. $x - 2y + 3z = 0$, $y = 1$, dan $x + 5z = 8$
2. Diberikan tiga persamaan
   $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = 9$; $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{3}$; dan $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 7$
   a. Apakah termasuk sistem persamaan linear tiga variabel? Berikan alasanmu!
   b. Dapatkah kamu membentuk sistem persamaan linear dari ketiga persamaan tersebut?
3. Seekor ikan mas memiliki ekor yang panjangnya sama dengan panjang kepalanya ditambah seperlima panjang tubuhnya. Panjang tubuhnya empat perlima panjang keseluruhan ikan. Jika panjang kepala ikan adalah 5 cm, berapa panjang keseluruhan ikan tersebut?
4. 

Isilah lingkaran kosong pada “bintang ajaib” dengan sebuah bilangan sehingga bilangan-bilangan pada satu garis memiliki jumlah yang sama!

5. Diberikan sistem persamaan linear berikut.
   $x + y + z = 4$
   $z = 2$
   $(t^2 - 4)z = t - 2$
   Berapakah nilai t agar sistem tersebut tidak memiliki penyelesaian, satu penyelesaian dan tak berhingga banyak penyelesaian?
6. Temukan bilangan-bilangan positif yang memenuhi persamaan $x + y + z = 9$ dan $x + 5y + 10z = 44$!
7. Diberikan dua persamaan sebagai berikut:
   $$\begin{cases} 7a - 6b - 2c = 9 \\ 6a + 7b - 9c = -2 \end{cases}$$
   Tentukan nilai $a^2 + b^2 - c^2$!
8. **SOAL TANTANGAN**

Seorang penjual beras, mencampur tiga jenis beras. Campuran beras pertama terdiri atas 1 kg jenis *A*, 2 kg jenis *B*, dan 3 kg jenis *C* dijual dengan harga Rp19.500,00. Campuran beras kedua terdiri atas 2 kg jenis *A* dan 3 kg jenis *B* dijual dengan harga Rp 19.000,00. Campuran beras ketiga terdiri atas 1 kg jenis *B* dan 1 kg jenis *C* dijual dengan harga Rp 6250,00. Harga beras jenis mana yang paling mahal?

Minta siswa mengaplikasikan konsep dan aturan pada SPLTV dalam menyelesaikan soal tantangan di samping. Selanjutnya mita siswa mengomunikasikan hasil kerjanya di depan kelas.

Tugas proyek diberikan sebagai tugas individu untuk menginformasikan kepada siswa bahwa belajar SPLTV sangat diperlukan dalam perkembangan ilmu dan dalam menyelesaikan permasalahan kehidupan dan bidang ilmu lain. Gunakan rubrik penilaian projek yang tersedia pada bagian akhir buku ini, untuk menilai hasil kerja siswa

Projek

Cari sebuah SPLTV yang menyatakan model matematika dari masalah nyata yang kamu temui di lingkungan sekitarmu. Uraikan proses penemuan model matematika tersebut dan selesaikan sebagai pemecahan masalah tersebut. Buat laporan hasil kerjamu dan hasilnya dipresentasikan di depan kelas.

Minta siswa mengingat kembali berbagai metode yang digunakan untuk menentukan himpunan penyelesaian SPLDV dan SPLTV yang telah dipelajari di SMP. Selanjutnya ajak siswa menemukan aturan eliminasi, substitusi, grafik, dan cara lain dalam menentukan himpunan penyelesaian dari sebuah sistem persamaan

3. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear

a. Menentukan Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Di kelas VIII SMP, kamu telah mempelajari berbagai metode menentukan himpunan penyelesaian suatu sistem persamaan linear dua variabel (*SPLDV*). Metode-metode tersebut antara lain: metode grafik, metode eliminasi, metode substitusi, dan campuran ketiga metode tersebut. Penggunaan yang lebih efektif dan efisien dari keempat metode tersebut dalam penyelesaian soal tergantung sistem persamaan linear yang diberikan, situasi masalah, dan waktu yang tersedia. Sekarang mari kita ulang kembali mempelajari metode-metode tersebut.

1). Metode Grafik

Berdasarkan Definisi 3.2, *SPLDV* terbentuk dari dua persamaan linear yang saling terkait. Sebelumnya kamu telah mengetahui bahwa grafik persamaan linear dua variabel berupa garis lurus. Pada langkah penyelesaian Masalah 3.1 telah diperoleh sistem persamaan linear dua variabel

$x + y = 2$ ....(1)

$4x + 2y = 7$ ....(2)

Bagaimana menggambar grafik (kurva) Persamaan-1 dan 2 di atas?
Langkah-langkah untuk menggambarkan grafik kedua persamaan linear tersebut tersirat dalam pertanyaan-pertanyaan berikut.

1. Bagaimana strategi kamu untuk mendapatkan titik-titik yang dilalui grafik kedua persamaan linear tersebut?
2) Apakah kamu masih ingat apa yang dimaksud gradien suatu garis lurus?
3) Ada berapa kemungkinan posisi dua garis dalam satu sumbu koordinat. Mengapa hal itu terjadi, pikirkan apa alasan kamu, cari hubungan-hubungan kedua garis lurus tersebut?
4) Dapatkah kamu gambarkan kemungkinan posisi dua garis lurus tersebut dalam sumbu koordinat?
5) Untuk persamaan yang diberikan, bagaimana posisi kedua grafik persamaan tersebut? Dapatkah kamu menuliskan himpunan penyelesaian yang kamu peroleh. Dalam bentuk apa anggota himpunan penyelesaian tersebut?

Mari kita terapkan langkah-langkah di atas.

♦ Menentukan titik-titik potong terhadap sumbu koordinat untuk Persamaan-1.

	$x + y = 2$	
x	0	2
y	2	0

Diperoleh titik-titik potong kurva $x + y = 2$ terhadap sumbu koordinat, yaitu titik (0, 2) dan (2, 0).

♦ Menentukan titik-titik potong terhadap sumbu koordinat untuk Persamaan-2.

	$4x + 2y = 7$	
x	0	$\frac{7}{4}$
y	$\frac{7}{2}$	0

Diperoleh titik-titik potong kurva $4x + 2y = 7$ terhadap sumbu koordinat, yaitu titik $(0, \frac{7}{2})$ dan $(\frac{7}{4}, 0)$.

Menyuruh siswa menggambarkan grafik Persamaan-1 dan Persamaan-2 menggunakan pengetahuan yang telah dimiliki sebelumnya pada bidang koordinat. Diharapkan siswa melakukan hal berikut.

a. Menentukan titik potong terhadap sumbu-x dan sumbu-y.

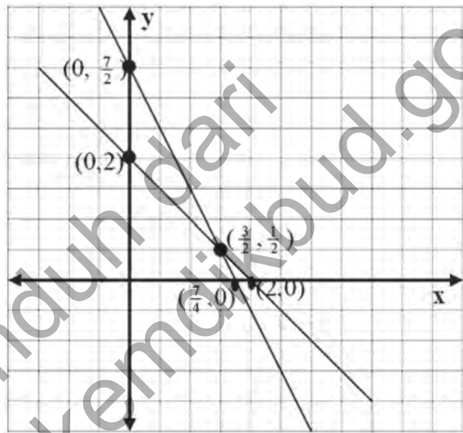
b. Memebuat tabel perhitungan nilai x dan y untuk memperoleh titik-titik yang dilalui garis pada persamaan (1) dan (2) di samping.

c. Mengambarkan garis untuk kedua persamaan pada sistem koordinat dengan bantuan kertas berpetak.

d. Menentukan titik potong kedua garis sebagai solusi sistem persamaan.

Cek ulang hasil pemecahan Masalah 3.1 dengan menentukan himpunan penyelesaian yang diperoleh dari langkah pemecahan

- ♦ Menarik garis lurus dari titik (0, 2) ke titik (2, 0) dan dari titik $(0, \frac{7}{2})$ ke titik $(\frac{7}{4}, 0)$.



Gambar 3.6 Grafik persamaan linear

Berdasarkan gambar grafik $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$, kedua garis lurus tersebut berpotongan pada sebuah titik, yaitu titik $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

Sehingga himpunan penyelesaian sistem persamaan linear $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$ adalah $\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

2) Metode Eliminasi

Metode eliminasi yang kamu kenal di SMP sudah kita terapkan terhadap *SPLDV* $x + y = 2$ dan $4x + 2y = 7$ pada langkah penyelesaian Masalah-3.1.
Nilai x dan y dapat ditentukan sebagai berikut.

$$
\begin{array}{l|l|}
x + y = 2 & \times 4 \\
4x + 2y = 7 & \times 1
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{l}
4x + 4y = 8 \\
4x + 2y = 7\ - \\
\hline
2y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l|}
x + y = 2 & \times 2 \\
4x + 2y = 7 & \times 1
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{l}
2x + 2y = 4 \\
4x + 2y = 7\ - \\
\hline
-2x = -3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}
\end{array}
$$

masalah dan diselesaikan dengan cara eliminasi, seperti yang tertera buku siswa di samping.

Diperoleh himpunan penyelesaian kedua persamaan adalah $\left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Sekarang mari kita pecahkan masalah berikut.

> Berdasarkan bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel, bagaimana cara menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan metode eliminasi?

Sebelum kamu menyelesaikan masalah ini, apakah kamu memahami tujuan masalah dipecahkan? Bagaimana strategi kamu memanfaatkan pengetahuan yang telah kamu miliki? Untuk itu perhatikan beberapa pertanyaan berikut.

1. Apa yang dimaksud mengeliminasi variabel x atau y dari Persamaan-1 dan 2 di atas?
2. Berapa kemungkinan melakukan eliminasi agar nilai x dan y diperoleh?
3. Dapatkah kamu menuliskan himpunan penyelesaian yang kamu peroleh? Dalam bentuk apa anggota himpunan penyelesaian tersebut?
4. Strategi apa yang kamu gunakan untuk menguji bahwa himpunan penyelesaian yang kamu peroleh sudah benar?

Berdasarkan Definisi 3.2, bentuk umum *SPLDV* dengan variabel x dan y adalah

$a_1x + b_1y = c_1$ ....(1)

$a_2x + b_2y = c_2$ ....(2)

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 bilangan real, dan a_1 dan b_1 tidak keduanya nol; a_2 dan b_2 tidak keduanya nol.

Langkah-1: Lakukan eliminasi terhadap variabel x dari Persamaan-1 dan 2

Ingat, hal ini dapat dilakukan jika koefisien a_1, dan a_2 tidak nol

$$\begin{array}{l|c|l} a_1 x + b_1 y = c_1 & \times 4 & \longrightarrow \; a_1 a_2 x + a_2 b_1 y = a_2 c_1 \\ a_1 x + b_2 y = c_2 & \times 1 & \; \underline{a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = a_1 c_2 \; -} \\ & & \; (a_2 b_1 - a_1 b_2)\, y = a_2 c_1 - a_1 c_2 \end{array}$$

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2)\, y = a_2 c_1 - a_1 c_2 \Rightarrow y = \frac{(a_2 c_1 - a_1 c_2)}{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}$$

Langkah-2: Lakukan eliminasi terhadap variabel y dari Persamaan-1 dan 2

Ingat, hal ini dapat dilakukan jika koefisien b_1 dan b_2 keduanya tidak nol

$$\begin{array}{l|c|l} a_1 x + b_1 y = c_1 & \times b_2 & \longrightarrow \; a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = b_2 c_1 \\ a_1 x + b_2 y = c_2 & \times b_1 & \; \underline{a_2 b_1 x + b_1 b_2 y = b_1 c_2 \; -} \\ & & \; (a_2 b_1 - a_2 b_1)\, x = b_2 c_1 - b_1 c_2 \end{array}$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x = b_2 c_1 - b_1 c_2 \Rightarrow x = \frac{(b_2 c_1 - b_1 c_2)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)} = \frac{(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}$$

Himpunan penyelesaian adalah

$$\left\{ \left(\frac{(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}, \frac{(a_2 c_1 - a_1 c_2)}{(a_2 b_1 - a_1 b_2)} \right) \right\}$$

Latih siswa berpikir deduktif untuk menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel secara umum berdasarkan konsep dan bentuk umum sistem persamaan linear

3) Metode Substitusi

Sekarang mari kita pecahkan masalah berikut dengan mengikuti langkah metode substitusi di atas.

> Bagaimana menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel (berdasarkan definisi 3.2) dengan metode substitusi?

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Definisi 3.2, bentuk umum sistem persamaan linear dengan dua variabel x dan y dinotasikan sebagai berikut.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \text{.. (1)} \\ a_2x + b_2y = c_2 & \text{.. (2)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 adalah bilangan-bilangan real; a_1 dan b_1 tidak keduanya nol; a_2 dan b_2 tidak keduanya nol.

Dari Persamaan-1 diperoleh

$a_1x + b_1y = c_1$ dan $a_1 \neq 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b_1}{a_1}y + \dfrac{c_1}{a_1}$

$x = -\dfrac{b_1}{a_1}y + \dfrac{c_1}{a_1}$ substitusi ke persamaan $a_2x + b_2y = c_2$ dan diperoleh

$$\Rightarrow a_2\left(-\frac{b_1}{a_1}y + \frac{c_1}{a_1}\right) + b_2y = c_2$$

$$\Rightarrow -\frac{a_2b_1}{a_1}y + \frac{a_2c_1}{a_1} + \frac{a_1c_2}{a_1}y = \frac{a_2c_3}{a_1}$$

$$\Rightarrow \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_1}y = \frac{(a_1c_2 - a_2c_1)}{a_1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

$y = \dfrac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$ substitusi ke persamaan $x = -\dfrac{b_1}{a_1}y + \dfrac{c_1}{a_1}$

dan diperoleh

$$x = -\frac{b_1(a_2c_1 - a_1c_2)}{a_1(a_2b_1 - a_1b_2)} + \frac{c_1}{a_1}$$

$$= \frac{b_1(a_1c_2 - a_2c_1)}{a_1(a_2b_1 - a_1b_2)} + \frac{c_1(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_1(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

dua variabel yang telah ditemukan dengan mempedomani langkah penyelesaian metode substitusi. Ajak siswa berpikir analitis pada setiap langkah penemuan solusi SPLDV secara umum.

Menyuruh siswa menguji, apakah

nilai $x = \dfrac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$

dan

$y = \dfrac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$

merupakan solusi sistem persamaan linear $a_1x + b_1y = c_1$ *dan* $a_2x + b_2y = c_2$.

Menyuruh siswa membandingkan himpunan penyelesaian SPLDV melalui metode eliminasi dan substitusi. Diharapkan siswa berkesimpulan hasilnya sama.

$$= \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

Himpunan penyelesaian adalah

$$\left\{\left(\frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}, \frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}\right)\right\}.$$

Beri bantuan kepada siswa untuk menggunakan metode eliminasi dan substitusi dalam memecahkan masalah aplikasi pada Contoh 3.5 di samping.

Contoh 3.7

Aku dan temanku adalah bilangan. Jika tiga kali aku ditambah temanku maka hasilnya adalah lima. Jika dua kali aku ditambah tiga kali temanku maka hasilnya adalah 8. Berapakah aku dan temanku?

Alternatif Penyelesaian

misalkan x = Aku; y = temanku, maka diperoleh

$3x + y = 5$..(1)

$2x + 3y = 8$..(2)

$3x + y = 5 \Rightarrow y = -3x + 5$

substitusikan $y = -3x + 5$ ke persamaan (2), maka diperoleh

$2x + 3(-3x + 5) = 8$

$2x - 9x + 15 = 8$

$x = 1$

substitusikan $x = 1$ ke $y = -3x + 5$, maka diperoleh $y = -3(1) + 5 = 2$.

Dengan demikian aku adalah 1 dan temanku adalah 2

Minta siswa menentukan himpunan penyelesaian SPLDV secara umum berdasarkan konsep dan bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel yang telah ditemukan dengan metode campuran

4) Metode Eliminasi dan Substitusi

Bagaimana menentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel dengan metode campuran eliminasi dan substitusi?

Berdasarkan Definisi 3.2, bentuk umum *SPLDV* dengan variabel x dan y adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \text{ ....(1)} \\ a_2x + b_2y = c_2 \text{ ....(2)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, dan c_2 bilangan real; a_1 dan b_1 tidak keduanya nol; a_2 dan b_2 tidak keduanya nol.

Langkah-1: Lakukan eliminasi terhadap variabel x

$$\begin{array}{l|l|l} a_1x + b_1y = c_1 & \times a_2 & \rightarrow a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 & \times a_1 & \underline{a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2} \; - \\ & & (a_2b_1 - a_1b_2)y = a_2c_1 - a_1c_2 \end{array}$$

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y = a_2c_1 - a_1c_2 \Rightarrow y = \frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

Langkah-2: Lakukan substitusi nilai y terhadap salah satu persamaan

$y = \dfrac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$ substitusi ke dalam Persamaan-1, $a_1x + b_1y = c_1$, dan diperoleh

$$a_1x + b_1\frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)} = c_1$$

$$\Rightarrow a_1x = c_1 - b_1\frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{c_1(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_1(a_2b_1 - a_1b_2)} - b_1\frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}$$

Himpunan penyelesaian adalah

$$\left\{\left(\frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}, \frac{(a_2c_1 - a_1c_2)}{(a_2b_1 - a_1b_2)}\right)\right\}$$

eliminasi dan substitusi. Hasil kerja siswa yang diharapkan, disajikan di bagian buku siswa di samping.

Untuk mendalami penguasaan siswa terhadap materi SPLDV dan SPLTV, latih siswa menyelesaikan soal pada Contoh 3.6. Beri bantuan kepada siswa untuk menggunakan metode eliminasi dan substitusi dalam memecahkan masalah aplikasi pada Contoh 3.6 dan Contoh 3.7 di samping.

Contoh 3.8

Ongkos bus untuk 2 orang dewasa dan tiga orang anak-anak adalah Rp 1.200.000,00 dan ongkos bus untuk 3 orang dewasa dan empat orang anak-anak adalah Rp 1.700.000,00. Jika sepasang suami istri dan dua orang anaknya akan berpergian dengan bus tersebut, berapakah ongkos yang harus dibayar mereka?

Alternatif Penyelesaian

misalkan x = ongkos dewasa; y = ongkos anak-anak, maka diperoleh

$$2x + 3y = 1.200.000 \text{ .... (1)}$$
$$3x + 4y = 1.700.000 \text{ .... (2)}$$

$$\begin{array}{l|l} 2x + 3y = 1.200.000 & \times 3 \\ 3x + 4y = 1.700.000 & \times 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x + 9y = 1.200.000 \\ 6x + 8y = 1.700.000 - \\ \hline y = 200.000 \end{array} \text{ .... (3)}$$

substitusikan (3) ke (1) maka diperoleh

$2x + 3\,(200.000) = 1.200.000$

$= 1.200.000$

$x = 300.000$

ongkos yang harus dibayar adalah

2 (300.000) + 2 (200.000) = 1.000.000

jadi ongkos yang harus dibayar adalah Rp 1.000.000

Diskusi

Berdasarkan kedudukan dua garis dalam satu sumbu kordinat, tentukan berapa kemungkinan penyelesaian suatu *SPLDV*. Diskusikan dengan temanmu. Beri contoh *SPLDV* untuk tiga kasus, gambarkan grafiknya dalam sumbu kordinat dan tentukan penyelesaiannya. Buat laporan hasil kerja kelompokmu dan sajikan di depan kelas!

b. Menentukan Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Penentuan himpunan penyelesaian *SPLTV* dilakukan dengan cara atau metode yang sama dengan penentuan penyelesaian *SPLDV*, kecuali dengan metode grafik. Umumnya penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel diselesaikan dengan metode eliminasi substitusi. Berikut akan disajikan contoh tentang menyelesaikan sistem persamaan linear tiga variabel dengan metode campuran eliminasi dan substitusi.

Contoh 3.9

Jumlah tiga bilangan sama dengan 45. Bilangan pertama ditambah 4 sama dengan bilangan kedua, dan bilangan ketiga dikurangi 17 sama dengan bilangan pertama. Tentukan masing-masing bilangan tersebut!

Bimbing siswa mengubah bahasa verbal ke bahasa matematika dengan menggunakan memisalkan bilangan pertama, kedua, dan ketiga dengan x, y, dan z. Bantu siswa menemukan model matematika berupa SPLTV dengan memanfaatkan informasi pada soal. Latih siswa berpikir sermat dan kritis dalam perhitungan dalam penentuan nilai x, y, dan z melalui penerapan metode eliminasi dan substitusi.

Alternatif Penyelesaian

misalkan x = bilangan pertama

y = bilangan kedua

z = bilangan ketiga

Pada soal di atas, diperoleh informasi keterkaitan bilangan x, y, dan z yang dinyatakan dalam persamaan berikut.

$x + y + z = \quad 45$ ....(1)

$x + 4 \quad = \quad y$ ....(2)

$z - 17 \quad = \quad x$ ....(3)

Ditanya:

Tentukan bilangan x, y, dan z!

Kita lakukan proses eliminasi pada persamaan (1) dan (2), sehingga diperoleh

$$\begin{array}{lcl} x + y + z & = & 45 \\ x - y & = & -4 \; + \\ \hline 2x + z & = & 41 \end{array}$$ ....(4)

Kita lakukan proses eliminasi pada persamaan (3) dan (4), sehingga diperoleh

$$\begin{array}{lcl} x - z & = & -17 \\ 2x + z & = & 41 \; + \\ \hline x & = & 8 \end{array}$$ ....(5)

Kita lakukan proses substitusikan (5) ke (2) diperoleh

$8 + 4 = y \Rightarrow y = 12$

Kita lakukan proses substitusikan (5) ke (3) diperoleh

$z - 17 = 8 \Rightarrow z = 25$

Meminta siswa mengevaluasi hasil pemecahan masalah dengan menguji nilai x, y, dan z ke sistem persamaan.

Dengan demikian bilangan x = 8, bilangan y = 12, dan bilangan z = 25.

Cara lain yang dapat kamu gunakan selain metode eliminasi, substitusi, dan campuran eliminasi substitusi (kamu coba sendiri) untuk menentukan penyelesaian SPLTV adalah cara determinan, menggunakan invers matriks yang akan kamu pelajari di kelas XI. Sekarang kita akan temukan penyelesaian sistem persamaan linear tiga variabel dengan metode lain.

Menyuruh siswa menentukan himpunan penyelesaian SPLTV secara umum berdasarkan

- Tentukan himpunan penyelesaian *SPLTV* secara umum berdasarkan konsep dan bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel yang telah ditemukan dengan mempedomani langkah penyelesaian metode eliminasi di atas untuk menemukan metode Sarrus.

konsep dan bentuk umum sistem per-samaan linear dua variabel yang telah ditemukan dengan mempedomani langkah penyelesaian metode eliminasi di atas untuk menemukan metode yang baru.

Berdasarkan Definisi 3.4, bentuk umum sistem persamaan linear dengan tiga variabel *x*, *y*, dan *z* adalah

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \text{...(3.3)} \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & \text{...(3.4)} \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & \text{...(3.5)} \end{cases}$$

dengan a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, dan d_3 bilangan real, dan a_1, b_1, dan c_1 tidak ketiganya 0; a_2, b_2, dan c_2 tidak ketiganya 0; dan a_3, b_3, dan c_3 tidak ketiganya 0.

***Langkah-1**:* Eliminasi variabel *x* dari (3.3) dan (3.4)

$$\begin{array}{l|l|} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \times a_2 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & \times a_1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1z = a_2d_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2z = a_1d_2 \quad - \\ \hline (a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 \end{array}$$

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 \text{ .... (3.6)}$$

***Langkah-2**:* Eliminasi variabel *x* dari (3.3) dan (3.5)

$$\begin{array}{l|l|} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \times a_3 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & \times a_1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} a_1a_3x + a_3b_1y + a_3c_1z = a_3d_1 \\ a_1a_3x + a_1b_3y + a_1c_3z = a_1d_3 \quad - \\ \hline (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 \end{array}$$

$$(a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 \text{ .... (3.7)}$$

***Langkah-3**:* Eliminasi variabel *y* dari (3.6) dan (3.7)

$$\begin{array}{l|l|} (a_2b_1 - a_1b_2)y + (a_2c_1 - a_1c_2)z = a_2d_1 - a_1d_2 & \times (a_3b_1 - a_1b_3) \\ (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_3c_1 - a_1c_3)z = a_3d_1 - a_1d_3 & \times (a_2b_1 - a_1b_2) \end{array}$$

Dari hasil perkalian koefisien variabel *y* pada (3.6) terhadap (3.7) dan hasil perkalian koefisien variabel *y* pada (3.7) terhadap (3.6) maka diperoleh

$$z=\frac{\left(\left(a_2d_1-a_1d_2\right)\left(a_3b_1-a_1b_3\right)-\left(a_3d_1-a_1d_3\right)\left(a_2b_1-a_1b_2\right)\right)}{\left(\left(a_2c-a_1c_2\right)\left(a_3b_1-a_1b_3\right)-\left(a_3c_1-a_1c_3\right)\left(a_2b-a_1b_2\right)\right)}$$

$$z=\frac{\left(\left(a_1a_1b_3d_2-a_1a_2b_3d_1-a_1a_3b_1d_2\right)-\left(a_1a_1b_2d_3-a_1a_3b_2d_1-a_1a_2b_1d_3\right)\right)}{\left(\left(a_1a_1b_3c_1-a_1a_2b_3c_1-a_1a_2b_1c_2\right)-\left(a_1a_1b_2c_3-a_1a_3b_2c_1-a_1a_2b_1c_3\right)\right)}$$

$$z=\frac{\left(\left(a_1b_3d_2-a_2b_3d_1-a_3b_1d_2\right)-\left(a_1b_2d_3-a_3b_2d_1-a_2b_1d_3\right)\right)}{\left(\left(a_1b_3c_1-a_2b_3c_1-a_2b_1c_2\right)-\left(a_1b_2c_3-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3\right)\right)}$$

$$z=\frac{\left(\left(a_3b_2d_1+a_1b_3d_2+a_2b_1d_3\right)-\left(a_1b_2d_3+a_3b_1d_2+a_2b_3d_1\right)\right)}{\left(\left(a_3b_2c_1+a_1b_3c_2+a_2b_1c_3\right)-\left(a_1b_2c_3+a_3b_2c_2+a_2b_3c_1\right)\right)}.$$

Berdasarkan rumus penentuan nilai, x, dan z yang ditemukan dengan cara eliminasi, minta siswa memodifikasi bentuk hasilnya ke bentuk hasil perkalian unsur-unsur dalam baris dan kolom. Jelaskan kepada siswa perubahan bentuk tersebut dan hasilnya seperti yang yang tersaji pada buku siswa. Selanjutnya bimbing siswa melakukan kegiatan matematisasi (mengkoordinasi pengetahuan dan keterampilan yang telah dimiliki siswa sebelumnya untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan dan struktur-struktur yang belum diketahui)

- ♦ Lakukan kegiatan matematisasi (mengkoordinasi pengetahuan dan keterampilan yang telah kamu miliki sebelumnya untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan dan struktur-struktur yang belum diketahui).

Nilai variabel z di atas dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian koefisien-koefisien variabel x, y dan konstanta pada sistem persamaan linear yang diketahui.

$$z=\frac{\left[\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & d_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right]}{\left[\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right]}$$

Petunjuk:
- Jumlahkan hasil perkalian bilangan-bilangan pada garis penuh dan hasilnya dikurangi dengan jumlah hasil perkalian bilangan-bilangan pada garis putus-putus.
- Lakukan pada pembilang dan penyebut.

Dengan menggunakan cara menentukan nilai z, ditentukan nilai x dan y dengan cara berikut.

$$x = \frac{\left|\begin{array}{ccc:cc} d_1 & b_1 & c_1 & d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 & d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 & d_3 & b_3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|} \qquad y = \frac{\left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & d_1 & c_1 & a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 & a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 & a_3 & d_3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc:cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right|}$$

Diskusi

Perhatikan ciri penyelesaian untuk *x*, *y*, dan *z* di atas. Coba temukan pola penentuan nilai *x*, *y*, dan *z*. Sehingga memudahkan menentukan penyelesaian SPLTV.

Meminta siswa menerapkan metode yang baru ditemukan untuk menentukan himpunan penyelesaian SPLTV tersebut dan membandingkannya dengan himpunan penyelesaian yang telah diperoleh sebelumnya.

Pada langkah penyelesaian Masalah 3.5 diperoleh sebuah sistem persamaan linear tiga variabel sebagai berikut.

$x + y + z = 40$ ....(1)

$x = 2y$ ....(2)

$75 + 120y + 150z = 4.020$ ....(3)

Ingat untuk menggunakan semua variabel harus pada ruas kiri, dan semua konstanta berada pada ruas kanan. Untuk itu *SPLTV* di atas diubah menjadi

$x + y + z = 40$ ....(1)

$x - 2y = 0$ ....(2)

$75 + 120y + 150z = 4.020$ ....(3)

Tentunya kamu dengan mudah memahami bahwa

$a_1 = 1$	$a_2 = 1$	$a_3 = 75$
$b_1 = 1$	$b_2 = -2$	$b_3 = 120$
$c_1 = 1$	$c_2 = 0$	$c_3 = 150$
$d_1 = 40$	$d_2 = 0$	$d_3 = 4020.$

Oleh karena itu, nilai *x*, *y*, dan *z* ditentukan sebagai berikut.

Latih siswa berpikir cermat dalam melakukan perhitungan dalam menentukan nilai x, y, dan z. Bimbing siswa menerapkan metode yang baru untuk menentukan nilai variabel x, y, dan z.

$$x = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 40 & 1 & 1 & 40 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 4020 & 120 & 150 & 4020 & 120 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 150 & 75 & 120 \end{array}\right|}$$

$$= \frac{(-8040+0+0)-(-12000+0+0)}{(-150+0+150)-(-300+0+120)} = \frac{3960}{180} = 22$$

$$y = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 40 & 1 & 1 & 40 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 75 & 4020 & 150 & 75 & 4020 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 150 & 75 & 120 \end{array}\right|}$$

$$= \frac{(0+0+6000)-(0+0+4020)}{180} = \frac{1980}{180} = 11$$

$$z = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 40 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 4020 & 75 & 120 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 75 & 120 & 150 & 75 & 120 \end{array}\right|}$$

$$= \frac{(-6000+0+4020)-(-8040+4800)}{180} = \frac{1260}{180} = 7$$

Ajak siswa mengevaluasi kembali nilai x, y, dan z dengan cara meminta siswa menguji nilai-nilai x, y, dan z ke dalam

Berdasarkan hasil perhitungan di atas diperoleh himpunan penyelesaian *SPLTV* tersebut adalah *HP* = {(22,11,7)}. Ternyata hasilnya sama dengan himpunan penyelesaian yang diperoleh dengan metode eliminasi dan substitusi sebelumnya.

- Dengan memperhatikan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear pada penyelesaian di atas, coba kamu tuliskan ciri-ciri suatu himpunan penyelesaian *SPL* dan hasilnya diskusikan secara klasikal.

Selanjutnya, dari semua penjelasan di atas, dapat kita tuliskan definisi himpunan penyelesaian sistem persamaan linear berikut ini.

Definisi 3.5

Penyelesaian sistem persamaan linear adalah nilai-nilai variabel yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.

Definisi 3.6

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear adalah himpunan semua penyelesaian sistem persamaan linear.

Sedangkan untuk *SPLDV* dan *SPLTV*, konsep himpunan penyelesain sistem persamaan linear tersebut, berturut-turut didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.7

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan dua variabel adalah himpunan semua pasangan terurut (x, y) yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.

Definisi 3.8

Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear dengan tiga variabel adalah himpunan semua pasangan terurut (x, y, z) yang memenuhi setiap persamaan linear pada sistem persamaan tersebut.

sistem persamaan di atas. Uji pemahaman siswa, dengan mengajukan pertanyaan mengapa x, y, dan z memenuhi ketiga persamaan (1), (2), dan (3).

Minta siswa mengingat kembali pengetahuan tentang himpunan penyelesaian suatu sistem persamaan linear yang telah dipelajari dan memperhatikan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear yang sudah diselesaikan. Suruh siswa menuliskan ciri-ciri suatu himpunan merupakan himpunan penyelesaian SPL dan hasilnya diskusikan secara klasikal. Selanjutnya ajak siswa untuk membuat beberapa definisi

Uji Kompetensi 3.3

Orientasikan beberapa soal dari Uji Kompetensi 3.3 untuk dikerjakan siswa secara individu melalui pemberian tugas. Nilai hasil kerja siswa dengan rubrik penilaian yang tersedia di akhir buku guru ini. Lakukan remedial bagi siswa yang belum menguasai pokok bahasan ini.

1. Tentukanlah himpunan penyelesaian setiap sistem persamaan linear berikut ini tanpa menggunakan cara aljabar, melainkan melalui metode grafik!

   a) $x - y = 3$
   $5x - 3y = 19$

   b) $3x - 2y = 1$
   $-x + 5y = 4$

   c) $2x - y = 0$
   $7x + 2y = 0$

   d) $4x - \frac{1}{2}y = 3$
   $12x + 7y = 26$

2. Dengan menggunakan kertas berpetak, tentukanlah himpunan penyelesaian melalui grafik setiap sistem persamaan berikut ini!

   a) $3x + 2y = 7$
   $x + 3y = 7$

   b) $4x + y = 2$
   $3x + 2y = -1$

3. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari:

   a) $4x + 2y = 5$
   $2x + 3y = \frac{15}{2}$

   b) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y = 1\frac{1}{6}$
   $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = -1\frac{1}{4}$

   c) $\frac{4}{x}x + \frac{3}{y}y = 11$
   $\frac{3}{x}x - \frac{4}{y}y = 2$

d) $\dfrac{x+1}{4} - \dfrac{y-2}{2} = 6$

$\dfrac{2x-2}{3} + \dfrac{3y-1}{6} = 7$

e) $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{y+1} = 6$

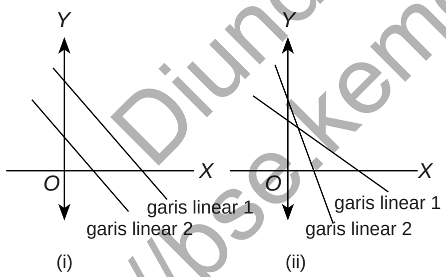
$\dfrac{2}{x+3} + \dfrac{1}{2y+2} = 4$

4. Kembali perhatikan sistem persamaan linear dua variabel,

$a_1x + b_1y = c_1$
$a_2x + b_2y = c_2$

Mungkinkah sistem tersebut tidak memiliki himpunan penyelesaian? Jika ya, tentukan syaratnya dan gambarkan!

5. Perhatikan kedua grafik sistem persamaan linear di bawah ini!



Gambar (i) dan (ii) merupakan grafik sistem persamaan linear dua variabel,

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

a) Tentukan syarat yang dimiliki sistem supaya memiliki grafik seperti gambar (i) dan (ii)!

b) Jelaskanlah perbedaan himpunan penyelesaian berdasarkan grafik (i) dan (ii)!

6. Tiga tukang cat, Joni, Deni, dan Ari, bekerja secara bersama-sama, dapat mengecat eksterior (bagian luar) sebuah rumah dalam waktu 10 jam kerja. Pengalaman Deni dan Ari pernah bersama-sama mengecat rumah yang serupa dalam 15 jam kerja. Suatu hari, ketiga tukang ini bekerja mengecat rumah serupa ini selama 4 jam kerja, setelah itu Ari pergi karena ada suatu keperluan mendadak. Joni dan Deni memerlukan tambahan waktu 8 jam kerja lagi untuk menyelesaikan pengecatan rumah. Tentukan waktu yang dibutuhkan tiap-tiap tukang, jika bekerja sendirian!
7. Sebuah bilangan terdiri atas tiga angka yang jumlahnya 9. Angka satuannya tiga lebih daripada angka puluhan. Jika angka ratusan dan angka puluhan ditukar letaknya, diperoleh bilangan yang sama. Tentukan bilangan tersebut!
8. Sebuah pabrik lensa memiliki 3 buah mesin A, B, dan C. Jika ketiganya bekerja, 5.700 lensa yang dapat dihasilkan dalam satu minggu. Jika hanya mesin A dan B bekerja, 3.400 lensa yang dihasilkan dalam satu minggu. Jika hanya mesin A dan C yang bekerja, 4.200 lensa yang dapat dihasilkan dalam satu minggu. Berapa banyak lensa yang dihasilkan oleh tiap-tiap mesin dalam satu minggu?
9. Selesaikan sistem persamaan yang diberikan dan tentukan nilai yang diminta.

   a) x, y, dan z adalah penyelesaian sistem persamaan:

      $3x + 4y - 5z = 12$

      $2x + 5y + z = 17$

      $6x - 2y + 3z = 17$

      Tentukan nilai $x^2 + y^2 + z^2$

   b) x, y, dan z adalah penyelesaian sistem persamaan:

      $x + 2y = -4$

      $2x + z = 5$

      $y - 3z = -6$

      Tentukan nilai $x.y.z$

   c) jika $\frac{x}{4} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 9$

$$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{2}{z} = 3$$

$$\frac{2}{x} + \frac{5}{y} - \frac{1}{z} = 5$$

Tentukan nilai $6xy$

d) jika $\frac{6}{x+2} + \frac{15}{y+3} + \frac{2}{z+1} = 8$

$$\frac{4}{x+2} + \frac{5}{y+3} + \frac{3}{z+1} = 6$$

$$\frac{8}{x+2} - \frac{10}{y+3} + \frac{5}{z+1} = 5$$

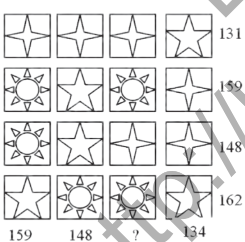
Tentukan nilai $x + y + z$

10. Diberikan sistem persamaan linear tiga variabel,

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Tentukan syarat yang harus dipenuhi sistem supaya memiliki solusi tunggal, memiliki banyak solusi, dan tidak memiliki solusi!

11.



Setiap simbol pada gambar di atas mewakili sebuah bilangan. Jumlah bilangan pada setiap baris terdapat di kolom kanan dan jumlah bilangan setiap kolom terdapat di baris bawah. Tentukan bilangan pengganti tanda tanya.

12. Diketahui $\frac{xy}{x+y} = a.\ \frac{xz}{x+z} = b$ dan

$\dfrac{yz}{y+z} = c$, dengan $a \neq 0$, $b \neq 0$, dan $c \neq 0$. Tentukan nilai x.

13. Jika $a + b + c = 0$ dengan a, b, $c \neq 0$, tentukan nilai

$$\left[a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)\right]^2$$

14. Nilai-nilai a, b, dan c memenuhi persamaan-persamaan berikut

$$\frac{25ab}{a+b} = \frac{1}{2},\ \frac{15bc}{b+c} = -1, \text{ dan } \frac{5ac}{a+c} = -\frac{1}{3}.$$

Hitunglah nilai $(a - b)^c$.

15.

Trisna bersama dengan Ayah dan Kakek sedang memanen tomat di ladang mereka. Pekerjaan memanen tomat itu dapat diselesaikan mereka dalam waktu 4 jam. Jika Trisna bersama kakeknya bekerja bersama-sama, mereka dapat menyelesaikan pekerjaan itu dalam waktu 6 jam. Jika Ayah dan kakek menyelesaikan pekerjaan itu, maka akan selesai dalam waktu 8 jam. Berapa waktu yang diperlukan Trisna, Ayah, dan Kakek untuk menyelesaikan panenan tersebut, jika mereka bekerja sendiri-sendiri?

16. Diberi dua bilangan. Bilangan kedua sama dengan enam kali bilangan pertama setelah dikurangi satu. Bilangan kedua juga sama dengan bilangan pertama dikuadratkan dan ditambah tiga. Temukanlah bilangan tersebut.

KUNCI JAWABAN SOAL-SOAL TANTANGAN

1. Soal Tantangan Pada Uji Kompetensi 3.1

Diketahui: - Kecepatan perahu, jika bergerak searah dengan aliran arus sungai Asahan adalah 46 km dalam 2 jam.

- Kecepatan perahu, jika bergerak berlawanan dengan aliran arus sungai Asahan adalah 51 km dalam 3 jam.

Ditanya: Berapa kecepatan perahu dan kecepatan aliran air sungai ?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan: - Kecepatan air sungai adalah x

- Kecepatan perahu y

- Jika perahu bergerak searah aliran air sungai maka kecepatannya bertambah sebesar kecepatan aliran air sungai, yaitu $y + x$.

  Menggunakan apa yang diketahui dalam masalah diperoleh

  $y + x. = \dfrac{46}{2} = 23 \Rightarrow x + y = 23$.. (1)

- Jika perahu bergerak berlawanan dengan aliran air sungai maka kecepatannya berkurang sebesar kecepatan aliran air sungai, yaitu $y - x$.

  Menggunakan apa yang diketahui dalam masalah diperoleh

  $y - x. = \dfrac{51}{3} = 17 \Rightarrow y - x = 17$..(2)

  Dengan demikian kita peroleh sebuah sistem persamaan linear dengan variabel x dan y, yaitu

  $x + y = 23$..(1)

  $y - x = 17$..(2)

  Dengan metode eliminasi diperoleh himpunan penyelesaian sistem persamaan linear tersebut adalah H = {(2,20)}

  Kesimpulan: - Kecepatan air sungai mengalir adalah 3 km per jam.

  - Kecepatan perahu bergerak adalah 20 km per jam.

2. Soal Tantangan Uji Kompetensi 3.2

Diketahui: Tiga jenis beras *A*, *B*, dan *C* dicampur dan menghasilkan 3 kategori harga

1 kg jenis *A* + 2 kg jenis *B* + 3 kg jenis *C* = Rp. 19.500,00

2 kg jenis *A* + 3 kg jenis *B* = Rp.19.000,00

1 kg jenis *B* + 1 kg jenis *C* = Rp. 6250,00

Ditanya: Harga beras jenis mana yang lebih mahal ?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan: harga 1 kg beras jenis *A* adalah x

harga 1 kg beras jenis *B* adalah y

harga 1 kg beras jenis *C* adalah z

Berdasarkan data yang diketahui diperoleh sistem persamaan linear tiga variabel sebagai berikut

$x + 2y + 3z = 19.500$..(1)

$2x + 3y = 19000$..(2)

$x + z = 6.250$..(3)

Akan ditentukan nilai variabel x, y, dan z dengan metode substitusi dan eliminasi. Dari Persamaan-3 diperoleh

$x + z = 6.250 \Rightarrow z = 6.250 - x$

$z = 6.250 - x$ dan $x + 2y + 3z = 19.500 \Rightarrow -2x + 2y = 750$

$\therefore\ -2x + 2y = 750$..(4)

Kita eliminasi variabel x dari Persamaan-2 dan Persamaan-4, dan diperoleh

$$\begin{array}{rl} 2x + 3y & = 19000 \\ -2x + 2y & = 750 \quad + \\ \hline 5y & = 18.250 \end{array}$$

Dari persamaan $5y = 18.250$ diperoleh $y = 3650$

$y = 3650$ dan $2x + 3y = 19000 \Rightarrow x = 4025$

$x = 4025$ dan $z = 6.250 - x \Rightarrow z = 2225$

Himpunan penyelesaian SPLTV di atas adalah {(4025,3650,2225)}.

Karena variabel x, y dan z menyatakan harga per kilogram jenis beras A, B, dan C maka harga beras yang paling mahal adalah beras jenis A dengan harga Rp. 4025 per kilogram.

3. Soal Tantangan Uji Kompetensi 3.3

Diketahui: Satu unit pekerjaan memanen tomat.

Waktu yang dibutuhkan menyelesaikan panen tomat.

Trisna bersama dengan Ayahnya dan Kakeknya adalah 4 jam.

Trisna bersama Ayahnya adalah 6 jam.

Trisna dan Kakeknya adalah 8 jam.

Ditanya:

Berapa lama waktu yang digunakan Trisna, Ayahnya, dan Kakeknya, jika mereka bekerja sendiri-sendiri?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan: waktu yang dibutuhkan Trisna adalah x

waktu yang dibutuhkan Bapak Trisna adalah y

waktu yang dibutuhkan Kakek Trisna adalah z

Berarti kecepatan Trisna, Ayahnya, dan Kakeknya bekerja menyelesaikan panenan, masing-masing $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, dan $\frac{1}{z}$.

➢ Trisna, Ayahnya, dan Kakeknya membutuhkan waktu 4 jam menyelesaikan panenan. Hal ini dapat dimaknai

$$4\frac{1}{x} + 4\frac{1}{y} + 4\frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4} \text{ .... (a)}$$

- Trisna bersama Ayahnya membutuhkan waktu 6 jam menyelesaikan panenan. Hal ini dapat dimaknai

$$6\frac{1}{x} + 6\frac{1}{y} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \text{ .... (b)}$$

- Trisna dan Kakeknya membutuhkan waktu 8 jam menyelesaikan panenan. Hal ini dapat dimaknai

$$8\frac{1}{x} + 8\frac{1}{y} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8} \text{ .... (c)}$$

Misalkan: $p = \frac{1}{x}$, $q = \frac{1}{y}$, dan $r = \frac{1}{z}$

Mensubtitusikan pemisalan $p = \frac{1}{x}$, $q = \frac{1}{y}$, dan $r = \frac{1}{z}$ ke dalam Persamaan-*a*, *b*, dan *c* diperoleh sebuah sistem persamaan linear tiga variabel, yaitu

$$p + q + r = \frac{1}{4} \Rightarrow 4p + 4q + 4r = 1 \text{ .... (1)}$$

$$p + q = \frac{1}{6} \Rightarrow 6p + 6q = 1 \text{ .... (2)}$$

$$p + r = \frac{1}{8} \Rightarrow 8p + 8r = 1 \text{ .... (3)}$$

Akan ditentukan nilai *p*, *q*, dan *r* sebagai berikut:

$$p = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{matrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & 4 \\ 6 & 6 \\ 8 & 0 \end{matrix}}$$

Petunjuk:
- Jumlahkan hasil perkalian bilangan-bilangan pada garis penuh dan hasilnya dikurangi dengan jumlah hasil perkalian bilangan-bilangan pada garis putus-putus.
- Lakukan pada pembilang dan penyebut.

$$p = \frac{(24 + 0 + 32) - (48 + 0 + 0)}{(192 + 0 + 192) - (192 + 0 + 0)}$$

$$p = \frac{1}{24}$$

$$q = \frac{\left|\begin{matrix} 4 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 6 & 1 \\ 8 & 1 & 8 & 8 & 1 \end{matrix}\right|}{\left|\begin{matrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 6 \\ 8 & 0 & 8 & 8 & 0 \end{matrix}\right|} \qquad r = \frac{\left|\begin{matrix} 4 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 1 & 6 & 6 \\ 8 & 0 & 1 & 8 & 0 \end{matrix}\right|}{\left|\begin{matrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 6 \\ 8 & 0 & 8 & 8 & 0 \end{matrix}\right|}$$

$$q = \frac{(32+0+48)-(32+0+24)}{(192+0+192)-(192+0+0)} \qquad r = \frac{(48+0+24)-(24+32+0)}{(192+0+192)-(192+0+0)}$$

$$q = \frac{1}{8} \qquad r = \frac{1}{12}$$

$p = \dfrac{1}{24}$ dan $p = \Rightarrow x = 24$

$q = \dfrac{1}{8}$ dan $q = \Rightarrow y = 8$

$r = \dfrac{1}{12}$ dan r $= \Rightarrow z = 12$

Banyak waktu yang dibutuhkan Trisna, Ayahnya, dan Kakeknya untuk menyelesaikan panenan, jika mereka bekerja sendiri-sendiri adalah:

Trisna membutuhkan waktu 24 jam

Bapak Trisna membutuhkan 8 jam

Kakek Trisna membutuhkan 12 jam

Motivasi siswa dengan menunjukkan kebergunaan matematika dalam memecahkan Masalah 3.6. Organisasikan siswa dalam kelompok belajar dalam memecahkan masalah. Diskusikanlah dengan teman-temanmu, bagaimana caranya untuk mencari banyak rumah tipe A dan tipe B yang dapat dibangun selain yang sudah kita temukan di atas sesuai dengan keterbatasan yang ada.

4. Sistem Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Masalah-3.6

Pak Rendi berencana membangun 2 tipe rumah; yaitu, tipe *A* dan tipe *B* di atas sebidang tanah seluas 10.000 m^2. Setelah dia berkonsultasi dengan arsitek (perancang bangunan), ternyata untuk membangun sebuah rumah tipe *A* dibutuhkan tanah seluas 100 m^2 dan untuk membangun sebuah rumah tipe *B* dibutuhkan tanah seluas 75 m^2. Karena dana yang dimilikinya terbatas, maka banyak rumah yang direncanakan akan dibangun paling banyak 125 unit. Jika kamu adalah arsitek Pak Rendi,

1) bantulah Pak Rendi menentukan berapa banyak rumah tipe *A* dan tipe *B* yang mungkin dapat dibangun sesuai dengan kondisi luas tanah yang ada dan jumlah rumah yang akan dibangun
2) gambarkanlah daerah penyelesaian pada bidang kartesius berdasarkan batasan-batasan yang telah diuraikan.

Alternatif Penyelesaian

Bantu siswa menemukan hubungan banyak rumah tipe A dan banyak rumah tipe B yang dinyatakan dalam model matematika berupa sistem pertidaksamaan linear dua variabel yang tertera di samping.

Misalkan: x: banyak rumah tipe *A* yang akan dibangun
y: banyak rumah tipe *B* yang akan dibangun

1) Banyak rumah tipe *A* dan tipe *B* yang dapat dibangun
   a) Luas tanah yang diperlukan untuk membangun rumah tipe *A* dan tipe *B* di atas tanah seluas 10.000m2 ditentukan oleh pertidaksamaan:
   $100x + 75y \leq 10.1000$, pertidaksamaan ini disederhanakan menjadi:
   $4x + 3y \leq 400$ ....(1)
   b) Jumlah rumah yang akan dibangun
   $x + y \leq 125$..(2)

Dari pertidaksamaan (1) dan (2)), kita tentukan banyak rumah tipe A dan tipe B yang dapat dibangun dengan menerapkan metode eliminasi pada sistem persamaan linear dua variabel berikut.

$$\begin{array}{r|l l}
4x+3y=400 & \times 1 & \rightarrow 4x+3y=400 \\
x+y=125 & \times 3 & \rightarrow \underline{3x+3y=375\;-} \\
 & & \qquad x=25
\end{array}$$

untuk $x = 25$ maka $y = 125 – x$

$$y = 125 – 25$$
$$= 100$$

Dengan demikian, Pak Rendi dapat membangun rumah tipe A sebanyak 25 unit, dan rumah tipe B sebanyak 100 unit.

Diskusi

Diskusikanlah dengan teman-temanmu, bagaimana caranya untuk mencari banyak rumah tipe A dan tipe B yang dapat dibangun selain yang sudah kita temukan di atas sesuai dengan keterbatasan lahan yang tersedia.

2) Grafik daerah penyelesaian pada diagram kartesius

Untuk menggambar daerah penyelesaian pada diagram kartesius dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

Langkah 1

Menggambar garis dengan persamaan $4x + 3y = 400$ dan garis $x + y = 125$. Agar kita mudah menggambar garis ini, terlebih dahulu kita cari titik potong dengan sumbu x yang terjadi jika $y = 0$ dan titik potong dengan sumbu y yang terjadi jika $x = 0$.

Untuk garis $4x + 3y = 400$, jika $y = 0$, maka $x = 100$.
jika $x = 0$, maka $y = 133{,}3$.

Maka garis $4x + 3y = 400$ memotong sumbu y di titik (0, 133,3) dan memotong sumbu y di titik (100, 0).

Untuk garis $x + y = 125$, jika $y = 0$ maka $x = 125$
jika $x = 0$ maka $y = 125$

Maka gari $x + y = 125$ memotong sumbu y di titik (0,125) dan memotong sumbu x di titik (125, 0).

Langkah 2

Menentukan daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$ dan $x + y \leq 125$.

Bimbing siswa menggambar grafik pertidaksamaan linear yang tersedia dengan langkah-langkah berikut.

a) Tentukan titik potong terhadap sumbu-x dan sumbu-y untuk tiap-tiap pertidaksamaan.

b) Gambarkan grafik persamaan garis pada sistem koordinat

c) Tentukan titik potong kedua grafik persamaan garis lurus.

d) Arsirlah daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan tersebut, yaitu daerah tempat kedudukan titik-titik yang memenuhi sistem pertidaksamaan.

Daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Jika garis $4x + 3y = 400$ digambar pada diagram kartesius maka garis tersebut akan membagi dua daerah, yaitu daerah $4x + 3y < 400$ dan daerah $4x + 3y > 400$.

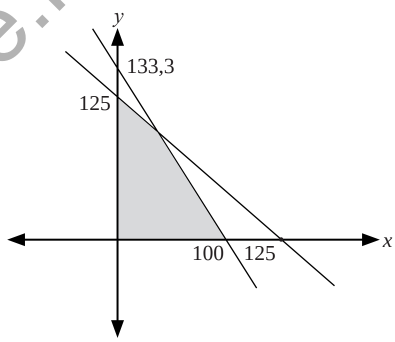
Selanjutnya menyelidiki daerah mana yang menjadi daerah penyelesaian dari pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$, dengan cara mengambil sebarang titik misal $P(x,y)$ pada salah satu daerah, kemudian mensubstitusikan titik tersebut ke pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Jika pertidaksamaan tersebut bernilai benar maka daerah yang memuat titik $P(x,y)$ merupakan daerah penyelesaiannya, jika bernilai salah maka daerah tersebut bukan daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Dengan cara yang sama maka daerah penyelesaian pertidaksamaan $x + y \leq 125$ juga dapat diketahui.

Langkah 3

Mengarsir daerah yang merupakan daerah penyelesaian masing-masing pertidaksamaan. Daerah yang diarsir dua kali merupakan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linier.

Setelah langkah 1, 2, dan 3 di atas dilakukan, maka daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan digambarkan sebagai berikut.

Arahkan siswa mengamati grafik sistem pertidaksamaan pada Gambar 3.7. Mintalah siswa menghimpun informasi yang tergambar pada grafik tersebut terkait, titik potong terhadap sumbu-x dan sumbu-y, titik potong dua garis lurus, dan tanyakan pada siswa, berapa maksimal banyak rumah tipe A dan B yang dapat dibangaun dengan ketersediaan lahan dan biaya.



Gambar 3.7 Daerah penyelesaian untuk sistem pertidaksamaan linier

Dari Gambar 3.7, daerah yang diarsir merupakan daerah penyelesaian.

Contoh 3.10

Tentukan daerah penyelesaian dari

$x + 3y \leq 6$ .... (1)

$3x + y \leq 10$ .... (2)

$x \geq 0$ .... (3)

$y \geq 0$ .... (4)

Alternatif Penyelesaian

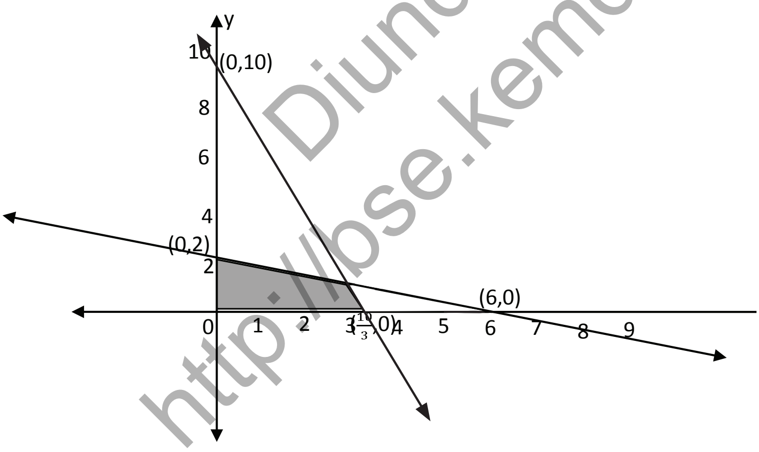
$x + 3y \leq 6$ .... (1)

$3x + y \leq 10$ .... (2)

$x \geq 0$ .... (3)

$y \geq 0$ .... (4)

Gambarkan kedua pertidaksamaan di atas untuk menentukan titik potong grafik persamaaan $x + 3y = 6$ dan $3x + y = 10$. Selanjutnya arsir daerah yang merupakan daerah penyelesaian masing-masing pertidaksamaan. Daerah yang diarsir merupakan daerah penyelesaian.



Gambar 3.8 Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linier $x + 3y \leq 6$, $3x + y \leq 10$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Arahkan siswa menggambarkan kedua pertidaksamaan di atas untuk menentukan titik potong grafik persamaan $x + 3y$ =0 dan $3x + y$ =a dan daerah fungsi f yang dibatasi kedua pertidaksamaan yang diketahui pada soal.

Definisi 3.9

1. Sistem pertidaksamaan linear adalah himpunan pertidaksamaan linear yang saling terkait dengan koefisien variabelnya bilangan-bilangan real.
2. Sistem pertidaksamaan linear dua variabel adalah suatu sistem pertidak-samaan linear yang memuat dua variabel dengan koefisien bilangan real.

Definisi 3.10

Penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dua peubah adalah himpunan semua pasangan titik (x,y) yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear tersebut.

Definisi 3.11

Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear adalah daerah tempat kedudukan titik-titik yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear tersebut.

Uji Kompetensi 3.4

Minta siswa menguji penguasaannya terhadap materi yang sudah dipelajari dengan mencoba menyelesaikan berbagai soal pada Uji Kompetensi 3.4 di samping.

1. Gambarlah daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear berikut.

   a) $4x + 3y \leq 2$
      $x \geq 0$
      $y \geq 0$

   b) $4x - 5y \leq 20$
      $x \leq 0$
      $y \geq 0$

   c) $6x + 5y \leq 30$
      $2x - y \leq 4$
      $x \geq 0$
      $y \geq 0$

2. Gambarlah daerah himpunan penyelesaian berikut.
   $5x + 2y \leq 150$
   $x + y \leq 60$
   $x \geq 0$
   $y \geq 0$

3. Diberikan sistem pertidaksamaan linier:
   $x - y \geq 3$
   $5x + 3y \geq 9$

   a) Gambarkan grafik pertidaksamaan pada sistem tersebut!

   b) Tentukanlah himpunan penyelesaian sistem tersebut, dengan syarat tambahan $x > 0$ dan $y < 0$!

   c) Selanjutnya dapatkah kamu menentukan himpunan penyelesaian sistem tersebut untuk syarat $x < 0$ dan $y > 0$? Jelaskan!

4. Misalkan p adalah jumlah maksimum x dan y yang memenuhi sistem di bawah ini.

   $2x + 5y \leq 600$

   $4x + 3y \leq 530$

   $2x + y \leq 240$

a) Gambarkanlah pertidaksamaan sistem linear tersebut!

b) Tentukanlah nilai *p*!

5. Sekelompok tani transmigran mendapatkan 6 ha tanah yang dapat ditanami padi, jagung, dan palawija lain. Karena keterbatasan sumber daya petani harus menentukan berapa bagian yang harus ditanami padi dan berapa bagian yang harus ditanami jagung, sedangkan palawija lainnya ternyata tidak menguntungkan. Dalam suatu masa tanam tenaga yang tersedia hanya 1590 jam-orang. Pupuk juga terbatas, tak lebih dari 480 kg, sedangkan air dan sumber daya lainnya dianggap cukup tersedia. Diketahui pula bahwa untuk menghasilkan 1 kuintal padi diperlukan 12 jam-orang tenaga dan 4 kg pupuk, dan untuk 1 kuintal jagung diperlukan 9 jam-orang tenaga dan 2 kg pupuk. Kondisi tanah memungkinkan menghasilkan 50 kuintal padi per ha atau 20 kuintal jagung per ha. Pendapatan petani dari 1 kuintal padi adalah Rp32.000,00 sedang dari 1 kuintal jagung Rp20.000,00 dan dianggap bahwa semua hasil tanamnya selalu habis terjual.
Masalah bagi petani ialah bagaimanakah rencana produksi yang memaksimumkan pendapatan total? Artinya berapa ha tanah ditanami padi dan berapa ha tanah ditanami jagung?

6. Jika diberikan sistem pertidaksamaan linear seperti berikut ini,
$a_1x + b_1y \geq c_1$ dan $x \geq 0$
$a_2x + \mathrm{b}_2y \geq c_2$ dan $y \geq 0$.

a) Apakah mungkin sistem pertidaksamaan tersebut memiliki solusi tunggal?

b) Syarat apakah yang harus dipenuhi agar sistem tidak memiliki solusi?

7. Suatu pabrik farmasi menghasilkan dua jenis kapsul obat flu yang diberi nama Fluin dan Fluon. Setiap kapsul memuat tiga unsur (*ingredient*) utama dengan kadar kandungannya tertera dalam Tabel 3.1. Menurut dokter, seseorang yang sakit flu akan sembuh jika dalam tiga hari (secara diratakan) minimum menelan 12 grain aspirin, 74 grain bikarbonat dan 24 grain kodein. Jika harga Fluin Rp200,00 dan Fluon Rp300,00 per kapsul, berapa kapsul Fluin dan berapa kapsul Fluon harus dibeli supaya cukup untuk menyembuhkannya dan meminimumkan ongkos pembelian total?

Unsur	Perkapsul	
	Fluin	Fluin
Aspirin	2	1
Bikarbonat	5	8
Kodein	1	6

Projek

Rancang tiga masalah nyata di sekitarmu atau dari sumber lain (buku, internet dan lain-lain) yang model pemecahannya berupa sistem persamaan linear atau sistem pertidaksamaan linear. Formulasikan masalah tersebut dengan mendefinisikan variable-variabel terkait, menemukan persamaan atau pertidaksamaan yang menyatakan hubungan antara variable tersebut, selesaikan sistem yang kamu peroleh, dan interpretasikan hasilnya. Buat laporan hasil kerja dan sajikan di depan kelas

Ajak siswa merangkum dan mencatat hal-hal penting terkait konsep, sifat, dan aturan yang berlaku pada sistem persamaan linear dan pertidaksamaan linear dua dan tiga peubah. Bagian penutup ini merupakan rangkuman tentang informasi dan konsep persamaan dan pertidaksamaan linear

D. PENUTUP

Berberapa hal penting yang perlu dirangkum terkait konsep dan sifat-sifat sistem persamaan linear dan pertidaksamaan linear.

1. Model matematika dari permasalahan sehari-hari banyak ditemui yang berupa model sistem persamaan linear atau sistem pertidaksamaan linear. Konsep sistem persamaan linear dan sistem pertidaksamaan ini didasari oleh konsep persamaan dan pertidaksamaan atas sistem bilangan real, sehingga sifat-sifat persamaan linear dan pertidaksamaan linear atas sistem bilangan real banyak digunakan sebagai pedoman dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan linear dan sistem pertidaksamaan linear.
2. Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear adalah himpunan semua nilai variabel yang memenuhi sistem persamaan tersebut.
3. Sistem persamaan linear disebut homogen apabila suku konstantanya adalah nol. Salah satu dari dua hal berikut dipenuhi.
   a. Sistem tersebut hanya mempunyai penyelesaian trivial.
   b. Sistem tersebut mempunyai tak berhingga banyaknya penyelesaian tak trivial selain penyelesaian trivial.
5. Sebuah sistem persamaan linear yang mempunyai penyelesaian dengan nilai variabel yang tidak semuanya nol disebut memiliki penyelesaian tak trivial.
6. Tafsiran geometris dari penyelesaian suatu sistem persamaan linear, diberikan sistem persamaan dengan 2 persamaan dan 2 variabel adalah sebagai berikut:
   $a_1x + b_1y = c_1$ dan $a_2x + b_2y = c_2$, dengan a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 bilangan real, dengan a_1 dan b_1 tidak keduanya nol dan a_2 dan b_2 tidak keduanya nol.
   Grafik persamaan-persamaan ini merupakan garis,

misal garis g_1 dan garis g_2. Karena titik (x,y) terletak pada sebuah garis jika dan hanya jika bilangan-bilangan x dan y memenuhi persamaan tersebut, maka penyelesaian sistem persamaan linear tersebut akan bersesuaian dengan titik perpotongan garis g_1 dan garis g_2. Berdasarkan hal itu, maka terdapat tiga kemungkinan, yaitu

(a) garis g_1 dan garis g_2 sejajar dan tidak berpotongan, sehingga sistem tidak mempunyai penyelesaian.

(b) garis g_1 dan garis g_2 berpotongan pada satu titik, sehingga sistem hanya mempunyai tepat satu (tunggal) penyelesaian.

(c) garis g_1 dan garis g_2 berimpit, sehingga sistem mempunyai tak terhingga banyak penyelesaian.

7. Sistem Persamaan linear (*SPL*) mempunyai tiga kemungkinan penyelesaian, yaitu tidak mempunyai penyelesaian, mempunyai satu penyelesaian dan mempunyai tak terhingga banyak penyelesaian.

Penguasaan kamu tentang sistem persamaan dan pertidaksamaan linear adalah prasyarat mutlak mempelajari bahasan matriks dan program linear. Matriks adalah bentuk lain sebuah sistem persamaan linear, artinya setiap sistem persamaan linear dapat disajikan dalam bentuk matriks. Kita akan menemukan konsep dan sifat-sifat matriks melalui penyelesaian masalah nyata. Selanjutnya kita lakukan operasi hitung pada dua atau lebih matriks dan menentukan determinannya. Sifat-sifat matriks terhadap operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian akan dibahas secara mendalam dan dimanfaatkan dalam penyelesaian masalah matematika dan masalah otentik.

Catatan:

Bab 4

Matriks

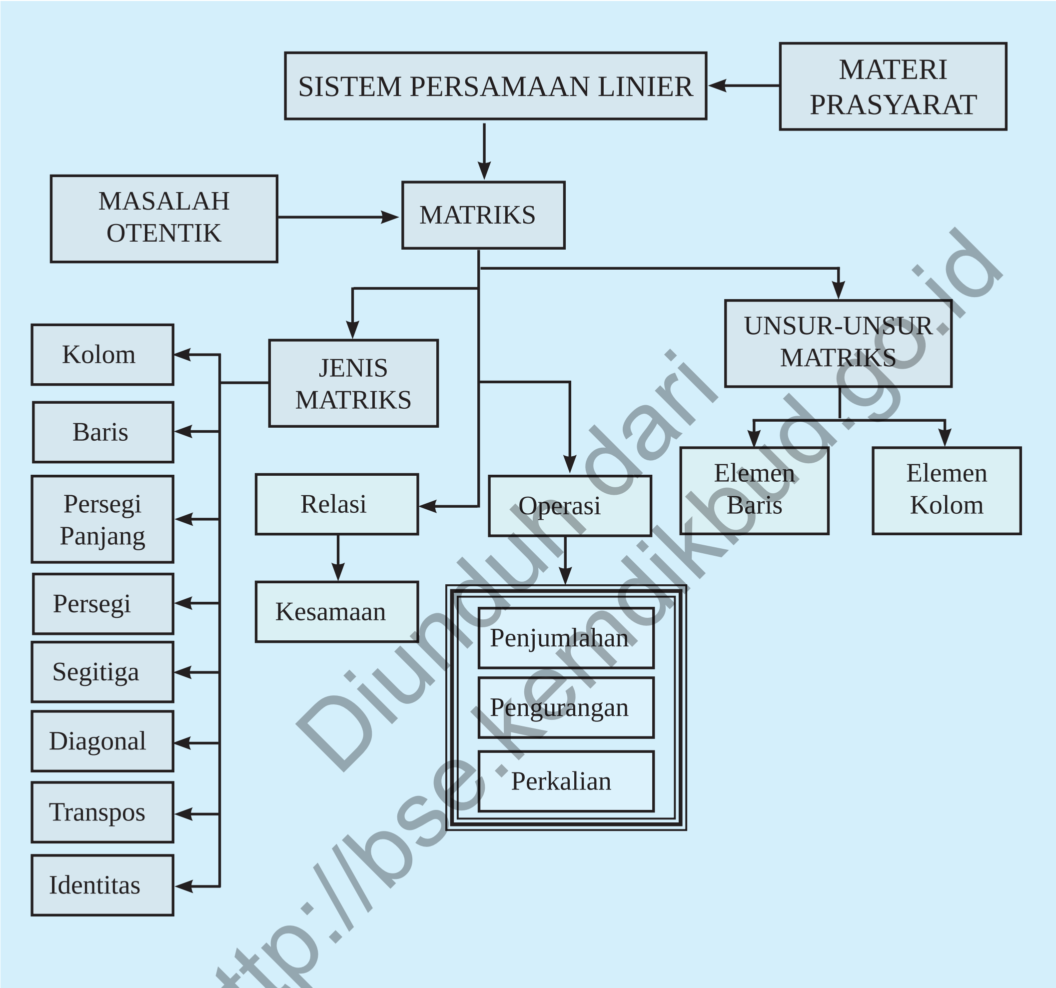
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran matriks, siswa mampu: 1. Mampu mentransformasi diri dalam berpilaku jujur, tangguh mengadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika. 2. Menunjukkan sikap bertanggung jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan. 3. Mendeskripsikan konsep matriks sebagai representasi numerik dalam kaitannya dengan konteks nyata 4. Mendeskripsikan operasi sederhana matriks serta menerapkannya dalam pemecahan masalah 5. Menyajikan model matematika dari suatu masalah nyata yang berkaitan dengan matriks.	Melalui pembelajaran materi matriks, siswa memperoleh pengalaman belajar: • berlatih berpikir kritis dan kreatif; • mengamati keteraturan data; • berkolaborasi, bekerja sama menyelesaikan masalah; • berpikir Independen mengajukan ide secara bebas dan terbuka; • mengamati aturan susunan objek.

Istilah Penting

- *Elemen Matriks*
- *Ordo Matriks*
- *Matriks Persegi*
- *Matriks Identitas*
- *Transpos Matriks*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Ketuntasan materi sistem persamaan dan pertidaksamaan linear merupakan materi prasyarat untuk mengkaji dan memahi materi matriks. Penyelesaian sistem persamaan linear (2, 3 variabel) dengan metode eliminasi, dan subsitusi akan diup-grade dengan konsep matriks, bahkan hingga n variabel. Keunggulan matriks, sekarang ini, banyak software matematika (seperti: *Microsoft Excel*, *Matlab*, *Maple*) menarapkan konsep matriks untuk menyelesaikan masalah nyata terkait matriks.

Untuk bab tiga ini, materi matriks dikaji sampai pengenalan operasi matriks dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan real. Sedangkan materi lanjutannya akan diteruskan pada kelas XI.

1. Menemukan Konsep Matriks

Informasi yang terdapat dalam suatu koran atau majalah tidak senantiasa berupa teks bacaan yang terdiri atas sederetan kalimat yang membentuk paragraf, tetapi ada kalanya disampaikan dalam bentuk sebuah tabel. Tampilan informasi dalam suatu tabel lebih tersusun baik dibandingkan dalam bentuk paragraf. Hal seperti ini sering kita temui, tidak hanya sebatas pada koran atau majalah saja.

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak informasi atau data yang ditampilkan dalam bentuk tabel, seperti data rekening listrik atau telepon, klasemen akhir Liga Super Indonesia, data perolehan nilai dan absensi siswa, maupun brosur harga jual sepeda motor.

Sebagai gambaran awal mengenai materi matriks, mari kita cermati uraian berikut ini. Diketahui data hasil penjualan tiket penerbangan tujuan Medan dan Surabaya,

Arahkan siswa menemukan konsep matriks dari berbagai situasi nyata yang dekat dengan kehidupan siswa. Tumbuhkan motivasi internal dalam diri siswa melalui menunjukkan kebergunaan mempelajari matriks dalam kehidupan.

Ingatkan kembali siswa tentang materi sistem persamaan dan pertidaksamaan linear di bab tiga buku ini sebagai prasyarat untuk mengakaji dan memahami matriks.

Memperkenalkan kepada siswa beberapa keunggulan materi matriks dalam menyelesaikan masalah nyata terkait persamaan linear, bahkan sudah tersedia software matematika seperti: Microsoft Excel, Matlab, Mathematica, dan Maple.

Guru menyampaikan batasan materi matriks kepada siswa, yaitu sampai pengenalan operasi matriks dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan real. Sedangkan materi lanjutannya akan diteruskan pada kelas XI.

dari sebuah agen tiket, selama empat hari berturut-turut disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 4.1: Penjualan tiket penerbangan ke Medan dan Surabaya

Tujuan	Hari ke			
	I	II	III	IV
Medan	3	4	2	5
Surabaya	7	1	3	2

Pada saat kamu membaca tabel di atas maka hal pertama yang perlu kamu perhatikan adalah kota tujuan, kemudian banyaknya tiket yang habis terjual untuk tiap-tiap kota setiap harinya. Data tersebut, dapat kamu sederhanakan dengan cara menghilangkan semua keterangan (judul baris dan kolom) pada tabel, dan mengganti tabel dengan kurung siku menjadi bentuk seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan bentuk tersebut, dapat kamu lihat bahwa data yang terbentuk terdiri atas bilangan-bilangan yang tersusun dalam baris dan kolom. Susunan bilangan seperti inilah yang dinamakan sebagai matriks.

Berikut ini akan kita cermati lebih dalam lagi mengenai matriks dari masalah-masalah kehidupan kita sehari-hari.

Masalah-4.1

Masihkah kamu ingat posisi duduk sewaktu kamu mengikuti Ujian Nasional SMP? Maksimal siswa dalam satu ruang ujian hanya 20 peserta, biasanya disusun dalam lima baris, empat kolom, seperti yang disajikan pada Gambar 4.1.

Gambar 4.1 Pelaksanaan Ujian Nasional

Untuk memudahkan pengaturan peserta ujian dalam suatu ruangan, pihak sekolah menempatkan siswa dalam ruang ujian dengan pola nomor ujian melalui Nomor Induk Siswa (NIS), yang ditempelkan di tempat duduk siswa. Misalnya, nomor ujian peserta di ruang A adalah 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23,... , 44, 51, 52, 53, 54. Jika nomor peserta ujian adalah 12, itu berarti posisi peserta saat ujian berada pada baris ke-1 lajur ke-2, dan jika nomor ujian peserta adalah 34, artinya posisi peserta tersebut saat ujian berada pada baris ke-3 kolom ke-4. Demikian pula, jika nomor peserta ujian adalah 51, artinya posisi siswa saat ujian berada pada baris ke-5 kolom ke-1. Tentunya, untuk setiap peserta ujian yang memiliki nomor ujian 11, 12, 13, 14, 21, …, 53, dan 54 dengan mudah memahami posisi mereka dalam ruang ujian tersebut. Tentukan susunan peserta ujian ditinjau dari pola Nomor Induk Siswa (NIS)!

Dalam memahami masalah yang diberikan, ajak siswa mengamati objek-objek dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan matriks sehingga siswa menemukan kebermaknaan belajar matematika. Upayakan siswa lebih dahulu berusaha memikirkan, mencari ide-ide, berdiskusi dalam kelompok, mencari pemecahan masalah di dalam kelompok.

Alternatif Penyelesaian

Susunan peserta ujian jika dilihat dari NIS, dalam bentuk baris dan kolom, dapat kita nyatakan sebagai berikut.

Meja Pengawas Ujian

$$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \\ 51 & 52 & 53 & 54 \end{bmatrix}$$

Gambar 4.2. Denah posisi tempat duduk peserta ujian berdasarkan NIS

- Dari posisi duduk peserta ujian di atas, menurut kamu masih adakah cara lain untuk mentukan posisi tempat duduk peserta ujian?
  Bandingkan hasil yang kamu peroleh dengan yang diperoleh temanmu!

Masalah-4.2

Masalah lain yang terkait dengan susunan dapat kita amati susunan barang-barang pada suatu supermarket. Tentunya, setiap manager supermarket memiliki aturan untuk menempatkan setiap koleksi barang yang tersedia. Coba kita perhatikan gambar berikut ini!

KOLEKSI Peralatan Dapur	KOLEKSI Roti dan Biskuit	KOLEKSI Permen dan Coklat	KOLEKSI Mie Instan
KOLEKSI Sabun	KOLEKSI Sampho dan Pasta Gigi	KOLEKSI Detergen dan Pembersih	KOLEKSI Bumbu Dapur
KOLEKSI Minuman Botol	KOLEKSI Beras dan Tepung	KOLEKSI Susu	KOLEKSI Minyak dan Gula

Gambar 4.3 Ruang koleksi barang-barang pada suatu supermarket

Tentukanlah posisi koleksi beras dan tepung pada susunan di atas!

Alternatif Penyelesaian

Gambar di atas mendeskripsikan ruangan koleksi barang-barang suatu supermarket, yang terdiri atas tiga baris, 4 kolom. Posisi koleksi beras dan tepung terdapat pada baris ke-3, kolom ke-2. Posisi koleksi barang yang terdapat pada baris ke-2, kolom ke-4 adalah koleksi bumbu dapur.

- Coba kamu sebutkan posisi baris dan kolom setiap koleksi barang yang lain!
- Seandainya susunan koleksi barang-barang tersebut juga tersusun bertingkat, bagaimana matriks yang terbentuk?

Guru memeriksa hasil kerjaan siswa, mengenai posisi setiap koleksi barang dalam ruang tersebut.

Guru menjelaskan bagaimana susunan koleksi barang supermarket jika tersusun bertingkat.

Mengajak siswa untuk memastikan pengetahuan dan keterampilan siswa dalam menentukan posisi baris dan kolom setiap koleksi barang pada supermarket tersebut.

Memotivasi dan membimbing siswa dalam memahami dan menyelesaikan Masalah 4.3

Masalah-4.3

Seorang wisatawan lokal hendak berlibur ke beberapa tempat wisata yang ada di pulau Jawa. Untuk memaksimalkan waktu liburan, dia mencatat jarak antar kota-kota tersebut sebagai berikut.

Bandung–Bogor	126 km
Bandung–Cirebon	130 km
Bandung–Surabaya	675 km
Bogor–Surabaya	801 km
Bogor–Semarang	493 km
Bogor–Yogyakarta	554 km
Cirebon–Surabaya	545 km
Cirebon–Semarang	237 km
Bandung–Semarang	367 km
Bandung–Yogyakarta	428 km
Bogor–Cirebon	256 km
Cirebon–Yogyakarta	317 km
Surabaya–Semarang	308 km
Surabaya–Yogyakarta	327 km
Semarang–Yogyakarta	115 km

Tentukanlah susunan jarak antar kota tujuan wisata, seandainya wisatawan tersebut memulai perjalanannya dari Bandung! Kemudian berikan makna setiap angka dalam susunan tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Wisatawan akan memulai perjalanannya dari Bandung ke kota-kota wisata di Pulau Jawa. Jarak-jarak antar kota tujuan wisata dituliskan sebagai berikut.

	Bandung	Cirebon	Semarang	Yogyakarta	Surabaya	Bogor
Bandung	0	130	367	428	675	126
Cirebon	130	0	237	317	545	256
Semarang	367	237	0	115	308	493
Yogyakarta	428	317	115	0	327	554
Surabaya	675	545	308	327	0	801
Bogor	125	256	493	554	801	0

Dari tampilan di atas, dia cukup jelas mengetahui jarak antar kota tujuan wisata. Jika kita ingin menampilkan susunan jarak-jarak tersebut, dapat dituliskan sebagai berikut.

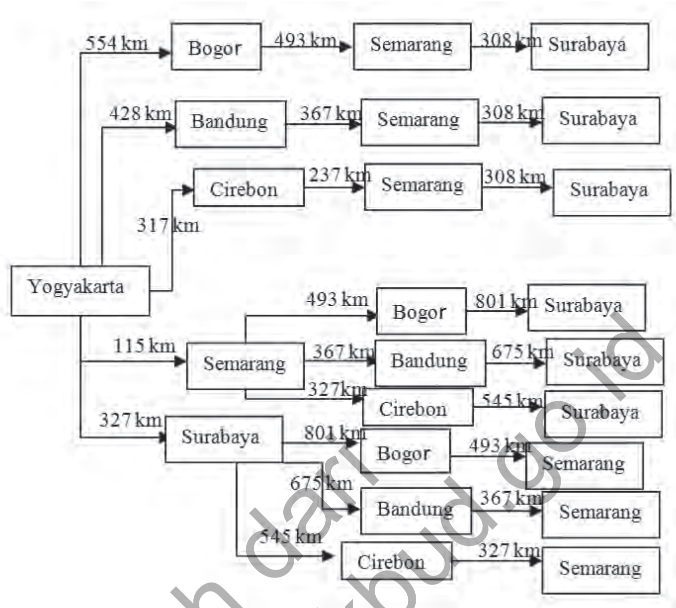
$$\begin{bmatrix} 0 & 130 & 367 & 428 & 675 & 126 \\ 130 & 0 & 237 & 317 & 545 & 256 \\ 367 & 237 & 0 & 115 & 308 & 493 \\ 428 & 317 & 115 & 0 & 327 & 554 \\ 675 & 545 & 308 & 437 & 0 & 801 \\ 126 & 256 & 493 & 554 & 801 & 0 \end{bmatrix}$$

Susunan jarak antar kota di pulau Jawa ini, terdiri dari 6 baris dan 6 kolom.

Berpikir Kritis.

♦ Misalnya wisatawan memulai liburan dari yogyakarta dan selanjutnya berwisata ke satu kota wisata di masing-masing provinsi. Karena keterbatasan waktu dan dana wiasatawan ingin jarak terpendek untuk rute perjalanan.

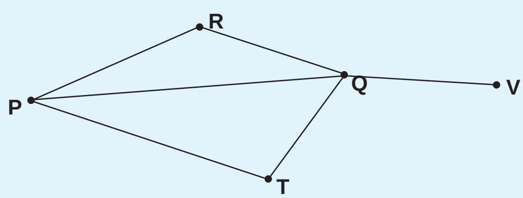
Ajak siswa mencoba untuk mampu menciptakan semua rute yang mungkin dipilih wisatan. Kemudian berikan kesempatan ke siswa untuk menemukan rute terpendek seperti di samping ini.



Jadi rute terpendek bagi wisatan tersebut adalah:
Yogyakarta →Cirebon →Semarang →Surabaya.
Adapun jarak yang ditempuh adalah 862 km.

Masalah-4.4

Pak Margono yang tinggal di kota *P* memiliki usaha jasa pengiriman barang. Suatu ketika, perusahaan pak Margono menerima order mengirim barang ke kota *V*. Jika setiap dua kota yang terhubungkan diberi bobot 1, sedangkan dua kota yang tidak terhubungkan diberi bobot 0. Nyatakanlah persoalan pengiriman barang tersebut dalam bentuk matriks.



Gambar 4.4 Diagram rute pengiriman barang

Alternatif Penyelesaian

Kata kunci pada persoalan ini adalah keterhubungan antar dua kota. Misalkan i dan j mewakili kota P, Q, R, T, dan V sehingga terdapat pembobotan berikut:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ terhubung langsung dengan } j, i \neq j \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Dari gambar di atas, kota P terhubung langsung dengan semua kota, kecuali ke kota V. Keterhubungan antar dua kota ini, dapat kita nyatakan dalam bentuk matriks seperti berikut.

$$X = \begin{array}{c} \\ P \\ R \\ Q \\ T \\ V \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} P & R & Q & T & V \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \text{Susunan angka-angka berbentuk persegi}$$

Representasi keterhubungan antar dua kota, disebut matriks X yang anggota-anggotanya terdiri dari angka 1 dan 0.

Kenalkan kepada siswa makna

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ terhubung langsung dengan } j, i \neq j \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Nilai a_{ij} ditentukan hubungan i dan j. Untuk i = 1, dan j = 2, maka a_{ij} = 0.

Dari empat masalah di atas, masalah yang dikaji adalah aturan susunan posisi setiap objek dan benda dinyatakan dalam aturan baris dan kolom. Banyak baris dan kolom dikondisikan pada kajian objek yang sedang diamati. Objek-objek yang disusun pada setiap baris dan kolom harus memiliki karakter yang sama.

Secara umum, matriks didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4.1

Matriks adalah susunan bilangan yang diatur menurut aturan baris dan kolom dalam suatu susunan berbentuk persegipanjang. Susunan bilangan itu diletakkan di dalam kurung biasa "( )" atau kurung siku "[ ]".

Melalui bentuk-bentuk susunan bilangan yang ditemukan melalui pemecahan masalah-masalah di atas, bersama siswa dirumuskan definisi matriks.

Guru perlu memperkenalkan tanda-tanda kurung yang digunakan dalam matematika.
Penulisan matriks dengan tanda "| |" memiliki makna yaitu sebagai determinan berbeda dengan penulisan matriks menggunakan "[ ]".

Pastikan bahwa siswa telah paham bahwa semua elemen matriks merupakan bilangan real.
Jika tidak ditegaskan bahwa elemen matriks merupakan bilangan real, maka mungkin saja elemen matriks tersebut bilangan kompleks.

Selain itu, ingatkan siswa untuk memiliki komitmen dalam penulisan elemen matriks yaitu dimulai dari baris 1 (kiri ke kanan), baris ke 2, hingga baris ke-n.

Biasanya pelabelan suatu matriks dinyatakan dengan huruf kapital, misalnya A, B, C, D, ..., dan seterusnya. Secara umum, diberikan matriks A,

$$A_{mxn} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{kolom ke-1} & \text{kolom ke-2} & \text{kolom ke-3} & \text{kolom ke-}n \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \to \text{baris ke-1} \\ \to \text{baris ke-2} \\ \to \text{baris ke-3} \\ \\ \to \text{baris ke-}m \\ \\ \end{array}$$

a_{ij} bilangan real, menyatakan elemen matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j, $i = 1, 2, 3, .., m$; $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

$A_{m\times n}$: m menyatakan banyak baris matriks A.
n menyatakan banyak kolom matriks A.

Notasi $m \times n$, menyatakan ordo (ukuran) matriks A, yang menyatakan banyak baris dan kolom matriks A. Ingat, m menyatakan banyak baris dan n menyatakan banyak kolom matriks A. Jadi, jika diperhatikan ordo suatu matriks, dapat diketahui banyak elemen matriks itu.

Masalah-4.5

Tentukanlah matriks 4×4, dengan $A = [a_{ij}]$ yang memenuhi kondisi $a_{ij} = i^{(j-1)}$!

Alternatif Penyelesaian

$$\text{Matriks } A_{4\times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

nilai a_{ij} ditentukan dengan $a_{ij} = i^{j-1}$.

- $a_{11} = 1^{1-1} = 1$
- $a_{12} = 1^{2-1} = 1$
- $a_{13} = 1^{3-1} = 1$
- $a_{14} = 1^{4-1} = 1$
- $a_{21} = 2^{1-1} = 1$
- $a_{22} = 2^{2-1} = 2$
- $a_{23} = 2^{3-1} = 4$
- $a_{24} = 2^{4-1} = 8$
- $a_{31} = 3^{1-1} = 1$
- $a_{32} = 3^{2-1} = 3$
- $a_{33} = 3^{3-1} = 9$
- $a_{34} = 3^{4-1} = 27$
- $a_{41} = 4^{1-1} = 1$
- $a_{42} = 4^{2-1} = 4$
- $a_{43} = 4^{3-1} = 16$
- $a_{44} = 4^{3-1} = 64$

Jadi, matriks A berordo 4×4 yang dimaksud adalah:

$$A_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}.$$

Contoh 4.1

Teguh, siswa kelas X SMA Panca Budi, akan menyusun umur anggota keluarganya dalam bentuk matriks. Dia memiliki Ayah, Ibu, berturut-turut berumur 46 tahun dan 43 tahun. Selain itu dia juga memiliki kakak dan adik, secara berurut, Ningrum (22 tahun), Sekar (19 tahun), dan Wahyu (12 tahun). Dia sendiri berumur 14 tahun.

Berbekal dengan materi yang dia pelajari di sekolah dan kesungguhan dia dalam berlatih, dia mampu mengkreasikan susunan matriks, yang merepresentasikan umur anggota keluarga Teguh, sebagai berikut (berdasarkan urutan umur dalam keluarga Teguh).

i. Alternatif susunan I

$$T_{2\times3} = \begin{bmatrix} 46 & 43 & 22 \\ 19 & 14 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriks $T_{2\times3}$ adalah matriks persegipanjang dengan berordo 2×3.

Guru memberikan susunan matriks yang lain, seperti matriks A dan B.

ii. Alternatif susunan II

$$T_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \\ 14 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriks $T_{3\times 2}$ adalah matriks berordo 3×2.

Selain matriks T di atas, dapat dibentuk matrisk A dan B berikut ini.

- ♦ $A_{1\times 6} = \begin{pmatrix} 46 & 43 & 22 & 19 & 14 & 12 \end{pmatrix}$

- ♦ $B_{6\times 1} = \begin{pmatrix} 46 \\ 43 \\ 22 \\ 19 \\ 14 \\ 12 \end{pmatrix}$

Untuk jenis-jenis matriks guru memberikan informasi tentang jenis matriks tersebut dengan memberikan ciri-cirinya lalu minta siswa menyimpulkan jenis-jenis matriks tersebut.

Guru mengajak siswa untuk mampu menerapkan jenis-jenis matriks dalam kehidupan sehari-hari

2. Jenis-Jenis Matriks

Contoh 4.1 di atas menyajikan beberapa variasi ordo matriks yang merepre-sentasikan umur anggota keluarga Teguh. Secara detail, berikut ini akan disajikan jenis-jenis matriks.

a. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang terdiri atas satu baris saja. Biasanya, ordo matriks seperti ini, $1 \times n$, dengan n banyak kolomnya.

$T_{1\times 2}$ = [46 43], matriks baris berordo 1×2 yang merepresentasikan umur orang tua Teguh.

$T_{1\times 4}$ = [22 19 14 12], matriks baris berordo 1×4 yang merepresentasikan umur Teguh dan saudaranya.

b. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang terdiri atas satu kolom saja. Matriks kolom berordo $m \times 1$, dengan m

banyak barisnya. Perhatikan matriks kolom berikut ini!

$T_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 43 \\ 22 \\ 19 \end{bmatrix}$, matriks kolom berordo 3×1, yang merepresentasikan umur semua wanita pada keluarga Teguh.

$T_{5\times 1} = \begin{bmatrix} 46 \\ 43 \\ 22 \\ 19 \\ 12 \end{bmatrix}$, matriks kolom berordo 5×1, yang merepresentasikan umur kedua orang tua Teguh dan ketiga saudaranya.

c. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang mempunyai banyak baris dan kolom sama. Matriks ini memiliki ordo $n \times n$.

$T_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 22 & 19 \end{bmatrix}$, matriks persegi berordo 2×2, yang merepresentasikan umur orang tua Teguh dan kedua kakaknya.

Perhatikan matriks persegi berordo 4×4 di bawah ini.

$$H_{4\times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Diagonal Samping matriks H

Diagonal Utama matriks H

Diagonal utama suatu matriks meliputi semua elemen matriks yang terletak pada garis diagonal dari sudut kiri atas ke sudut kanan bawah. Diagonal samping matriks meliputi semua elemen matriks yang terletak pada garis diagonal dari sudut kiri bawah ke sudut kanan atas.

d. Matriks Segitiga

Mari kita perhatikan matriks persegi F dan G berordo 4×4 di bawah ini. Jika terdapat pola susunan pada suatu matriks persegi, misalnya:

$$F_{4\times4} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 & 12 \\ 0 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

atau jika polanya seperti berikut ini.

$$G_{4\times4} = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 10 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga adalah matriks bujur sangkar yang elemen-elemen di bawah atau di atas elemen diagonal bernilai nol. Jika yang bernilai nol adalah elemen-elemen di bawah elemen diagonal utama maka disebut *matriks segitiga atas*, sebaliknya disebut *matriks segitiga bawah*. Dalam hal ini, juga tidak disyaratkan bahwa elemen diagonal utama harus bernilai tak nol.

e. Matriks Diagonal

Dengan memperhatikan konsep matriks segitiga di atas, jika kita cermati kombinasi pola tersebut pada suatu matriks persegi, seperti matriks berikut ini.

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks persegi dengan pola “semua elemennya bernilai nol, kecuali elemen diagonal utama”, disebut matriks diagonal.

f. Matriks Identitas

Mari kita cermati kembali matriks persegi dengan pola seperti matriks berikut ini.

- $I_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $I_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $I_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Cermati pola susunan angka 1 dan 0 pada ketiga matriks persegi di atas. Jika suatu matriks persegi semua elemen diagonal utamanya adalah 1 dan unsur yang lainnya semua nol disebut matriks identitas. Matriks identitas dinotasikan sebagai I berordo $n \times n$.

g. Matriks Nol

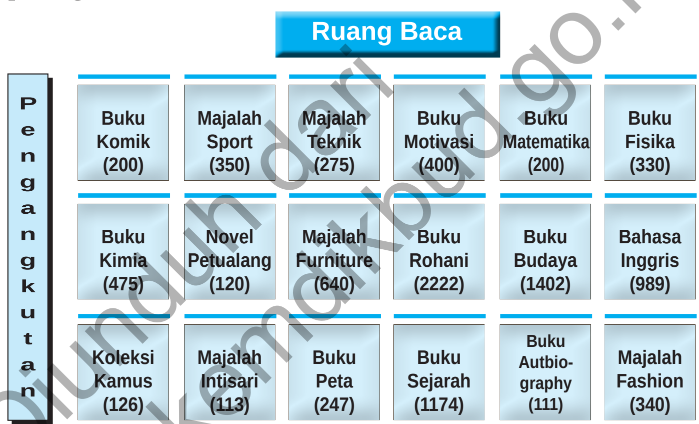
Jika semua elemen suatu matriks semuanya bernilai nol, seperti berikut:

- $O_{2\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, atau
- $O_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, atau
- $O_{1\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka disebut matriks nol.

Berikan ilustrasi berikut sebagai informasi untuk mengetahui tentang konsep transpos matriks.

3. Transpos Matriks

Pak Susilo, pensiunan pegawai PLN, memiliki banyak koleksi buku, majalah, dan novel yang pernah dia beli maupun terima selama dia masih aktif sebagai pegawai PLN. Karena begitu banyak koleksi buku tersebut, ditambah lagi ruang koleksinya tidak memadai, Pak Susilo berniat akan menghibahkan semua buku-buku tersebut ke kampung halamannya, yaitu di Tegal. Sebelum dibawa pengangkutan, Parman, cucunya, membantu menyusun buku-buku tersebut dalam tumpukan-tumpukan seperti pada gambar di bawah ini.



Gambar 4.5. Diagram susunan koleksi buku-buku

Jika direpresentasikan semua koleksi tersebut dalam matriks, dengan sudut pandang dari ruang baca, akan diperoleh matriks persegi panjang berordo 3×6. Kita sebut matriks B,

$$B_{3\times 6} = \begin{bmatrix} 200 & 350 & 275 & 400 & 200 & 330 \\ 475 & 120 & 640 & 2222 & 1402 & 989 \\ 126 & 113 & 247 & 1174 & 111 & 340 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, karena halaman rumah Pak Susilo yang tidak cukup untuk ruang gerak truk sehingga truk harus diparkir di sebelah kiri ruang baca Pak Susilo. Pihak pengangkutan menyusun semua koleksi tersebut menurut barisan buku yang terdekat ke truk. Matriks B, berubah menjadi:

$$B_{6\times 3} = \begin{bmatrix} 200 & 475 & 126 \\ 350 & 120 & 113 \\ 275 & 640 & 247 \\ 400 & 2222 & 1174 \\ 200 & 1402 & 111 \\ 330 & 989 & 340 \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan kedua matriks $B_{3\times 6}$ dan $B_{6\times 3}$, dalam kajian yang sama, ternyata memiliki relasi. Relasi yang dimaksud dalam hal ini adalah “perubahan posisi elemen matriks”, atau disebut transpos matriks, yang diberi simbol B^t sebagai transpos matriks B. Namun beberapa buku menotasikan transpos matriks B dengan $\overline{B}$ atau B'.

Perubahan yang dimaksud dalam hal ini adalah, setiap elemen baris ke-1 pada matriks B menjadi elemen kolom ke-1 pada matriks B^t, setiap elemen baris ke-2 pada matriks B menjadi elemen kolom ke-2 pada matriks B^t, demikian seterusnya, hingga semua elemen baris pada matriks matriks B menjadi elemen kolom pada matriks B^t. Hal inilah yang menjadi aturan menentukan transpos suatu matriks.

Contoh 4.2

a. Diberikan matriks $S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$, maka

transpos matriks S adalah

$$S^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 10 & 6 \\ 5 & 15 & 9 \\ 7 & 20 & 23 \end{bmatrix}$$

Untuk lebih memahami tentang transpos matriks, ajukan beberapa contoh berikut. Minta siswa memahami tentang perubahan ordo matriks akibat adanya transpos matriks tersebut.

b. Jika $A = [-3\ \ 4\ \ 6\ \ 8\ \ 19]$, maka $A^t = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 19 \end{bmatrix}$

Ajukan pertanyaan kepada siswa bagaimana cara lain menentukan transpos suatu matriks. Misalnya seperti cara di samping.

c. Jika

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 14 & 9 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \end{bmatrix}, \text{ maka } C^t = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Cara lain menentukan transpos matriks persegi.

Jika matriks, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 14 & 9 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \end{bmatrix}$ maka transpos matriks C dapat ditentukan melalui,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 14 & 9 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

Ubah posisi elemen matriks yang simetris dengan diagonal utama matriks.

Akibatnya,

$$C^t = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Dari pembahasan contoh di atas, dapat kita pahami perubahan ordo matriks. Misalnya, jika matriks awal berordo $m \times n$, maka transposnya berordo $n \times m$.

Berikan kesempatan kepada siswa untuk mencoba menemukan suatu matriks yang transposnya sama dengan matriks itu sendiri.
Misalnya seperti alternatif penyelesaian di samping.

Coba kamu pikirkan…

- Mungkinkah suatu matriks sama dengan transposnya? Berikan alasanmu!
- Periksa apakah $(A^t + B^t) = (A + B)^t$, untuk setiap matriks A dan B berordo $m \times n$?

Alternatif Penyelesaian

Ada matriks yang transposnya sama dengan matriks itu sendiri, diantaranya matriks identitas $I_{n \times n}$, misalnya:

Jika $I_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, maka

$$(I_{3\times 3})^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya untuk memeriksa apakah $(A^t + B^t) = (A + B)^t$, diberikan:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B_{m\times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

maka,

$$\left(A_{m\times n}\right)^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\left(B_{m\times n}\right)^t = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & \dots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & \dots & b_{m2} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & \dots & b_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Oleh karena itu,

$$\left(A_{m\times n}\right)^t + \left(B_{m\times n}\right)^t = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & a_{31}+b_{31} & \dots & a_{m1}+b_{m1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & a_{32}+b_{32} & \dots & a_{m2}+b_{m2} \\ a_{13}+b_{13} & a_{23}+b_{23} & a_{33}+b_{33} & \dots & a_{m3}+b_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & a_{3n}+b_{3n} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Disisi lain, matriks

$$\left(A_{m\times n} + B_{m\times n}\right)^t = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \dots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}^t$$

$$\left(A_{m\times n} + B_{m\times n}\right)^t = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & a_{31}+b_{31} & \dots & a_{m1}+b_{m1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & a_{32}+b_{32} & \dots & a_{m2}+b_{m2} \\ a_{13}+b_{13} & a_{23}+b_{23} & a_{33}+b_{33} & \dots & a_{m3}+b_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & a_{3n}+b_{3n} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Jadi ditemukan, matriks $(A^t + B^t) = (A + B)^t$.

4. Kesamaan Dua Matriks

Dua kompleks perumahan ruko di daerah Tangerang memiliki ukuran yang sama dan bentuk bangunan yang sama. Gambar di bawah ini mendeskripsikan denah pembagian gedung-gedung ruko tersebut.

Ajak siswa mengamati penerapan konsep kesamaan dua matriks dalam konteks kompleks perumahan seperti ilustrasi di samping. Motivasi siswa bahwa sangat banyak nilai kebermaknaan matematika dalam kehidupan kita.

Gambar 4.6 Denah komplek ruko

Dari denah di atas dapat dicermati bahwa Blok *A* sama dengan Blok *B*, karena banyak Ruko di Blok *A* sama dengan banyak Ruko di Blok *B*. Selain itu, penempatan setiap Ruko di Blok *A* sama dengan penempatan Ruko di Blok *B*. Artinya 10 Ruko di Blok *A* dan Blok *B* dibagi dalam dua jajaran.

Dari ilustrasi di atas, kita akan mengkaji dalam konteks matriks. Dua matriks dikatakan sama jika memenuhi sifat berikut ini.

Definisi 4.2

Matriks *A* dan matriks *B* dikatakan sama ($A = B$), jika dan hanya jika:

i. Ordo matriks *A* sama dengan ordo matriks *B*.

ii. Setiap pasangan elemen yang seletak pada matriks *A* dan matriks *B*, $a_{ij} = b_{ij}$ (untuk semua nilai *i* dan *j*).

Untuk lebih memahami tentang definisi kesamaan dua matriks, ajak siswa memahami Contoh 4.3. Berikan tantangan ke siswa jika mampu menemukan penyelesaian yang lain.

Contoh 4.3

Tentukanlah nilai a, b, c, dan d yang memenuhi hubungan $P^t = Q$, bila

$$P = \begin{bmatrix} 2a-4 & 3b \\ d+2a & 2c \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Alternatif Penyelesaian

Diketahui matriks P berordo 3×2, maka matriks P^t berordo 2×3. Akibatnya, hubungan $P^t = Q$ dituliskan:

$$\begin{bmatrix} 2a-4 & d+2a & 4 \\ 3b & 2c & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-5 & 3a-c & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

- Dengan menggunakan Definisi 4.2, coba kamu tentukan nilai a, b, c, dan d.

Ingatkan kembali siswa tentang makna Sifat 1.8 Bab 1 buku ini, yaitu:
Misalkan a, b, c , $a > 0$, $a \neq 1$, dan $b > 0$ maka
${}^{a}\log b = c$ jika dan hanya jika
$a^c = b$.

Contoh 4.4

Jika diberikan persamaan matriks berikut ini

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2^{2x-y}}{32} & 4 & {}^{b}\log 16 \\ 2+3a & 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{10}{y} \\ 4 & {}^{\sqrt{3}}\log(a+b)^2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

maka hitunglah nilai: $(a.b)$- $2x + y$.

Ajak siswa berpikir untuk memilih persamaan elemen seletak yang pertama diselesaikan.
Guru menegaskan ke siswa, pemilihan tersebut bertujuan mengefektifkan waktu menyelesaikan

Alternatif Penyelesaian

- Setelah menemukan hubungan kesamaan matriks, pilih pasangan elemen yang seletak yang pertama kali diselesaikan dengan tujuan mempermudah menentukan nilai variabel yang lain.
- Demikian juga untuk langkah yang kedua dan ketiga hingga ditemukan nilai a, b, x, dan y.

masalah kesamaan dua matriks, seperti yang dituliskan pada alternatif penyelesaian Contoh 4.4.

- $^{b}\log 16 = 2$, diperoleh $b = 4$.
- $^{\sqrt{3}}\log (a + b)^2 = 1$, diperoleh $(a + b) = 3$. Akibatnya $a = -1$.
- $2 + 3a = \dfrac{10}{y}$, dengan $a = -1$, maka $y = -10$.
- $\dfrac{2^{2x-y}}{32} = 1$, atau $2^{2x-y-5} = 2^0$. Akibatnya ditemukan $x = -\dfrac{5}{2}$.

Jadi, nilai $(a.b) - 2x + y = -9$.

Uji Kompetensi 4.1

1. Diketahui matriks $M = [2 \;\; 6 \;\; 12 \;\; 7 \;\; 11]$ dan $N = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dari matriks M dan N,

   tentukanlah :

   a. Elemen baris ke-1 kolom ke-3 matriks M!

   b. Elemen kolom ke-1 baris ke-5 matriks N!

   c. Hasil kali elemen baris ke-2 matriks N dengan elemen kolom ke-4 matriks M!

   d. Selisih elemen baris ke-6 pada matriks N dan elemen kolom ke-2 matriks M!

   e. Elemen baris ke-7 matriks N. Jelaskan!

2. Menurut kamu, apakah ada batasan banyak baris dan kolom untuk membentuk suatu matriks? Jelaskan!

3. Coba berikan contoh yang lain (selain yang disajikan di atas) mengenai matriks yang dapat dijumpai dalam kehidupan sehari-hari!

Motivasi siswa dalam mengerjakan soal-soal pada Uji Kompetensi 4.1 sebagai wadah dalam mengoreksi pengetahuan dan keterampilan mereka akan masalah-masalah terkait matriks.

Bimbing siswa dalam penugasan, jika dibutuhkan tim dalam menyelesaikan masalah-masalah bentuklah kelompok belajar yang heterogen.

4. Buatlah matriks yang terdiri atas 5 baris dan 3 kolom, dengan semua elemennya adalah 15 bilangan prima pertama. Tentukan transposnya.
5. Jika elemen suatu matriks merupakan bilangan kuadrat, buatlah matriks yang terdiri dari 7 baris dan 2 kolom! Tentukan transposnya!
6. Tentukanlah matriks berordo 5 × 5, dengan aturan:
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } i - j > 1 \\ -1 & \text{jika } i - j \leq 1 \end{cases}$$
7. Menurut ilmu kedokteran, terdapat relasi antara berat badan dengan tinggi badan seseorang. Bisakah kamu merepresentasikan persoalan tersebut ke dalam matriks? (Silahkan gunakan data berat badan dan tinggi badan teman sekelasmu)!
8. Jelaskan nilai kebenaran untuk setiap pernyataan berikut ini!
   a. Dua matriks yang berordo sama merupakan syarat perlu bagi dua matriks yang sama.
   b. Ordo matriks yang sama merupakan syarat cukup bagi dua matriks yang sama.

   Petunjuk: Guru memberikan arti syarat cukup dan syarat perlu ke siswa.
9. Masalah Penugasan Pengasuh Bayi.
   Sebuah biro jasa penyedia pengasuh bayi mempunyai empat klien dan lima pengasuh. Biro tersebut mengevaluasi tingkat kecocokan antara klien dan pengasuh bayi dalam sebuah tabel dengan skala nol sampai sepuluh; nilai nol artinya klien tidak cocok dengan pengasuh bayi dan nilai sepuluh untuk klien yang sangat cocok dengan pengasuh. Tabel peringkat tersebut disajikan di bawah ini!

		Nama Pengasuh Bayi				
		Tarsi	Inem	Wati	Nurlela	Marni
Klien	Ibu Ratna	7	4	7	3	10
	Ibu Santi	5	9	3	8	7
	Ibu Bonita	3	5	6	2	9
	Ibu Soimah	6	5	0	4	8

Bagaimanakah biro jasa tersebut menugaskan pengasuh-pengasuhnya agar dapat memaksimumkan nilai kecocokan antara klien dan pengasuh?

10. Untuk matriks-matriks berikut, ten-tukan pasangan-pasangan matriks yang sama.

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^t,$$

$$D=\begin{bmatrix} p & q & r \\ s & t & u \end{bmatrix}.$$

11. Diketahui matriks-matriks

$$T=\begin{bmatrix} -3a & a-2b \\ b+c & 2d+c \\ e-2d & e-3f \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$R=\begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 2 & 10 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Tentukan transpos matriks T!

b) Jika $R^t = T$, tentukanlah nilai a, b, c, d, e, dan f!

12. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

    dan matriks $X = \begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{bmatrix}$.

    Syarat apakah yang harus dipenuhi supaya matriks A sama dengan matriks X? Jelaskan!

13. Pada tahun ajaran baru, Anas mewakili beberapa temannya untuk membeli 5 buku Matematika dan 4 buku Biologi. Dia harus membayar sebesar Rp410.000,00 Pada saat yang bersamaan, Samad mewakili teman-teman yang lainnya membeli 10 buku Matematika dan 6 buku Biologi. Samad harus membayar Rp740.000,00 untuk semuanya.

    Nyatakanlah persoalan dalam bentuk matriks dan selesaikanlah!

Tugas proyek diberikan sebagai tugas individu maupun kelompok untuk menginformasikan kepada siswa bahwa belajar matriks sangat diperlukan dalam perkembangan ilmu dan dalam menyelesaikan permasalahan kehidupan.

Projek

Temukan contoh penerapan matriks dalam ilmu komputer, bidang ilmu fisika, kimia, dan teknologi informasi. Selanjutnya coba terapkan berbagai konsep dan aturan matriks dalam menyusun buku teks di sebuah perpustakaan. Pikirkan bagaimana susunan buku teks, seperti: buku matematika, fisika, biologi, kimia, dan IPS dari berbagai jenisnya (misalnya jenis buku matematika, tersedia buku aljabar, geometri, statistika, dan lain-lain) tampak pada susunan baris dan kolom sebuah matriks. Kamu dapat membuat pengkodean dari buku-buku tersebut agar para pembaca dan yang mencari buku tertentu mudah untuk mendapatkannya. Buat laporan hasil kerja kelompokmu dan hasilnya disajikan di depan kelas.

5. Memahami Operasi Sederhana Matriks serta Menerapkannya dalam Pemecahan Masalah

a. Operasi Hitung pada Matriks

1) Penjumlahan Dua Matriks

Untuk memudahkan kita memahami penjumlahan dua matriks, mari kita cermati contoh masalah berikut ini.

Operasi-operasi yang dijelaskan dalam materi ini antara lain penjumlahan dua matriks, pengurangan dua matriks, perkalian suatu bilangan real dengan matriks, dan perkalian dua matriks.

Guru memberikan penjelesan kepada siswa bahwa tidak semua operasi aljabar berlaku pada operasi matriks. Misalnya, $\frac{1}{2}A \neq \frac{A}{2}$, *untuk suatu matriks A.*

Masalah-4.6

Sebuah perusahaan garmen memiliki dua pabrik yang berlokasi di Jakarta dan Surabaya. Perusahaan itu memproduksi dua jenis produk, yaitu baju dan jas. Biaya untuk bahan ditangani oleh sebuah departemen dan upah buruh ditangani oleh pabrik departemen lainnya. Biaya untuk setiap jenis produk diberikan pada matriks berikut.

Pabrik di Surabaya

Produk / Komponen Biaya	Baju	Jas
Bahan	Rp 200 juta	Rp 600 juta
Buruh	Rp 20 juta	Rp 80 juta

Pabrik di Jakarta

Produk / Komponen Biaya	Baju	Jas
Bahan	Rp 125 juta	Rp 450 juta
Buruh	Rp 25 juta	Rp 90 juta

Berapakah biaya masing-masing bahan dan upah buruh yang dikeluarkan oleh perusahaan tersebut untuk memproduksi baju dan jas?

Alternatif Penyelesaian

Jika kita misalkan matriks biaya di Surabaya sebagai matriks S dan matriks biaya di Jakarta sebagai matriks J, maka biaya total yang dikeluarkan oleh perusahaan untuk kedua pabrik tersebut dapat diperoleh, sebagai berikut.

- Total biaya bahan untuk baju = 200 + 125 = 325 juta
- Total biaya bahan untuk jas = 600 + 450 = 1050 juta
- Total biaya buruh untuk baju = 20 + 25 = 45 juta
- Total biaya buruh untuk jas = 80 + 90 = 170 juta

Jika keempat total biaya tersebut dinyatakan dalam matriks, adalah sebagai berikut:

Total Biaya Pabrik

Produk / Komponen Biaya	**Baju**	**Jas**
Bahan	Rp 425 juta	Rp 1050 juta
Buruh	Rp 45 juta	Rp 70 juta

Penjumlahan kedua matriks biaya di atas dapat dilakukan karena kedua matriks biaya memiliki ordo yang sama, yaitu 2×2. Seandainya ordo kedua matriks biaya tersebut berbeda, kita tidak dapat melakukan operasi penjumlahan terhadap kedua matriks. Jadi biaya yang dikeluarkan perusahaan untuk memproduksi baju adalah Rp470.000.000, dan untuk memproduksi jas adalah Rp1.120.000.000.

Nah, melalui pembahasan di atas, tentunya dapat didefinisikan penjumlahan dua matriks dalam konteks matematis.

Definisi 4.3

Misalkan A dan B adalah matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan b_{ij}. Jika matriks C adalah jumlah matriks A dengan matriks B, ditulis $C = A + B$, matriks C juga berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen ditentukan oleh:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{(untuk semua } i \text{ dan } j\text{)}.$$

Catatan:

Dua matriks dapat dijumlahkan jika dan hanya jika memiliki ordo yang sama. Ordo matriks hasil penjumlahan dua matriks sama dengan ordo matriks yang dijumlahkan.

Contoh 4.5

a) Jika diketahui matriks

$$P = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix},\ Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$ maka

$$P + Q = \begin{bmatrix} 10+2 & 2+2 & 4+8 \\ 1+1 & 3+0 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Jika dimisalkan $R = P + Q$, maka jumlah matriks P dan Q adalah

$$R = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

b) Diketahui matriks $T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, maka mari kita tunjukkan bahwa $T + O = T$ dan $O + T = T$.

Matriks O dalam hal ini adalah matriks nol berordo 3×3, karena matriks tersebut akan dijumlahkan dengan matriks T berordo 3×3 juga.

$$T + O = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+0 & 3+0 & 1+0 \\ 5+0 & 5+0 & 0+0 \\ 1+0 & 3+0 & 7+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = T$$

$$O + T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+6 & 0+3 & 0+1 \\ 0+5 & 0+5 & 0+0 \\ 0+1 & 0+3 & 0+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = T$$

Cermati! Meskipun pada Contoh 4.5 b) matriks nol tidak diberikan, secara intuitif matriks nol yang digunakan adalah matriks nol berordo 3 × 3. Demikian juga halnya untuk matriks identitas

2) Pengurangan Dua Matriks

Rumusan penjumlahan dua matriks di atas dapat kita terapkan untuk memahami konsep pengurangan matriks *A* dengan matriks *B*.

Matriks –*B* dalam merupakan matriks yang elemennya berlawanan dengan setiap elemen yang bersesuaian matriks *B*.

Misalkan *A* dan *B* adalah matriks-matriks berordo $m \times n$. Pengurangan matriks *A* dengan matriks *B* didefinisikan sebagai jumlah antara matriks *A* dengan lawan dari matriks –*B*, ditulis:

$$A - B = A + (-B).$$

Contoh 4.6

Mari kita cermati contoh berikut ini.

a) Jika $K = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, maka

$$K - L = K + (-L) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Diketahui matriks-matriks *X*, *Y*, dan *Z* sebagai berikut:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}, \ Y = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}, \text{ dan } Z = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{bmatrix}$$

Jika ada, tentukan pengurangan-pengurangan matriks berikut ini:

i) $Y - X$ ii) $Y - Z$ iii) $X - Z$.

Alternatif Penyelesaian

Matriks X dan Y memiliki ordo yang sama, yaitu berordo 3×2. Sedangkan matriks Z berordo 3×3. Oleh karena itu, menurut aturan pengurangan dua matriks, hanya bagian i) saja yang dapat ditentukan, ii) dan iii) tidak dapat dioperasikan, (mengapa?).

$$\text{Jadi, } Y - X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -7 \\ -9 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dari contoh di atas, pengurangan dua matriks dapat juga dilakukan dengan mengurangkan langsung elemen-elemen yang seletak dari kedua matriks, seperti yang berlaku pada penjumlahan dua matriks, yaitu:

$$A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}].$$

Diskusi

Operasi penjumlahan dikatakan bersifat komutatif jika $a + b = b + a$, untuk setiap a, b bilangan real.

- Dalam kajian matriks, apakah $A + B = B + A$?
- Bagaimana dengan operasi pengurangan dua matriks? Apakah $A - B = B - A$? Diskusikan!

Guru mengjakan siswa untuk memeriksa apakah sifat komutatif berlaku pada penjumlahan dua matriks.

Alternatif Penyelesaian

$$\text{Misalnya, } A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B_{m\times n} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \text{ maka,}$$

$$(A_{m\times n} + B_{m\times n}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \dots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & b_{13}+a_{13} & \dots & b_{1n}+a_{1n} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & b_{23}+a_{23} & \dots & b_{2n}+a_{2n} \\ b_{31}+a_{31} & b_{32}+a_{32} & b_{33}+a_{33} & \dots & b_{3n}+a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & b_{m3}+a_{m3} & \dots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= A_{m\times n} + B_{m\times n}$$

Untuk menunjukkan bahwa sifat komutatif tidak berlaku pada $A_{m\times n} - B_{m\times n} \neq B_{m\times n} - A_{m\times n}$, cukup menunjukkan bahwa $a_{11} - b_{11} \neq b_{11} - a_{11}$, kecuali jika matriks adalah matriks nol.

3) Perkalian Suatu Bilangan Real dengan Matriks

Dalam aljabar matriks, bilangan real *k* sering disebut sebagai skalar. Oleh karena itu perkalian real terhadap matriks juga disebut sebagai perkalian skalar dengan matriks.

Secara umum, perkalian skalar dengan matriks dirumuskan sebagai berikut.

Definisi 4.4

Misalkan *A* adalah suatu matriks berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen a_{ij} dan *k* adalah suatu bilangan real. Matriks *C* adalah hasil perkalian bilangan real *k* terhadap matriks *A*, dinotasikan: $C = k.A$, bila matriks *C* berordo $m \times n$ dengan elemen-elemennya ditentukan oleh:

$$c_{ij} = k.a_{ij} \text{ (untuk semua } i \text{ dan } j).$$

Sebelumnya, pada kajian pengurangan dua matriks, $A - B = A + (-B)$, $(-B)$ dalam hal ini sebenarnya hasil kali bilangan –1 dengan semua elemen matriks B. Artinya, matriks $(-B)$ dapat kita tulis sebagai:

$$-B = (-1).B.$$

Contoh 4.7

a) Jika $H = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka $2H = \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times 3 \\ 2\times 4 & 2\times 5 \\ 2\times 1 & 2\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

b) Jika $L = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 15 \\ 0 & 24 & 18 \\ 3 & -3 & -12 \end{bmatrix}$, maka

$$\frac{1}{3}L = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\times 12 & \frac{1}{3}\times 30 & \frac{1}{3}\times 15 \\ \frac{1}{3}\times 0 & \frac{1}{3}\times 24 & \frac{1}{3}\times 18 \\ \frac{1}{3}\times 3 & \frac{1}{3}\times(-3) & \frac{1}{3}\times(-12) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 \\ 0 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

c) Jika M = $\begin{bmatrix} 12 & 24 & 36 \\ 48 & 60 & 72 \end{bmatrix}$, maka

$$\frac{1}{4}M + \frac{3}{4}M = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\times 12 & \frac{1}{4}\times 24 & \frac{1}{4}\times 36 \\ \frac{1}{4}\times 48 & \frac{1}{4}\times 60 & \frac{1}{4}\times 72 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4}\times 12 & \frac{3}{4}\times 24 & \frac{3}{4}\times 36 \\ \frac{3}{4}\times 48 & \frac{3}{4}\times 60 & \frac{3}{4}\times 72 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 18 & 27 \\ 36 & 45 & 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 36 \\ 48 & 60 & 72 \end{bmatrix} = M.$$

> Secara umum berlaku bahwa M suatu matriks berordo $m \times n$, dengan elemen-elemen a_{ij}, p dan q bilangan real. Jika $C = (p + q).M$, maka matriks C berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen $c_{ij} = (p + q)a_{ij}$ untuk setiap i dan j. Sehingga $(p + q).M = p.\, M + q.\, M$.

d) Diketahui matriks $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$.

Jika c = –1, maka

$$c.(P - Q) = (-1).\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \right) = -1.\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Di sisi lain, jika P dan Q merupakan dua matriks berordo sama, dan c adalah bilangan real, maka $c.(P–Q) = c.P–c.Q$. Demikian juga untuk $c.(P + Q) = c.P + c.Q$. (Tunjukkan!)

e) Dengan menggunakan matriks $L = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix}$ dan $p = 2$ dan $q = \frac{1}{2}$.

Kita dapat memahami bahwa:

$$q \times L = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 5 \\ 0 & 12 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Jika kita mengalikan p dengan $(q.L)$, maka kita akan peroleh:

$$p \times (q \times L) = 2 \times \begin{bmatrix} 6 & 15 & 5 \\ 0 & 12 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 30 & 10 \\ 0 & 24 & 18 \\ 6 & 8 & 16 \end{bmatrix}.$$

Karena p dan q adalah skalar, ternyata dengan mengalikan p dengan q terlebih dahulu, kemudian mengalikannya dengan matriks L, merupakan langkah lebih efektif untuk menyelesaikan $p \, . \, (q \, . \, L)$.

Sekarang, untuk matriks M berordo $m \, . \, n$, p dan q adalah skalar anggota Himpunan Bilangan Real, tunjukkan bahwa: $p \, . \, (q \, . \, L) = (p \, . \, q) \, . \, L$.

Melalui mengamati dan menalar Masalah 4.7, ajak siswa untuk mengenal perbedaan operasi perkalian aljabar dengan perkalian pada matriks.

Beri penjelasan ke siswa bahwa untuk menyelesaikan Masalah 4.7 dengan cara manual kurang efektif dibanding dengan konsep perkalian dua matriks.

4) Perkalian Dua Matriks

Masalah-4.7

Suatu perusahaan yang bergerak pada bidang jasa akan membuka tiga cabang besar di pulau Sumatera, yaitu cabang 1 di kota Palembang, cabang 2 di kota Padang, dan cabang 3 di kota Pekanbaru. Untuk itu, diperlukan beberapa peralatan untuk membantu kelancaran usaha jasa tersebut, yaitu *handphone*, komputer, dan sepeda motor. Di sisi lain, pihak perusahaan mempertimbangkan harga per satuan peralatan tersebut. Lengkapnya, rincian data tersebut disajikan sebagai berikut.

	Handphone (unit)	Komputer (unit)	Sepeda Motor (unit)
Cabang 1	7	8	3
Cabang 2	5	6	2
Cabang 3	4	5	2

Harga *Handphone* (juta)	2
Harga Komputer (juta)	5
Harga Sepeda Motor (juta)	15

Berapakah total biaya pengadaan peralatan yang harus disediakan perusahaan di setiap cabang.

Alternatif Penyelesaian

Tidaklah sulit menyelesaikan persoalan di atas. Tentunya kamu dapat menjawabnya. Sekarang, kita akan menyelesaikan masalah tersebut dengan menggunakan konsep matriks.

Kita misalkan, matriks $C_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, yang

merepresentasikan jumlah unit setiap peralatan yang dibutuhkan di setiap cabang, dan matriks $D_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$, yang

merepresentasikan harga per unit setiap peralatan.

Untuk menentukan total biaya pengadaan peralatan tersebut di setiap cabang, dilakukan perhitungan sebagai berikut.

- Cabang 1
  Total biaya = (7 unit *handphone* × 2 juta) + (8 unit komputer × 5 juta) + (3 unit sepeda motor ×15 juta).
  = Rp99.000.000,00
- Cabang 2
  Total biaya = (5 unit *handphone* × 2 juta) + (6 unit komputer × 5 juta) + (2 unit sepeda motor × 15 juta)
  = Rp70.000.000,00
- Cabang 3
  Total biaya = (4 unit *handphone* × 2 juta) + (5 unit komputer × 5 juta) + (2 unit sepeda motor × 15 juta)
  = Rp 63.000.000,00

Jadi, total biaya pengadaan peralatan di setiap cabang dinyatakan dalam matriks berikut:

$$E_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 99.000.000 \\ 70.000.000 \\ 63.000.000 \end{bmatrix}.$$

Cermati dari perkalian di atas.

Secara langsung, jika matriks $C_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ dikalikan $D_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$ maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.(2)+8.(5)+3.(15) \\ 5.(2)+6.(5)+2.(15) \\ 4.(2)+5.(5)+2.(15) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 99 \\ 70 \\ 63 \end{bmatrix} \text{(dalam satuan juta).}$$

Seandainya matriks D berordo 3×2, atau 3×3, bahkan $3 \times n$, perkalian D dan C masih dapat dilakukan.

Secara matematis, kita dapat menyatakan perkalian dua matriks sebagai berikut. Misalkan matriks $A_{n\times m}$ dan matriks $B_{p\times n}$, matriks A dapat dikalikan dengan matriks B jika banyak baris matriks A sama dengan banyak kolom matriks B. Hasil perkalian matriks A berordo $n \times m$ terhadap matriks B berordo $p \times n$ adalah suatu matriks berordo $m \times p$. Proses menentukan elemen-elemen hasil perkalian dua matriks dipaparkan sebagai berikut.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\text{dan } B_{n\times p} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Jika C adalah matriks hasil perkalian matriks $A_{m\times n}$ dan matriks $B_{n\times p}$, dinotasikan $C = A \times B$, maka

- Matriks C berordo $m \times p$.
- Elemen-elemen matriks C pada baris ke-i dan kolom ke-j, dinotasikan c_{ij}, diperoleh dengan cara mengalikan elemen baris ke-i matriks A dan elemen kolom ke-j matriks B, kemudian dijumlahkan. Dinotasikan

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + \ldots + a_{in}.b_{nj}$$

Mari kita pelajari contoh-contoh di bawah ini, untuk memudahkan kita mengerti akan konsep di atas!

Contoh 4.8

a) Diketahui matriks $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, dan

$B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$,

matriks hasil perkalian matriks A dan matriks B,

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} & a_{11}.b_{13} + a_{12}.b_{23} + a_{13}.b_{33} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32} & a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23} + a_{23}.b_{33} \\ a_{31}.b_{11} + a_{32}.b_{21} + a_{33}.b_{31} & a_{31}.b_{12} + a_{32}.b_{22} + a_{33}.b_{32} & a_{31}.b_{13} + a_{32}.b_{23} + a_{33}.b_{33} \end{bmatrix}$$

Guru memberikan kesempatan kepada siswa untuk memeriksa apakah sifat komutatif berlaku atau tidak berlaku pada perkalian dua matriks, seperti yang dituliskan pada alternatif penyelesaian di samping.

♦ Sekarang, tentukan hasil perkalian matriks B dan matriks A. Kemudian, simpulkan apakah berlaku atau tidak berlaku sifat komutatif pada perkalian matriks? Berikan alasanmu!

Alternatif Penyelesaian

Sekarang kita menentukan hasil kali matriks B dan matriks A.

$$B.A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}.a_{11} + b_{12}.a_{21} + b_{13}.a_{31} & b_{11}.a_{12} + b_{12}.a_{22} + b_{13}.a_{32} & b_{11}.a_{13} + b_{12}.a_{23} + b_{13}.a_{33} \\ b_{21}.a_{11} + b_{22}.a_{21} + b_{23}.a_{31} & b_{21}.a_{12} + b_{22}.a_{22} + b_{23}.a_{32} & b_{21}.a_{13} + b_{22}.a_{23} + b_{23}.a_{33} \\ b_{31}.a_{11} + b_{32}.a_{21} + b_{33}.a_{31} & b_{31}.a_{12} + b_{32}.a_{22} + b_{33}.a_{32} & b_{31}.a_{13} + b_{32}.a_{23} + b_{33}.a_{33} \end{bmatrix}$$

Jelas bahwa hasil kali matriks $A.B$ tidak sama dengan $B.A$.

Tetapi, sifat komutatif berlaku pada perkalian dua matriks jika dan hanya jika matriks A dikalikan dengan matriks indentitas.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dan } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{maka } I \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 + 0.3 & 1.2 + 0.4 \\ 0.1 + 1.3 & 0.2 + 1.4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Disisi lain,

$$A\times I=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.1+2.0&1.0+2.1\\3.1+4.0&3.0+4.1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}.$$

Ditemukan bahwa $A \times I = I \times A$.

b) Mari kita tentukan hasil perkalian matriks

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&3&4\\1&2&0\end{bmatrix},$$

dengan menggunakan konsep perkalian dua matriks di atas, diperoleh:

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&3&4\\1&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.2+2.1&1.3+2.2&1.4+2.0\\3.2+4.1&3.3+4.2&3.4+4.0\\5.2+6.1&5.3+6.2&5.4+6.0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&7&4\\10&17&12\\16&27&20\end{bmatrix}.$$

- Dengan menggunakan hasil diskusi yang kamu peroleh pada contoh a),

  periksa apakah matriks $\begin{bmatrix}2&3&4\\1&2&0\end{bmatrix}$ dapat dikalikan

  dengan matriks $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$?

  Berikan penjelasanmu!

  Hasil kali matriksnya adalah:

$$\begin{bmatrix}2&3&4\\1&2&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.1+3.3+4.5&2.2+3.4+4.6\\1.1+2.3+0.5&1.2+2.4+0.6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}21&40\\7&10\end{bmatrix}$$

Berikan kesempatan kepada siswa untuk mencoba menyelidiki apakah matriks $A=\begin{bmatrix}2&3&4\\1&2&0\end{bmatrix}$ *dapat dikalikan dengan matriks* $B=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$*.Kedua matriks dapat dikalikan karena banyak baris matriks A dan B sama banyak.*

Contoh 4.9

Tentukan nilai a dan b sedemikian $A^2 = a.A + b.I$, bila $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Alternatif Penyelesaian

Perlu kamu ketahui $A^2 = A.\ A$, sama dengan konsep yang berlaku pada aljabar.

- Untuk memantapkan keterampilanmu dalam mengalikan dua matriks, teruskan langkah penyelesaian contoh ini hingga kamu temukan nilai a dan b.

Karena $A^2 = a.A + b.I$, maka berlaku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = a.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + b.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2a \\ 3a & 4a+b \end{bmatrix}$$

- $10 = 2a$, diperoleh $a = 5$.
- $7 = a + b$, karena $a = 5$, maka $b = 2$.

Uji Kompetensi 4.2

Sebelum mengakhiri bab ini, pasti sikap, pengetahuan, dan keterampilan sudah terbentuk pada diri siswa.Untuk memastikannya motivasi siswa untuk mengerjakan masalah dan soal-soal pada Uji Kompeteni 4.2.

1. Misalkan A dan B adalah matriks-matriks berordo 4×5 dan C, D, dan E berturut-turut adalah matriks-matriks berordo 5×2, 4×2, dan 5×4. Tentukanlah yang mana diantara ungkapan matriks di bawah ini yang terdefinisi. Jika ada, tentukanlah ukuran matriks tersebut!

   (a) BA (d) $AB + B$

   (b) $AC + D$ (e) $E\,(A + B)$

   (c) $AE + B$ (f) $E\,(AC)$

2. Tentukanlah hasil perkalian matriks-matriks berikut!

   a) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

   b) $6 \times \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 8 & 8 & 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

3. Apa yang dapat kamu jelaskan dengan operasi pembagian pada matriks? Misalnya, jika diketahui matriks $A \times X = B$, dengan matriks A dan B yang diketahui. Bagaimana kita menentukan matriks X? Paparkan hasil kerjamu di depan kelas!

4. Berikan contoh permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang menerapkan konsep perkalian matriks! (Selain konteks persoalan yang sudah disajikan pada buku ini).

5. Diketahui matriks-matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^t$$

dan $F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}^t$.

Dari semua matriks di atas, pasangan matriks manakah yang dapat dijumlahkan dan dikurangkan. Kemudian selesaikanlah!

6. Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$,

dan X suatu matriks berordo 2×3 serta memenuhi persamaan $A + X = B$.

Tentukan matriks X!

7. Tentukanlah nilai p, q, r, dan s pada persamaan matriks berikut!

$$5\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ -15 & 14 \end{bmatrix}$$

8. Diketahui kesamaan matriks:

$$\begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} + 3T = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 16 & 20 \end{bmatrix}$$

Tentukan matriks T.

9. Diketahui matriks-matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ \text{dan}$$

$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

Jika $F(X, Y, Z)$ didefinisikan sebagai

$F(X, Y, Z) = 4X - 2Y + Z$.

Tentukanlah

i. $F(A, B, C)$!

ii. $F(2A, 3B, 2C)$!

10. Diketahui matriks $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$,

    kemudian diberikan matriks-matriks berikut:

    $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

    $J = G^t$, $K = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ dan $L = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

    Matriks manakah yang dapat dikalikan dengan matriks G? Kemudian tentukan hasilnya!

11. Untuk setiap matriks A dan B adalah matriks persegi. Tentukanlah nilai kebenaran setiap pernyataan di bawah ini!

    a) Jika elemen kolom ke-1 matriks A semuanya nol, maka elemen kolom ke-1 matriks AB juga semuanya nol.

    b) Jika elemen pada baris ke-1 pada matriks A semuanya nol, maka elemen baris ke-1 matriks AB juga semuanya nol.

12. Berikan dua matriks A dan dua matriks B yang memenuhi kesamaan: $(A + B)^t = (A^t + B)$.

13. Berikan dua matriks A dan dua matriks B yang memnuhi kesamaan matriks berikut

    a) $(A + B)^2 = A^2 + B^2$

    b) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

14. Jika matriks $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, maka

tentukanlah $C^3 - 4C^2 + C - 4I$, dengan matriks I merupakan matriks identitas berordo 3×3.

15. Tentukanlah nilai x dan y yang memenuhi syarat berikut ini!

a) $G = \begin{bmatrix} y & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ dan $G^2 = I$

b) $Y = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ dan $F^2 = x.F + y.I$

I adalah matriks identitas berordo 2×2.

Sebagai bahan perenungan kembali terhadap materi apa saja yang sudah dipelajari pada bab ini, ajak siswa untuk membaca dan memahami bagaian penutup ini sebagai modal dalam melanjutkan materi matematika pada bab selanjutnya.

D. PENUTUP

Setelah selesai membahas materi matriks, ada beberapa hal penting sebagai kesimpulan yang dijadikan pegangan dalam mendalami dan membahas materi lebih lanjut, antara lain:

1. Matriks adalah susunan bilangan-bilangan dalam baris dan kolom.

2. Sebuah matriks A ditransposkan menghasilkan matriks A^t dengan elemen baris matriks A berubah menjadi elemen kolom matriks A^t. Dengan demikian matriks A^t ditransposkan kembali, hasinya menjadi matriks A atau $(A^t)^t = A$.

3. Jumlah sebarang matriks dengan matriks nol adalah matriks itu sendiri.

4. Dalam operasi penjumlahan dua matriks berlaku sifat komutatif dan assosiatif, yaitu jika A, B, dan C adalah matriks, maka
   a. $A + B = B + A$
   b. $A + (B + C) = (A + B) + C$

5. Hasil kali sebuah matriks dengan suatu skalar atau suatu bilangan real k adalah sebuah matriks baru yang berordo sama dan memiliki elemen-elemen k kali elemen-elemen dari matriks semula.

6. Dua matriks hanya dapat dikalikan apabila banyaknya kolom matriks yang dikali sama dengan banyaknya baris matriks pengalinya.

7. Hasil perkalian matriks A dengan matriks identitas adalah matriks A.

8. Perkalian dua matriks tidak memenuhi sifat komutatif. Tetapi perkalian matriks dengan skalar memenuhi sifat komutatif dan assosiatif. Misal jika k adalah skalar, A, dan B adalah matriks maka berlaku.
   a. $k \cdot A = A \cdot k$
   b. $k \cdot (A \pm B) = k \cdot A \pm k.B$
9. Hasil kali dua matriks menghasilkan sebuah matriks baru, yang elemen-elemennya merupakan hasil perkalian elemen baris matriks A dan elemen kolom matriks B. Misal jika $A_{p \times q}$ dan $B_{q \times r}$ adalah dua matriks, maka berlaku $A_{p \times q} \times B_{q \times r} = C_{p \times r}$.

Materi matriks merupakan syarat mutlak untuk mempelajari materi program linear. Untuk mempelajari program linear, diperlukan tambahan konsep determinan dan invers matriks. Program linear adalah salah metode menyelesaikan masalah nyata yang terkait dengan tujuan memaksimumkan atau meminimumkan suatu fungsi tujuan dengan kendala yang terkait.

Catatan:

Bab 5

Relasi dan Fungsi

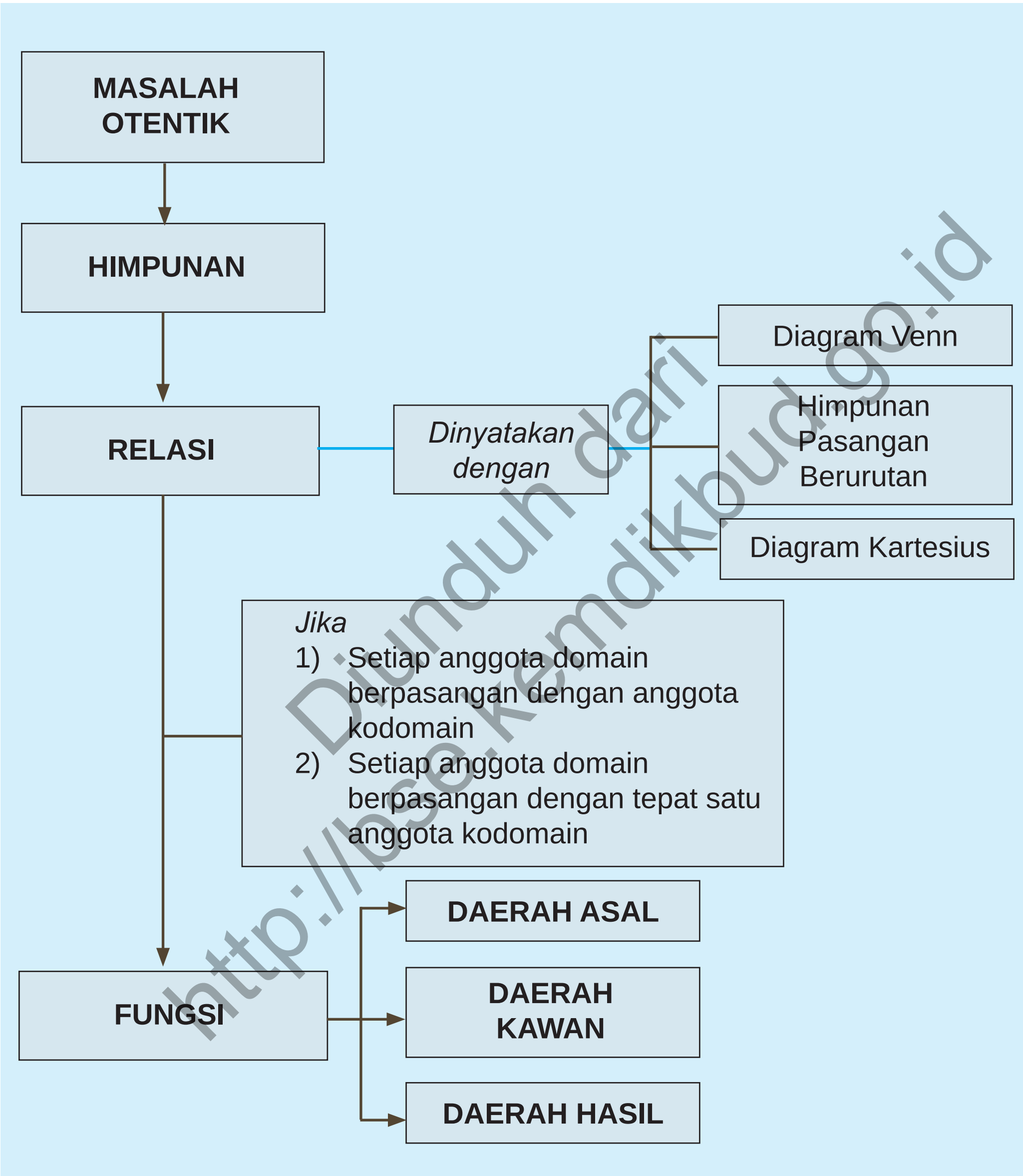
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Mendeskripsikan daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil suatu relasi antara dua himpunan yang disajikan dalam berbagai bentuk (grafik, himpunan pasangan terurut, atau ekspresi simbolik) 3. Mengidentifikasi relasi yang disajikan dalam berbagai bentuk yang merupakan fungsi. 4. Menerapkan daerah asal, dan daerah hasil fungsi dalam menyelesaikan masalah.	Melalui pembelajaran relasi dan fungsi siswa memperoleh pengalaman belajar: • menemukan konsep relasi dan fungsi melalui pemecahan masalah otentik; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial-kultural; • berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep relasi dan fungsi dalam memecahkan masalah otentik; • menjelaskan konsep daerah asal (domain), daerah kawan (kodomain), dan daerah hasil (range) suatu relasi; • menyatakan sebuah relasi dengan diagram panah, himpunan pasangan terurut, dan diagram venn; • menemukan sifat-sifat relasi; • menuliskan dengan kata-katanya sendiri konsep relasi berdasarkan sifat-sifat yang dituliskan sebelumnya; • menjelaskan konsep daerah asal (domain), daerah kawan (kodomain), dan daerah hasil (range) suatu fungsi; • menyatakan sebuah fungsi dengan diagram panah, himpunan pasangan terurut, dan diagram venn; • menggunakan konsep dan prinsip relasi dan fungsi untuk memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Relasi*
- *Fungsi*
- *Daerah asal (domain)*
- *Daerah kawan (kodomain)*
- *Daerah hasil (range)*

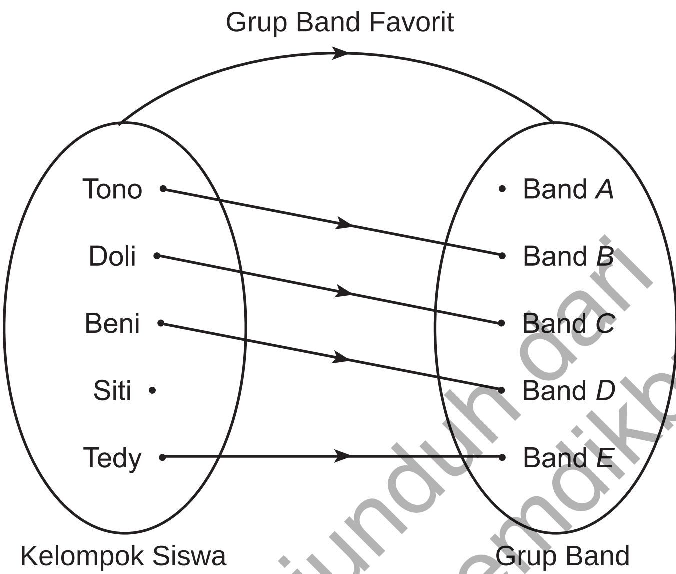
B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Relasi

Gambar di bawah menyatakan hubungan antara kelompok siswa dengan kelompok grup band favoritnya.



Gambar 5.1 Grup band favorit sejumlah siswa

Dari gambar di atas, tanpa ada penjelasan yang lebih terinci dapat ditemukan fakta-fakta berikut.

(1) Grup band favorit Tono adalah Band *B*.
(2) Grup band favorit Doli adalah Band *C*.
(3) Grup band favorit Beni adalah Band *D*.

- Selain ketiga fakta di atas, temukanlah fakta-fakta lain yang berhubungan dengan Gambar 5.1.
- Diskusikan dengan temanmu mengapa kita bisa menduga fakta-fakta tersebut?

Arahkan siswa mengamati Gambar 5.1, hal ini bertujuan untuk mengantar siswa ke penemuan konsep relasi.

Setelah proses pengamatan, beri kesempatan kepada siswa untuk menafsirkan beberapa hal terkait kelompok siswa dan grup band. Hal ini dilakukan untuk menemukan fakta-fakta terkait grup band favorit siswa.

Beberapa fakta-fakta lain yang mungkin ditemukan siswa dari Gambar 5.1 adalah:

(1) Grup band favorit Tedy adalah Band E.
(2) Siti tidak memiliki grup band favorit dari kelompok grup band yang diberikan.
(3) Tidak ada siswa yang grup band favoritnya Band A.

Agar pembelajarannya lebih kontekstual, guru dapat meminta beberapa siswa ke depan kelas mengajukan grup band favorit masing-masing.

Arahkan siswa mengamati Gambar 5.2 dan minta siswa untuk membandingkannya dengan Gambar 5.1.

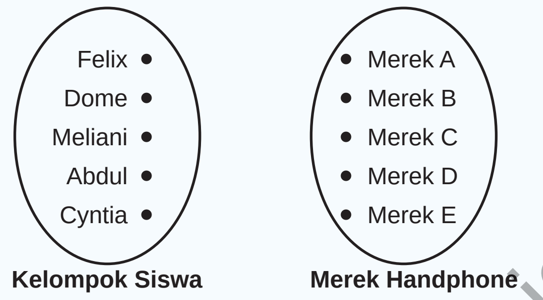
Organisasikan siswa untuk bekerja secara kelompok dan mempersentasikan hasilnya di depan kelas.

Hasil diskusi yang diharapkan dari siswa adalah:

a) Pada Gambar 5.1, beberapa fakta bisa ditemukan dalam hubungannya dengan grup band favorit siswa.

b) Pada Gambar 5.2 kita tidak dapat menemukan hubungan antara kelompok siswa dengan merek handpone yang ada karena tidak ada garis panah yang menghubungkan kedua kelompok tersebut.

Bandingkan dengan gambar berikut.



Gambar 5.2 Kelompok siswa dan merek handpone

Perhatikan kedua gambar di atas, dari Gambar 5.1 dapat ditemukan beberapa hal karena ada garis panah yang menghubungkan kelompok siswa dengan kelompok grup band, dengan aturan menghubungkan adalah: ‘Grup band favorit’. Pada gambar 5.2 kita tidak dapat menemukan hubungan antara kelompok siswa dengan merek handpone yang ada karena tidak ada garis panah yang menghubungkan antara kelompok siswa dengan kelompok merek handpone.

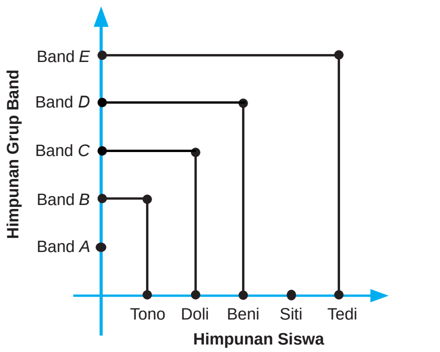
Aturan yang menghubungkan kelompok siswa dengan kelompok grup band pada Gambar 5.1 disebut relasi antara kelompok siswa dengan grup band, relasinya adalah ‘grup band favorit’. Relasi yang disajikan pada Gambar 5.1 di atas ditandai dengan sebuah garis panah dari kelompok siswa menuju kelompok grup band favorit, relasi seperti ini biasa disebut relasi yang dinyatakan dengan diagram panah. Selain dengan diagram panah. Relasi dapat juga dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut dan dengan menggunakan diagram kartesius seperti berikut.

Arahkan siswa untuk mengingat kembali materi pelajaran matematika SMP tentang menyatakan sebuah relasi dapat dilakukan dengan: himpunan pasangan terurut, diagram panah, dan diagram kartesius.

Relasi pada Gambar 5.1 di atas jika dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut ditunjukkan sebagai berikut.

Himpunan pasangan berurutan kelompok siswa dengan grup band favoritnya adalah: {(Tono, Band *B*), (Doli, Band *C*), (Beni, Band *D*), (Tedy, Band *E*)}.

Jika dinyatakan dengan diagram kartesius hasilnya ditunjukkan seperti Gambar 5.3 di samping.



Gambar 5.3 Relasi grup band favorit

Untuk memahami pengertian relasi, perhatikan masalah berikut.

Minta siswa mengamati Masalah 5.1 dan beri kesempatan kepada siswa untuk menganalisis permasalahan yang ada. Beri kebebasan bagi siswa menggali ide-ide secara bebas terbuka, mengajukan berbagai pertanyaan dalam menganalisis informasi yang tersedia pada masalah tersebut.

Masalah-5.1

Dalam rangka memperingati HUT RI ke- 68 di Kabupaten Sorong, SMA Negeri 1 Sorong akan mengirimkan siswanya untuk mengikuti pertandingan antar siswa SMA pada pertandingan tenis lapangan, bola voli, bola kaki, *badminton*, tenis meja, dan catur. Terdapat 6 siswa (Udin, Joko, Dayu, Siti, Beni, dan Tono) yang akan mengikuti pertandingan tersebut. Sekolah membuat dua alternatif pilihan dalam menentukan pertandingan yang akan diikuti oleh keenam siswa tersebut. Kedua pilihan itu adalah:

1) Udin ikut pertandingan tenis lapangan dan bola voli, Joko ikut pertandingan *badminton*, Dayu ikut pertandingan catur, Siti ikut pertandingan bola voli, Beni ikut pertandingan tenis meja, dan Tono ikut pertandingan tenis meja.
2) Dayu dan Siti mengikuti pertandingan bola voli, Joko dan Udin mengikuti pertandingan bola kaki, Tono mengikuti pertandingan tenis meja, dan Beni mengikuti pertandingan catur.

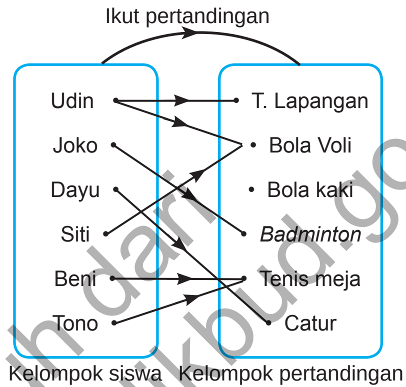
Jika pilihan sekolah adalah butir (1), pasangkanlah siswa dengan jenis pertandingan yang akan diikuti menggunakan diagram panah, pasangan terurut, dan diagram kartesius.

Alternatif Penyelesaian

Alternatif penyelesaian masalah ditunjukkan sebagai berikut.

1) Dengan menggunakan pilihan butir (1), pasangan siswa dengan jenis pertandingan yang dikuti sebagai berikut.

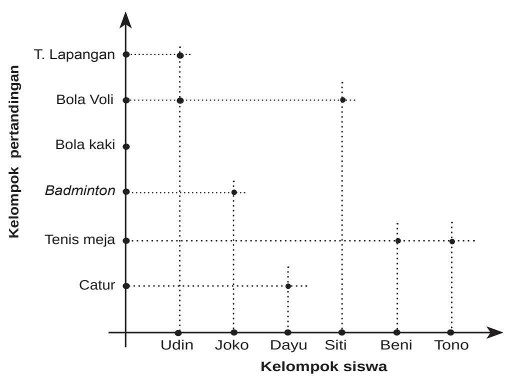
   a) Dengan diagram panah



Gambar 5.4 Pasangan siswa dengan pertandingan yang diikuti

b) Dengan himpunan pasangan terurut
   Himpunan pasangan terurut: {(Udin, tenis lapangan), (Udin, bola volley), (Joko, badminton), (Dayu, catur), (Siti, bola volley), (Beni, tenis meja), (Tono, tenis meja)}

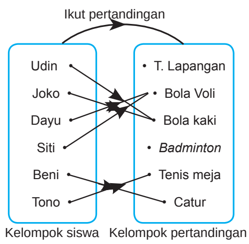
c) Dengan diagram kartesius



Gambar 5.5 Deskripsi pasangan siswa dengan jenis pertandingan yang diikuti

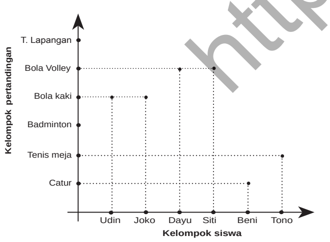
Sebagai latihan siswa, minta mereka menyelesaikan Masalah 5.1 jika ketentuan yang dipilih adalah butir (2). Alternatif penyelesaiannya sebagai berikut.

a) Dengan diagram panah.



b) Dengan himpunan pasangan terurut.
Himpunan pasangan terurut: {(Udin, bola kaki), (Joko, bola kaki), (Dayu, bola volley), (Siti, bola volley), (Beni, catur), (Tono, tenis meja)}

c) Dengan diagram kartesius.



2) Sebagai latihanmu, cara yang sama dengan butir (1) pasangkanlah siswa dengan jenis pertandingan yang diikuti jika pilihan sekolah menggunakan pilihan butir (2).

Berdasarkan contoh dan alternatif penyelesaian masalah di atas, ditemukan definisi relasi sebagai berikut.

Definisi 5.1

Misalkan *A* dan *B* adalah himpunan. Relasi dari *A* ke *B* adalah aturan pengaitan/pemasangan anggota-anggota *A* dengan anggota-anggota *B.*

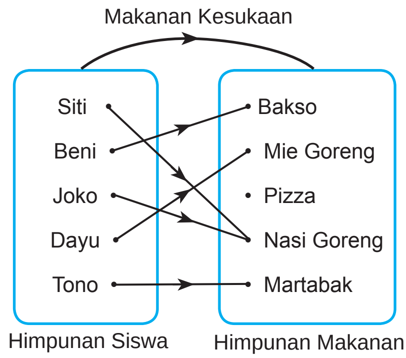
Catatan:

1) Relasi dapat terbentuk apabila terdapat dua himpunan/kelompok yang memiliki anggota yang akan dipasangkan satu dengan yang lain. Pada Gambar 5.1, himpunan pertama yaitu himpunan siswa dan himpunan kedua yaitu himpunan grup band. Pada Masalah-5.1, himpunan pertama yaitu himpunan siswa SMA Negeri 1 Sorong yang akan mengikuti pertandingan dan himpunan kedua yaitu himpunan cabang olah raga yang akan dipertandingkan.
2) Relasi dapat terbentuk apabila ada aturan yang mengaitkan antara anggota himpunan yang satu dengan anggota himpunan yang lain. Pada Gambar 5.1, nama siswa terhubung dengan grup band favoritnya. Pada Masalah-5.1, siswa yang akan bertanding dihubungkan dengan jenis pertandingan yang akan diikuti.

Perhatikan Masalah 5.1 untuk point (1), terlihat bahwa tanda panah mengarah dari anggota himpunan siswa yang akan ikut bertanding ke anggota himpunan pertandingan yang akan di ikuti. Himpunan yang anggotanya akan dipasangkan pada Masalah 5.1 yaitu himpunan siswa disebut daerah asal (*domain*). Himpunan pertandingan yang akan diikuti disebut daerah kawan (*kodomain*). Himpunan yang anggotanya adalah anggota daerah kawan yang memiliki pasangan di daerah asal disebut daerah hasil (*range*).

Bersama-sama dengan siswa menemukan konsep relasi seperti Definisi 5.1. Jelaskan definisi tersebut kepada siswa melalui beberapa contoh dan bukan contoh relasi yang berkaitan dengan permasalahan yang dialami siswa.

Arahkan siswa mengamati catatan di samping. Catatan ini diberikan untuk mengantar siswa menemukan konsep daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil suatu relasi.



Gambar 5.6 Pasangan siswa dengan makanan kesukaan

Dari Gambar 5.6 di atas diperoleh data berikut.

- Relasi himpunan siswa dengan himpunan makanan adalah ‘makanan kesukaan’.
- Makanan kesukaan Siti dan Joko adalah nasi goreng.
- Makanan kesukaan Beni adalah bakso.
- Makanan kesukaan Dayu adalah mie goreng.
- Makanan kesukaan Tono adalah martabak.

Berdasarkan Gambar 5.6, himpunan siswa disebut daeral asal, himpunan makanan disebut daerah kawan, dan himpunan yang anggotanya adalah anggota daerah kawan yang memiliki pasangan dengan anggota daerah asal disebut daerah hasil, ditulis sebagai berikut.

- Daerah asal: {Siti, Beni, Joko, Dayu, Tono}
- Daerah kawan: {bakso, mie goreng, pizza, nasi goreng, martabak}
- Daerah hasil: {bakso, mie goreng, nasi goreng, martabak}

Masalah-5.2

Salah satu upaya pemerintah daerah DKI Jakarta untuk mengurangi kemacetan adalah dengan menaikkan biaya parkir mobil di sepanjang jalan Jenderal Sudirman di Jakarta. Biaya parkir terbaru yang dikeluarkan pemda ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 5.1. Biaya parkir

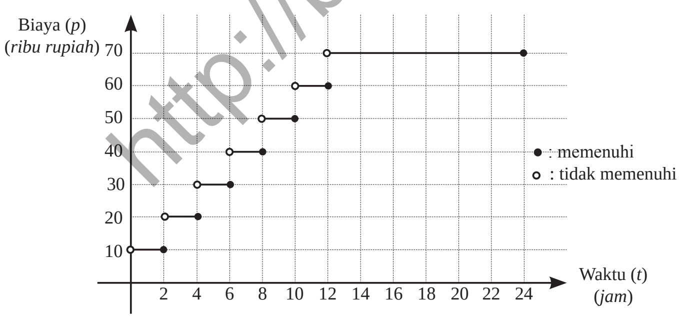
No	Lama waktu (t) (*Dalam satuan jam*)	Biaya Parkir (p) (*Dalam satuan ribu rupiah*)
1	$0 < t \leq 2$	10
2	$2 < t \leq 4$	20
3	$4 < t \leq 6$	30
4	$6 < t \leq 8$	40
5	$8 < t \leq 10$	50
6	$10 < t \leq 12$	60
7	$12 < t \leq 24$	70

Gambarkanlah biaya parkir di atas dalam bentuk grafik kartesius. Jika seseorang memarkirkan mobilnya dari pukul 07.30 WIB sampai dengan pukul 10.00 WIB, berapa biaya parkir yang harus dibayar?

Ajukan Masalah 5.2 kepada siswa. Untuk menyelesaikan masalah ini, organisasikan siswa belajar dalam kelompok. Minta siswa diskusi dengan temannya satu kelompok. Sajikan hasil kerja kelompok di depan kelas.

Alternatif Penyelesaian

Tarif parkir berdasarkan Tabel 5.1 di atas, jika digambarkan dalam grafik kartesius ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 5.7 Biaya parkir per jam

Jika lama waktu parkir dari pukul 07.30 WIB sampai pukul 10.00 WIB, maka seseorang itu parkir selama 2 jam 30 menit dan membayar parkir sebesar Rp 20.000,-.

Beri penjelasan pada siswa bahwa hubungan antara lama waktu parkir dengan biaya parkir merupakan contoh relasi. Bersama-sama dengan siswa untuk mencari domain, kodomain, dan range relasi tersebut.

Hubungan antara lama waktu parkir dengan biaya parkir pada Masalah 5.2 di atas merupakan sebuah contoh relasi.

Dari relasi antara waktu parkir dengan biaya pada Masalah 5.2 di atas, dinyatakan hal-hal berikut.

Daerah asal adalah $\{t : 0 < t \leq 24\}$

Daerah kawan adalah: {10, 20, 30, 40, 50, 60, 70}

Daerah hasil adalah: {10, 20, 30, 40, 50, 60, 70}

Bersama dengan siswa menemukan konsep domain, kodomain, dan range seperti Defnisi 5.2, 5.3, dan 5.4. Uji pemahaman siswa dengan pemberian contoh dan bukan contoh konsep.

Berdasarkan contoh-contoh di atas, ditemukan definisi daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil sebagai berikut.

Definisi 5.2

Daerah asal atau biasa disebut domain suatu relasi adalah himpunan tidak kosong dimana sebuah relasi didefinisikan.

Setelah definisi tersebut ditemukan, ajukan pertanyaan kritis berikut kepada siswa

Definisi 5.3

Daerah kawan atau biasa disebut kodomain suatu relasi adalah himpunan tidak kosong dimana anggota domain memiliki pasangan sesuai relasi yang didefinisikan.

Apakah ada kemungkinan bahwa daerah kawan sama dengan daerah hasil? Berikan alasanmu!

Definisi 5.4

Daerah hasil atau biasa disebut *range* suatu relasi adalah sebuah himpunan bagian dari daerah kawan (*kodomain*) yang anggotanya adalah pasangan anggota domain yang memenuhi relasi yang didefinisikan.

Jawaban yang diharapkan dari pertanyaan kritis ini sebagai berikut.

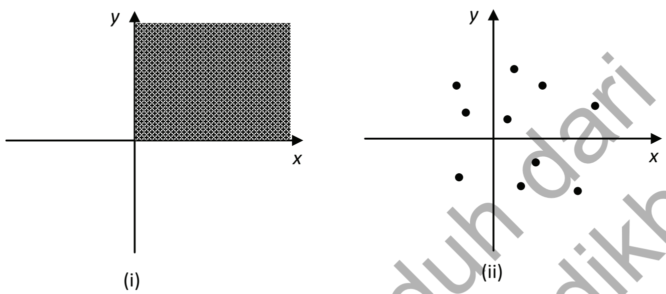
Pertanyaan Kritis

Apakah ada kemungkinan bahwa daerah kawan sama dengan daerah hasil? Berikan alasanmu!

Untuk lebih memahami definisi di atas, buatlah contoh dan bukan contoh relasi dalam kehidupanmu sehari-hari.

Sebuah relasi sering dinyatakan dalam bentuk persamaan dalam variabel x dan y, sebagai contoh: $y = x + 1$ dan $x = y^2$. Nilai x merupakan domain relasi dan nilai y merupakan daerah hasil relasi. Pada persamaan $y = x + 1$, jika domain x dibatasi oleh $0 < x \leq 5$, untuk x bilangan real, maka daerah hasilnya adalah $1 < y \leq 6$.

Akan tetapi, tidak semua relasi dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 5.8 Jenis-jenis relasi

Berdasarkan Gambar 5.8, dapat diketahui bahwa:

(i) Seluruh titik pada $x > 0$ dan $y > 0$ merupakan contoh relasi.

(ii) Kesepuluh titik-titik pada Gambar 5.8 (ii) merupakan contoh relasi.

Jawabannya ya. Alasan: jika semua anggota daerah kawan memiliki pasangan dengan anggota daerah asal maka daerah kawan sama dengan daerah hasil, sebaliknya jika ada anggota daerah kawan yang tidak memiliki pasangan dengan anggota daerah asal maka daerah kawan tidak sama dengan daerah hasil.

Paparan di samping adalah proses pengenalan kepada siswa bahwa relasi dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan dalam variabel x dan y, misalnya: $y = x + 1$ dan $x = y^2$. Nilai x yang memenuhi persamaan tersebut merupakan anggota domain dan nilai y yang memenuhi persamaan merupakan anggota range.

Hal lain yang perlu diperhatikan dan disampaikan pada siswa adalah terdapat relasi yang tidak dapat dinyatakan secara eksplisit dalam bentuk persamaan x dan y. Relasi yang dinyatakan dengan diagram kartesius pada Gambar 5.8 adalah salah satu contohnya.

Ajukan pertanyaan kritis di samping pada siswa. Jawaban yang diharapkan dari pertanyaan kritis tersebut sebagai berikut.
Jawabnya: tidak.
Untuk $x < 0$, x bilangan real, persamaan $x = y^2$ tidak terdefinisi. Artinya tidak ada bilangan real $x < 0$ yang memenuhi persamaan tersebut. Jika persamaan $x = y^2$ diubah ke bentuk $y = \sqrt{x}$, jelas bahwa untuk bilangan real $x < 0$, y tidak terdefinisi.

Jelaskan Contoh 5.1 untuk menemukan konsep hasil kali kartesius dua himpunan. Ajukan berbagai pertanyaan pada siswa untuk menguji pemahaman mereka.

Pertanyaan Kritis

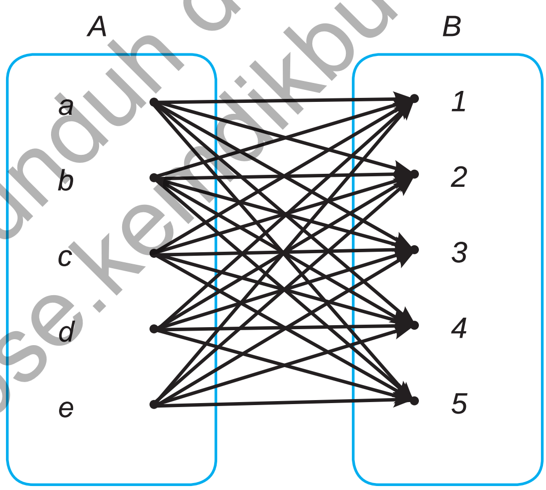
Pada persamaan $x = y^2$, apakah domainnya berlaku untuk semua x bilangan real? Jelaskan.

Contoh 5.1

Diberikan himpunan $A = \{a,b,c,d\}$ dan $B = \{1,2,3,4,5\}$. Pasangkanlah secara terurut setiap anggota himpunan A dengan setiap anggota himpunan B.

Alternatif Penyelesaian

Pasangan terurut setiap anggota himpunan A dengan setiap anggota himpunan B ditunjukkan oleh diagram berikut.



Berdasarkan diagram di atas dapat disimpulkan bahwa banyak anggota himpunan pasangan berurutan anggota himpunan A dan himpunan B sebanyak $5 \times 5 = 25$ buah pasangan. Pasangan dinyatakan dalam bentuk himpunan

$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (a,4), (a,5), (b,1), (b,2), (b,3), (b,4), (b,5),\ldots, (d,5)\}$.

Secara umum himpunan pasangan terurut dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 5.5

Misalkan A dan B dua himpunan. Relasi dari A ke B yang memasangkan setiap anggota himpunan A ke setiap anggota himpunan B disebut hasil kali kartesius A dan B, dan ditulis:

$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$.

Beri penjelasan pada siswa, tentang pemahaman unsur-unsur yang ada pada Definisi 5.5. Minta siswa untuk memegang teguh sifat matematika dalam menetapkan definisi hasil kali kartesius; yaitu, matematika bersandar pada kesepakatan, menggunakan variabel-variabel yang kosong dari arti, menganut kebenaran konsistensi.

2. Sifat-Sifat Relasi

Perhatikan contoh berikut.

Contoh 5.2

Diketahui R relasi pada himpunan $A = \{1,2,3,4\}$, dan dinyatakan dengan pasangan terurut: $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3),(1,4),(2,4),(3,4)\}$. Dari relasi ini diperoleh bahwa:

- Domain R adalah: $\{1, 2, 3\}$ dan range R adalah: $\{1, 2, 3, 4\}$.
- $1 \in$ domain R berpasangan dengan dirinya sendiri atau 1 berpasangan dengan 1. Pasangan terurut $(1,1) \in R$.
- $2 \in$ domain R berpasangan dengan dirinya sendiri atau 2 berpasangan dengan 2. Pasangan terurut $(2,2) \in R$.
- $3 \in$ domain R berpasangan dengan dirinya sendiri atau 3 berpasangan dengan 3. Pasangan terurut $(3,3) \in R$.

Karena seluruh domain R berpasangan dengan dirinya sendiri, maka relasi R bersifat reflektif.

Arahkan siswa mencermati beberapa contoh yang disajikan agar mampu menemukan beberapa sifat relasi. Cek pemahaman siswa dengan mengajukan berbagai pertanyaan terkait himpunan yang berelasi dengan dirinya sendiri. Contoh 5.2 merupakan contoh himpunan yang berelasi dengan dirinya sendiri, sedangkan Contoh 5.3 merupakan contoh himpunan yang tidak berelasi dengan dirinya sendiri.

Bandingkan dengan Contoh 5.3 berikut.

Contoh 5.3

Diketahui P relasi pada himpunan B = {3,4,5}, dan dinyatakan dengan pasangan terurut: P = {(3,3), (3,4), (4,3), (4,4), (5,3), (5,4)}. Dari relasi ini diketahui bahwa:

- Domain P adalah: {3, 4, 5} dan range P adalah: {3, 4}.
- $3 \in$ domain P berpasangan dengan dirinya sendiri atau 3 berpasangan dengan 3. Pasangan terurut $(3,3) \in P$.
- $4 \in$ domain P berpasangan dengan dirinya sendiri atau 4 berpasangan dengan 4. Pasangan terurut $(4,4) \in P$.
- $5 \in$ domain P tidak berpasangan dengan dirinya sendiri atau 5 tidak berpasangan dengan 5. Pasangan terurut $(5,5) \notin P$.

Karena $5 \in$ domain P tidak berpasangan dengan dirinya sendiri yaitu pasangan terurut $(5,5) \notin P$, maka relasi P tidak bersifat reflektif.

Sifat-1 merupakan sifat reflektif sebuah relasi. Beri penjelasan pada siswa tentang unsur-unsur yang ada di dalamnya. Bedakan p sebagai anggota dari himpunan P dan (p,p) sebagai anggota dari relasi R.

Sifat-1: Sifat Reflektif

Misalkan R sebuah relasi yang didefinisikan pada himpunan P. Relasi R dikatakan bersifat refleksif jika untuk setiap $p \in P$ berlaku $(p, p) \in R$.

Ajukan berbagai contoh dan bukan contoh lain yang memenuhi Sifat-1.

Contoh 5.4

Diberikan himpunan P = {1, 2, 3}. Didefinisikan relasi R pada himpunan P dengan hasil relasi adalah himpunan S = {(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2)}. Relasi R tersebut bersifat reflektif sebab setiap anggota himpunan P berpasangan atau berelasi dengan dirinya sendiri.

Contoh 5.5

Diberikan himpunan $Q = \{2,4,5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan Q dengan $R = \{(a,b) \mid a$ kelipatan bulat b, dengan $a,b \in Q\}$, sehingga diperoleh $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$. Relasi R tersebut bersifat reflektif sebab setiap anggota himpunan Q berpasangan atau berelasi dengan dirinya sendiri.

Contoh 5.6

Diberikan himpunan $C = \{2,4,5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan C dengan $R = \{(a,b) \mid a + b < 9$, dengan $a,b \in C\}$, maka diperoleh $S = \{(2,2), (2,4), (2,5), (4,2), (4,4), (5,2)\}$. Relasi R tersebut tidak bersifat refleksif sebab ada anggota himpunan C, yaitu 5 tidak berelasi dengan dirinya sendiri atau $(5, 5) \notin R$.

Sifat-2: Sifat Simetris

Misalkan R sebuah relasi pada himpunan P. Relasi R dikatakan bersifat simetris, apabila untuk setiap $(x, y) \in R$ berlaku $(y, x) \in R$.

Ajukan berbagai contoh relasi yang bersifat simetris pada siswa kemudian jelaskan sifat simetris relasi seperti yang ada pada Sifat-2. Contoh relasi simetris yang berkaitan dengan dunia nyata siswa adalah ketika siswa bersalaman dengan temannya.

Untuk memperkaya pemahaman siswa tentang sifat simetris relasi ajukan contoh dan bukan contoh yang lain selain Contoh 5.7 dan Contoh 5.8.

Contoh 5.7

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan P dengan $R = \{(1,1) , (1,2), (1,3), (2,2), (2,1), (3,1), (3,3)\}$. Relasi R bersifat simetris sebab untuk setiap $(x,y) \in R$, berlaku $(y,x) \in R$.

Contoh 5.8

Diberikan himpunan $A = \{2, 4, 5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan A dengan $R = \{(x, y) \mid x$ kelipatan y, dengan $x, y \in A\}$, maka diperoleh $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$. Relasi R tersebut tidak bersifat simetris karena $(4,2)$ anggota R tetapi $(2,4) \notin R$.

Minta siswa memahami Sifat-3. Uji pemahaman siswa tentang sifat ini melalui Contoh 5.9.

Berikan kesempatan pada siswa untuk membuktikan bahwa untuk setiap relasi R yang memenuhi pada Contoh 5.9 memenuhi sifat transitif.

Bukti yang diharapkan ditemukan siswa adalah:

(1) Pilih $x = 1$, $y = 2$, dan $z = 1$ sehingga: $(1,2) \in R$ dan $(2,1) \in R$ berlaku $(1,1) \in R$.

(2) Pilih $x = 1$, $y = 1$, dan $z = 2$ sehingga: $(1,1) \in R$ berlaku $(1,2) \in R$.

(3) Pilih $x = 2$, $y = 1$, dan $z = 2$ sehingga: $(1,2) \in R$ dan $(2,1) \in R$ berlaku $(2,2) \in R$.

Ajukan pertanyaan kritis di samping pada siswa. Jawaban yang diharapkan dari pertanyaan kritis tersebut sebagai berikut.

(1) Jawabnya: tidak. Karena, jika kita pilih $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ masing-masing anggota P, kita peroleh relasi (2,3) dan (1,3) yang bukan anggota R, sehingga tidak tepat dalam pembuktiannya.

Sifat-3: Sifat Transitif

Misalkan R sebuah relasi pada himpunan P. Relasi R bersifat transitif apabila untuk setiap $(x,y) \in R$ dan $(y,z) \in R$ maka berlaku $(x,z) \in R$.

Contoh 5.9

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi pada himpunan P dengan hasil relasi adalah himpunan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$. Relasi R tersebut bersifat transitif sebab $(x,y) \in R$ dan $(y,z) \in R$ maka berlaku $(x,z) \in R$.

Contoh 5.10

Diberikan himpunan $C = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R dengan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,2)\}$. Relasi R tidak memenuhi sifat transitif, sebab terdapat $(1,1) \in R$ dan $(1,2) \in R$, tetapi $(2,1) \notin R$.

Pertanyaan Kritis

(1) Untuk membuktikan bahwa relasi R pada Contoh 5.9 bersifat transitif, apakah kamu boleh memilih $x = 1$, $y = 2$, dan $z = 3$? Mengapa?

(2) Contoh yang dipilih untuk membuktikan bahwa relasi R pada Contoh 5.10 tidak bersifat transitif adalah: $(1,1) \in R$ dan $(1,2) \in R$, tetapi $(2,1) \notin R$. Jika kamu perhatikan kembali Sifat-3, tentukan nilai x, y, dan z agar bukti itu benar. Berikan alasanmu.

(3) Apakah ada contoh lain yang kamu pilih untuk membuktikan bahwa relasi R pada Contoh 5.10 tidak bersifat transitif? Sebutkan.

Sifat-4: Sifat Antisimetris

Misalkan R sebuah relasi pada sebuah himpunan P. Relasi R dikatakan bersifat antisimetris, apabila untuk setiap $(x,y) \in R$ dan $(y,x) \in R$ berlaku $x = y$.

Contoh 5.11

Diberikan himpunan $C = \{2, 4, 5\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan C dengan $R = \{ (a,b) \in a$ kelipatan b, $a,b \in C\}$ sehingga diperoleh $R = \{(2,2), (4,4), (5,5), (4,2)\}$. Relasi R tersebut bersifat antisimetris.

Contoh 5.12

Diberikan $S = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi R pada himpunan S dengan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$. Relasi R tidak bersifat antisimetris sebab terdapat $(1,2) \in R$ dan $(2,1) \in R$, tetapi $1 \neq 2$.

Definisi 5.6

Misalkan R sebuah relasi pada himpunan P. Relasi R dikatakan relasi ekivalensi jika dan hanya jika relasi R memenuhi sifat reflektif, simetris, dan transitif.

Contoh 5.13

Diberikan himpunan $P = \{1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi pada himpunan P dengan $R = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)\}$. Relasi R tersebut bersifat reflektif, simetris dan transitif. Oleh karena itu relasi R merupakan relasi ekivalensi.

Coba kerjasama dengan temanmu menunjukkan bahwa R dalam Contoh 5.13 memenuhi sifat reflektif, simetris dan transitif.

(2) Relasi R tidak bersifat transitif sebab $(1,1) \in R$ dan $(1,2) \in R$, tetapi $(2,1) \notin R$. Pilih $x = 1$, $y = 2$, dan $z = 1$. Dengan menggunakan Sifat-3 proses pembuktiannya adalah: $(1,2) \in R$ tetapi $(2,1) \notin R$ meskipun $(1,1) \in R$, terbukti.

(3) Jawabnya: ada, salah satunya adalah pilih $x = 1$, $y = 2$, dan $y = 3$, akan kita peroleh $(1,2) \in R$ dan $(2,3)) \in R$ tetapi $(1,3) \notin R$. Masih ada alternatif lain untuk membuktikannya, ajak siswa untuk mencari bukti lain agar siswa lebih kreatif dan kritis.

Definisi 5.6 adalah definisi relasi ekivalensi. Definisi ini diberikan setelah sifat-sifat relasi sudah dipahami oleh siswa. Motivasi siswa belajar dengan memperlihatkan kegunaan matematika dalam kehidupannya.

Organisasikan siswa bekerja secara kelompok untuk menunjukkan bahwa relasi pada Contoh 5.13 memenuhi sifat reflektif, simetris, dan transitif.

Hasil kerja kelompok yang diharapkan adalah sebagai berikut.

Diberikan himpunan P = {1, 2, 3}. Didefinisikan relasi R pada himpunan P dengan R = {(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (3,3)}.

(1) Relasi R bersifat reflektif sebab setiap anggota himpunan P berpasangan atau berelasi dengan dirinya sendiri. 1,2,3 ∈ P dan (1,1), (2,2), (3,3) ∈ R.

(2) Relasi R simetris sebab untuk setiap (p,q) ∈ R, berlaku (q,p) ∈ R, misalnya: (1,2) ∈ R dan (2,1)∈R;

(3) Relasi R transitif sebab untuk setiap (p, q) ∈ R dan (y, z) ∈ R berlaku (x, z)∈R.

Contoh: pilih x = 1, y = 2, z = 3, berlaku sifat transitif yaitu: (1,2)∈R dan (2,3) ∈ R berlaku (1,3)∈R.

Ajak siswa mengamati Masalah 5.3. Berikan kesempatan pada siswa untuk memahami dan bertanya tentang masalah ini.

3. Menemukan Konsep Fungsi

Masalah-5.3

Lima orang siswa yaitu: Afnita, Anita, Amos, Alvenia, dan Aleks merupakan sahabat yang selalu bersama-sama dalam setiap kegiatan sekolah. Bapak Martono adalah guru matematika yang senang dengan persahabatan yang mereka bina karena mereka selalu memiliki nilai paling bagus dari antara teman-teman sekelasnya. Suatu hari bapak Martono ingin mengetahui data-data tentang mereka. Hal itu diperlukannya sebagai bahan motivasi untuk teman-teman satu kelas mereka. Data-data yang diinginkan berupa: berapa jam rata-rata waktu belajar mereka dalam satu hari, dan berapa banyak saudara mereka.

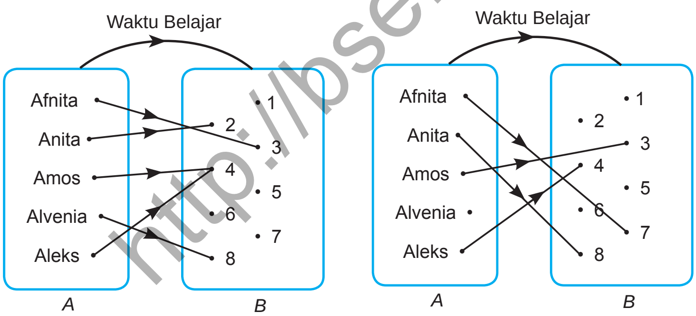
1) Jika kelima sahabat itu dibuat dalam satu himpunan misalnya A = {Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}, dan lama waktu belajar dalam satu hari adalah, B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.
   a. Nyatakanlah sebuah relasi yang mungkin menurutmu menggambarkan lama waktu belajar lima orang sahabat itu.
   b. Apakah semua anggota himpunan A pasti memiliki pasangan anggota himpunan B? Berikan penjelasanmu!
   c. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan A berpasangan dengan 2 atau lebih anggota himpunan B? Berikan penjelasanmu!
   d. Apakah ada kemungkinan bahwa dua anggota himpunan A memiliki pasangan yang yang sama dengan salah satu anggota himpunan B? Berikan penjelasanmu!
2) Jika kelima sahabat itu dibuat dalam satu himpunan misalnya C = {Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}, dan data tentang banyak saudara mereka adalah D = {1, 2, 3, 4}.

a. Nyatakanlah sebuah relasi yang mungkin menurutmu menggambarkan banyak saudara kelima orang sahabat itu.
b. Untuk semua relasi yang mungkin, apakah semua anggota himpunan C memiliki pasangan anggota himpunan D? Berikan penjelasanmu!
c. Apakah ada kemungkinan bahwa anggota himpunan C berpasangan dengan 2 atau lebih anggota himpunan D? Berikan penjelasanmu!
d. Apakah ada kemungkinan bahwa dua anggota himpunan C memiliki pasangan yang yang sama dengan salah satu anggota himpunan D? Berikan penjelasanmu!

Alternatif Penyelesaian

1. Diketahui: A = {Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}
   B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

   a. Relasi yang mungkin menggambarkan rata-rata lama waktu belajar lima orang sahabat itu.



Gambar 5.9 Relasi rata-rata jam belajar

Perlu dipahami oleh guru bahwa relasi ini hanya sebagian relasi yang mungkin menggambarkan rata-rata lama waktu belajar lima orang sahabat itu. Masih terdapat banyak relasi yang mungkin. Seluruh relasi yang dibuat siswa perlu diakomodasi dan dihargai sehingga siswa tidak merasa hal yang dilakukannya salah. Hal seperti ini perlu diperhatikan agar siswa terbiasa dengan ide-ide cerdas yang lain.

b. Jawabannya adalah tidak, karena anggota himpunan B telah dibatasi dari waktu 1 s/d 8 jam, maka diantara kelima sahabat itu dan kemungkinan lain memiliki rata-rata waktu belajar lebih dari 8 jam setiap hari.

c. Jawabannya tidak. Anggota himpunan A dipasangkan dengan anggota himpunan B dengan relasi rata-rata lama waktu belajar. Nilai rata-rata waktu belajar seseorang hanya ada satu nilai, sehingga anggota himpunan A akan dipasangkan dengan salah satu anggota di himpunan B.

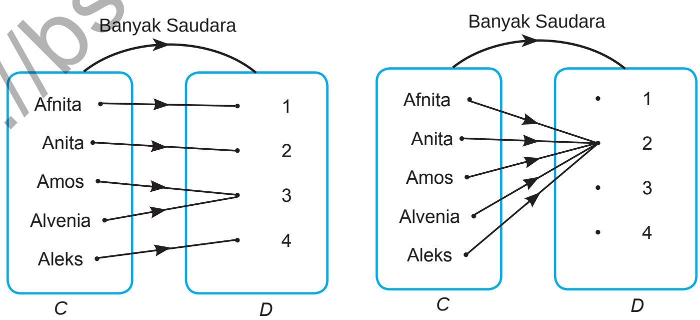
d. Jawabannya ya. Nilai rata-rata waktu belajar seseorang dimungkinkan sama dengan nilai rata-rata waktu belajar orang lain, sehingga anggota-anggota himpunan A memungkinkan memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota di himpunan B.

2. Kelima sahabat itu membentuk satu himpunan misalnya himpunan C dan data tentang banyak saudara mereka himpunan D.

Diketahui: C = {Afnita, Anita, Amos, Alvenia, Aleks}

D = {1, 2, 3, 4}

a) Relasi yang mungkin yang menggambarkan banyak saudara kelima orang sahabat itu ditunjukkan pada diagram panah berikut.



Gambar 5.10 Relasi banyak saudara

b) Jawabannya ya. Karena data tentang banyak saudara kelima sahabat itu ada di anggota himpunan *D*, maka seluruh anggota himpunan *C* pasti memiliki pasangan dengan anggota himpunan *D*.

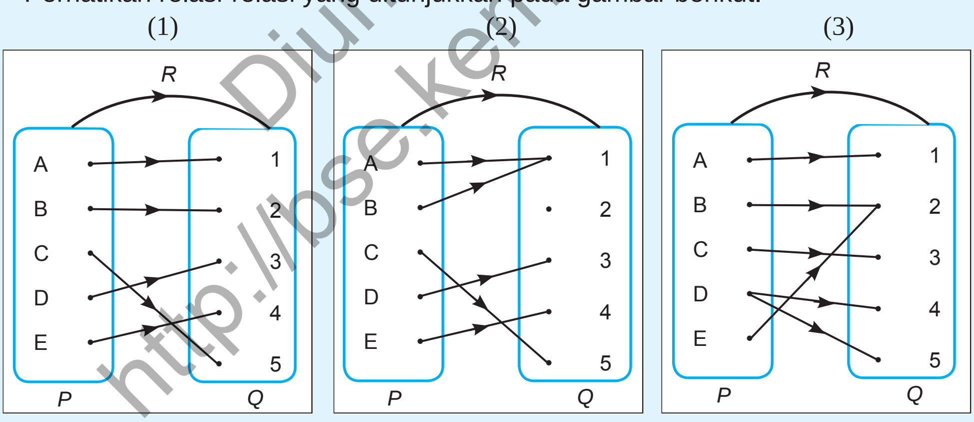
c) Jawabannya tidak. Anggota himpunan *A* dipasangkan dengan anggota himpunan *B* dengan relasi banyak saudara. Banyak saudara seseorang hanya ada satu nilai, sehingga anggota himpunan *C* akan dipasangkan dengan salah satu anggota di himpunan *D*.

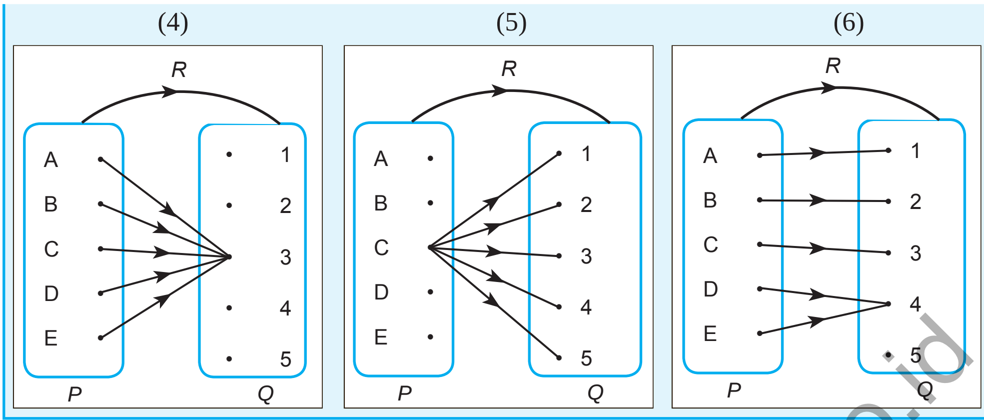
d) Jawabannya ya. Banyak saudara seseorang dimungkinkan sama dengan banyak saudara orang lain, sehingga anggota-anggota himpunan *C* memungkinkan memiliki pasangan yang sama dengan salah satu anggota di himpunan *D*.

Setelah Masalah 5.3 dapat dipecahkan oleh siswa, selanjutnya guru me-ngajukan Masalah 5.4. Masalah ini bertujuan agar siswa mampu membedakan relasi dengan fungsi. Perbedaan kedua fakta ini akan dibahas seperti berikut.

Masalah-5.4

Perhatikan relasi-relasi yang ditunjukkan pada gambar berikut.





Uraikanlah fakta-fakta untuk semua relasi yang ditunjukan pada gambar.

Alternatif Penyelesaian

Dari gambar di atas, uraian fakta untuk semua relasi yang diberikan adalah sebagai berikut.

Relasi 1:

- ♦ Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan anggota himpunan *Q*
- ♦ Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan tunggal dengan anggota himpunan *Q*
- ♦ Semua anggota himpunan *Q* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Relasi 2:

- ♦ Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q*.
- ♦ Ada anggota himpunan *P* yang berpasangan dengan dua buah anggota himpunan *Q*.
- ♦ Ada anggota himpunan *Q* yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Relasi 3:

- ♦ Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q*.
- ♦ Ada anggota himpunan *P* yang berpasangan dengan dua anggota himpunan *Q*.

- Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 4:

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 5:

- Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan P yang berpasangan dengan semua anggota himpunan Q.
- Semua anggota himpunan Q memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 6:

- Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi 1, relasi 2, dan relasi 4 merupakan contoh fungsi. Syarat sebuah relasi menjadi fungsi adalah sebagai berikut.

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan tunggal dengan anggota himpunan Q.

Berdasarkan contoh-contoh di atas kita temukan definisi fungsi sebagai berikut.

Bersama-sama dengan siswa menemukan konsep fungsi. Ajukan beberapa contoh fungsi dan bukan fungsi dari relasi.

Definisi 5.7

Misalkan A dan B himpunan.
Fungsi f dari A ke B adalah suatu aturan pengaitan yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B.

Penulisan fungsi secara simbolik perlu diperhatikan guru, sebagai berikut.

(1) fungsi f memetakan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B ditulis:

$f : A \rightarrow B.$

(2) fungsi f memetakan a ke b: ditulis:

$f : a \rightarrow b.$

(3) perbedaannya adalah A,B menyatakan himpunan sedangkan a, b menyatakan anggota himpunan.

Definisi 5.7 di atas, secara simbolik ditulis menjadi $f : A \rightarrow B$, dibaca: fungsi f memetakan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B.

Jika f memetakan suatu elemen $x \in A$ ke suatu $y \in B$ dikatakan bahwa y adalah peta x oleh fungsi f dan peta ini dinyatakan dengan notasi $f(x)$ dan x disebut prapeta y, dengan demikian dapat ditulis menjadi:
$f : x \rightarrow y$, dibaca: fungsi f memetakan x ke y, sedemikian hingga $y = f(x)$.

Perhatikan kembali Masalah 5.3 di atas, berilah alasan mengapa relasi 3, relasi 5, dan relasi 6 bukan fungsi.

Alternatif Penyelesaian

1) Relasi 3 bukan fungsi karena ada anggota himpunan P yang berpasangan tidak tunggal dengan anggota himpunan Q yaitu D yang berpasangan dengan 4 dan 5 meskipun seluruh anggota himpunan P memiliki pasangan di himpunan Q.
2) Relasi 5 bukan fungsi karena:
   a. Ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q yaitu $\{A, B, D, E\}$.
   b. Ada anggota himpunan P yang memiliki pasangan tidak tunggal dengan anggota himpunan Q yaitu $\{C\}$.
3) Relasi 6 bukan fungsi karena ada anggota himpunan P yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q yaitu $\{D\}$.

Contoh 5.14

Diketahui fungsi $f : x \mapsto f(x)$ dengan rumus fungsi $f(x) = px - q$. Jika $f(1) = -3$ dan $f(4) = 3$, tentukanlah nilai p dan q kemudian tuliskanlah rumus fungsinya.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui $f(x) = px - q$.

$f(1) = -3$

$f(4) = 3$.

Ditanya nilai p, q, dan rumus fungsi

Jika $f(1) = -3$ maka $f(x) = px - q \rightarrow -3 = p - q$ .... (1)

Coba kamu jelaskan mengapa demikian?

Jika $f(4) = 3$ maka $f(x) = px - q \rightarrow 3 = 4p - q$ .... (2)

Coba kamu jelaskan mengapa demikian?

Dengan menerapkan metode eliminasi pada persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$\begin{array}{rl} -3 &= p - q \\ 3 &= 4p - q \\ \hline -6 &= p - 4p \end{array} \; -$$

$-6 = -3p$

$p = 2$

Substitusi nilai $p = 2$ ke persamaan $-3 = p - q$

Sehingga diperoleh:

$-3 = 2 - q$

$-3 = 2 - q \rightarrow q = 2 + 3 \rightarrow q = 5$

Jadi diperoleh $p = 2$ dan $q = 5$

Berdasarkan nilai p dan q, maka rumus fungsi $f(x) = px - q$ menjadi $f(x) = 2x - 5$.

Contoh 5.15

Diketahui fungsi f dengan rumus $f(x) = \sqrt{2x+6}$. Tentukanlah domain fungsi f agar memiliki pasangan anggota himpunan bilangan real.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui: $f(x) = \sqrt{2x+6}$

Ditanya: domain f

Domain fungsi f memiliki pasangan dengan anggota himpunan bilangan real apabila

$2x + 6 \geq 0$,

$2x \geq -6 \quad \leftrightarrow \quad x \geq -3$.

Ajukan pertanyaan-pertanyaan di samping pada siswa. Organisasikan siswa agar bekerja secara kelompok dan mempersentasikan hasilnya di depan kelas.

Jawaban yang diharapkan ditemukan siswa adalah sebagai berikut.

(1) *Fungsi* $f = \sqrt{2x+6}$ *terdefinisi pada bilangan real apabila* $2x + 6 \geq 0$*? karena bentuk* $\sqrt{x}$ *akan terdefinisi apabila* $x \geq 0$.

(2) *Tidak. Karena* $\sqrt{2x+6}$ *terdefinisi apabila* $2x + 6 \geq 0$.

(3) *Tidak. Jika* $x = 4$ *disubstitusikan ke dalam fungsi* $f = \sqrt{2x+6}$ *akan kita peroleh* $f = \sqrt{2(-4)+6} = \sqrt{-2}$ *(tidak terdefinisi).*

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu:
Berdasarkan Contoh 5.15:

a) Mengapa fungsi f memiliki pasangan anggota himpunan bilangan real apabila $2x + 6 \geq 0$?
b) Apakah f terdefinisi untuk $2x + 6 < 0$? Mengapa?
c) Apakah $x = -4$ memiliki pasangan? Mengapa?

Contoh 5.16

Diketahui f suatu fungsi $f : x \to f(x)$. Jika 1 berpasangan dengan 4 dan $f(x+1) = 2f(x)$. Tentukan pasangan $x = 4$?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui: $f : x \to f(x)$
$f(1) = 4$
$f(x+1) = 2\,f(x)$

Ditanya: $f(4)$?

Jawab: $f(x+1) = 2f(x)$
untuk $x = 1$, maka $f(1+1) = 2f(1)$
$f(2) = 2.f(1) = 2.4 = 8$
$f(3) = 2.f(2) = 2.8 = 16$
$f(4) = 2.f(3) = 2.16 = 32$
karena $f(4) = 32$, maka pasangan $x = 4$ adalah 32.

Diskusi

Berdasarkan Contoh 5.16, diskusikan dengan temanmu hal-hal berikut.

a. Tentukan pasangan $x = 2013$
b. Bagaimana cara paling cepat menentukan pasangan tersebut?

Contoh 5.17

Diketahui f sebuah fungsi yang memetakan x ke y dengan rumus $y = \dfrac{x+2}{2x \square 6}$. Tentukan rumus fungsi jika g memetakan y ke x.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui f sebuah fungsi yang memetakan x ke y dengan rumus $y = \dfrac{x+2}{2x-6}, x \neq 3$. Tuliskanlah rumus fungsi jika g memetakan y ke x.

Diketahui: f sebuah fungsi yang memetakan x ke y dengan rumus $y = \dfrac{x+2}{2x \square 6}$, dimana $x \neq 3$ dan x bilangan real.

Ditanya: rumus fungsi g yang memetakan y ke x.

Jawab:

$$y = \frac{x+2}{2x \square 6}$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x-6)(y) = x + 2 \qquad \text{(kedua ruas dikalikan } 2x - 6\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2xy - 6y = x + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2xy - x = 6y + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x(2y-1) = 6y + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{6y+2}{2y-1} \qquad \text{(kedua ruas dibagi } 2y - 1\text{)}$$

Maka fungsi g memetakan y ke x dengan rumus: $g(y) = \dfrac{6y+2}{2y-1}$.

Organisasikan siswa untuk bekerja secara kelompok mengerjakan pertanyaan di samping. Ajak siswa untuk mengingat kembali konsep pola bilangan di SMP.

Jawaban yang diharapkan dari siswa adalah:

Untuk menyelesaikan soal ini perlu dilihat pola yang terbentuk dalam penyelesaian Contoh 5.16. Ingat juga sifat-1: $a^m \times a^n = a^{m+n}$ *yang tertera pada Bab 1*

Pola yang sudah ada kita bentuk seperti berikut.

$$f(2) = 2.f(1) = 2 \times 2^2 = 2^3$$
$$f(3) = 2.f(2) = 2 \times 2^3 = 2^4$$
$$f(4) = 2.f(3) = 2 \times 2^4 = 2^5$$
$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$
$$f(n) = 2.f(n-4) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

Sehingga dengan mudah kita ketahui bahwa

$$f(2013) = 2 \times 2^{2013} = 2^{2014}.$$

Organisasikan siswa bekerja secara kelompok mengerjakan pertanyaan di samping. Jawaban pertanyaan yang diharapkan dari siswa adalah:

(a) Jawabnya: tidak, karena jika x = 3 di substitusikan ke persamaan $y = \frac{x+2}{2x \square 6}$ *akan kita peroleh nilai* $y = \frac{3+2}{2(3)-6} \leftrightarrow y = \frac{5}{0}$ *dan nilai ini tidak terdefinisi.*

(b) Jawabnya: tidak, karena jika y = $\frac{1}{2}$ *di substitusikan ke persamaan* $x = \frac{6y+2}{2y-1}$. *akan kita peroleh nilai :* $g\left(\frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{6\left(\frac{1}{2}\right)+2}{2\left(\frac{1}{2}\right)-1} \leftrightarrow y = \frac{5}{0}$$

dan nilai ini tidak terdefinisi.

(c) Agar $y = \frac{x+2}{2x-6}$ *terdefinisi maka nilai* $2x - 6 \neq 0$.

Diskusi

Diskusikan dengan temanmu:

Berdasarkan Contoh 5.17:

a) Jika f: $x \to y$, apakah $x = 3$ memiliki pasangan anggota himpunan bilangan real? Mengapa?

b) Jika g: $y \to x$. apakah $y = \frac{1}{2}$ memiliki pasangan anggota himpunan bilangan real? Mengapa?

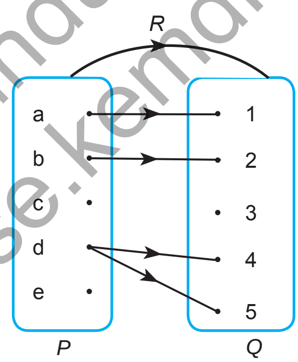
c) Berikan syarat agar f: $x \to y$ terdefinisi.

d) Berikan syarat agar g: $y \mapsto x$ terdefinisi.

Uji Kompetensi 5.1

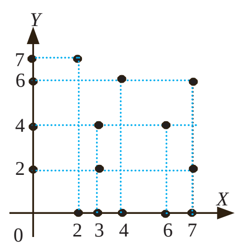
1. Tentukanlah daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil dari relasi-relasi berikut.

a)



b) Relasi yang dinyatakan dengan pasangan terurut: {(Yaska, Nora), (Riwanti, Glorista), (Felix, Krisantus), (Ramsida, Dahniar)}

c)



2. Sekumpulan anak yang terdiri atas 5 orang yaitu: Siti, Beni, Dayu, Joko, dan Tono berturut-turut berusia 6, 7, 9, 10, dan 11 tahun. Pasangkanlah usia tiap-tiap anak pada bilangan prima yang kurang dari 15. Apakah semua anak dapat dipasangkan? Tentukanlah daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasilnya!

3. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan himpunan $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12\}$. Nyatakanlah relasi A terhadap B dengan rumus berikut.

   a) $b = a + 1$, $a \in A$ dan $b \in B$.

   b) $b = 2a + 2$, $a \in A$ dan $b \in B$.

   Kemudian periksa apakah relasi yang terbentuk adalah fungsi atau tidak, jelaskan

4. Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 6\}$ dan $B = \{2, 3, 6, 12\}$

   a) Gambarlah diagram panah dari himpunan A ke himpunan B yang menunjukkan relasi 'faktor dari'.

   b) Nyatakanlah hubungan itu dengan himpunan pasangan terurut dan grafik kartesius

5. Diketahui himpunan $P = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Bila relasi dari P ke Q adalah 'kurangnya 1 dari', apakah relasi tersebut merupakan fungsi? Jelaskan dan gambarlah relasi tersebut dalam diagram panah.

6. Diketahui fungsi $f(x) = 2x + 1$ dengan daerah asal $\{x \mid -3 \leq x \leq 2, x$ bilangan bulat$\}$, tentukanlah.

   a) Daerah asal dengan mendaftar anggotanya satu persatu.

   b) Daerah hasil.

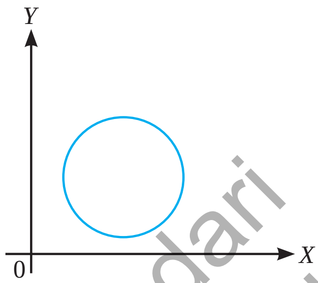
   c) Nyatakanlah fungsi tersebut dengan diagram panah, pasangan terurut, dan grafik kartesius

Ajak siswa untuk mencoba menyelesaiakan berbagai soal-soal yang terdapat pada Uji Kompetensi 5.1 di samping. Soal-soal uji kompetensi ini bertujuan untuk mengetahui apakah siswa memahami konsep relasi dan fungsi. Soal-soal ini juga dapat diberikan sebagai tugas di rumah.

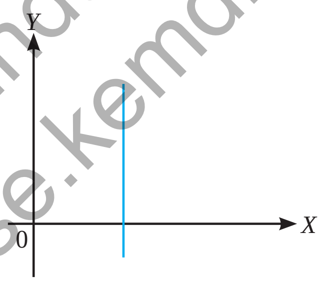
7. Jika siswa direlasikan dengan tanggal kelahirannya. Apakah relasi tersebut merupakan fungsi? Berikan penjelasanmu!

8. Perhatikan gambar berikut!
Manakah yang merupakan fungsi, jika daerah asalnya merupakan sumbu X?

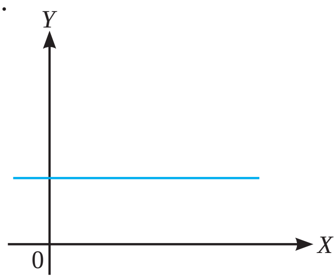
a.



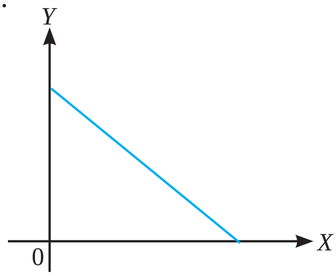
b.



c.



d.



9. Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{8}{5-x}$ dengan $x \neq 5$. Tentukanlah

   a) $f(1)$

   b) $f(-3)$

   c) $f(7)$

   d) Nilai x jika $f(x) = 2$

   e) Nilai a, jika $f(a) = 0{,}5$

10. Diketahui rumus fungsi $f(x) = ax + b$. Jika $f(3) = 15$ dan $f(-2) = 10$, tentukanlah.

    a) Nilai a dan b

    b) Rumus fungsi $f(x)$

    c) Nilai $f(7)$

11. Jika $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, maka untuk $x \neq 1$ tentukanlah $f(-x)$.

12. Jika $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$ $x \neq -\dfrac{1}{2}$, tuliskanlah x sebagai fungsi y. Kemudian tentukanlah syarat kedua fungsi tersebut agar terdefinisi untuk setiap x, y bilangan real.

13. Diketahui $f(2x - 3) = 4x - 7$, maka nilai dari $f(17) - f(7)$ adalah ....

14. Bila $f(x) = \frac{x}{a}\left[1 - \frac{b^2}{x^2}\right] + \frac{x}{b}\left[1 - \frac{a^2}{x^2}\right]$, maka $f(a + b)$ adalah ....

15. Misalkan $f(n)$ didefiniskan kuadrat dari penjumlahan digit n. Misalkan juga $f^2(n)$ didefinisikan $f(f(n))$ dan $f^3(n)$ didefinisikan

 $f(f(f(n)))$ dan seterusnya. Tentukan

 $f^{1998}(11)$.

16. Diketahui fungsi f dengan rumus $f = \sqrt{\frac{1}{2}x - 8}$.

 Tentukanlah domain fungsi f agar memiliki pasangan di anggota himpunan bilangan real.

Berikan tugas projek di samping untuk dikerjakan secara berkelompok. Gunakan rubrik penilaian projek yang tersedia di akhir buku ini.

Projek

Rancanglah sebuah masalah terkait lintasan seekor lebah yang terbang terkadang naik, bergerak lurus dan terkadang turun pada saat waktu tertentu. Jika lintasan lebah tersebut merupakan fungsi, buatlah interval saat kapan lebah tersebut bergerak naik, lurus, dan saat turun. Buatlah hasil kerja kelompokmu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan uraian materi pada Bab 5 ini, beberapa kesimpulan yang dapat dinyatakan sebagai pengetahuan awal untuk mendalami dan melanjutkan bab bahasan berikutnya, disajikan sebagai berikut.

1. Setiap relasi adalah himpunan. Tetapi sebuah himpunan belum tentu merupakan relasi.
2. Setiap fungsi merupakan relasi. Tetapi sebuah relasi belum tentu merupakan fungsi.
3. Dari pernyataan (1) dan (2) disimpulkan bahwa setiap fungsi dan relasi adalah himpunan.
4. Relasi memiliki sifat, antara lain (1) reflektif, (2) simetris, (3) transitif, dan (4) sifat antisimetris. Jika sebuah relasi memenuhi sifat reflektif, simetris dan transitif, maka relasi tersebut dikatakan relasi ekuivalen.
5. Fungsi adalah bagian dari relasi yang memasangkan setiap anggota domain dengan tepat satu anggota kodomain. Fungsi yang demikian disebut juga pemetaan.
6. Untuk lebih mendalami materi fungsi kamu dapat mempelajari berbagai jenis fungsi pada sumber belajar yang lain, seperti fungsi naik dan turun, fungsi ganjil dan fungsi genap, fungsi injektif, surjektif, fungsi satu-satu, dan sebagainya.

Materi selanjutnya adalah barisan dan deret. Barisan adalah sebuah fungsi dengan domain bilangan asli dan daerah hasilnya adalah suatu himpunan bagian dari bilangan real. Jadi pengetahuan kamu tentang relasi dan fungsi sangat menentukan keberhasilan kamu menguasai berbagai konsep dan aturan dalam barisan dan deret.

Catatan:

Bab 6

Barisan dan Deret

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar

Setelah mengikuti pembelajaran barisan dan deret, siswa mampu:

1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percayadiri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalammemilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah.
2. Mentransformasi diri dalam berpilaku jujur, tangguh mengadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika
3. Menunjukkan sikap bertanggung jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan.
4. Memprediksi pola barisan dan deret aritmetika dan geometri atau barisan lainnya melalui pengamatan dan memberikan alasannya.
5. Menyajikan hasil menemukan pola barisan dan deret dan penerapannya dalam penyelesaian masalah sederhana.

Pengalaman Belajar

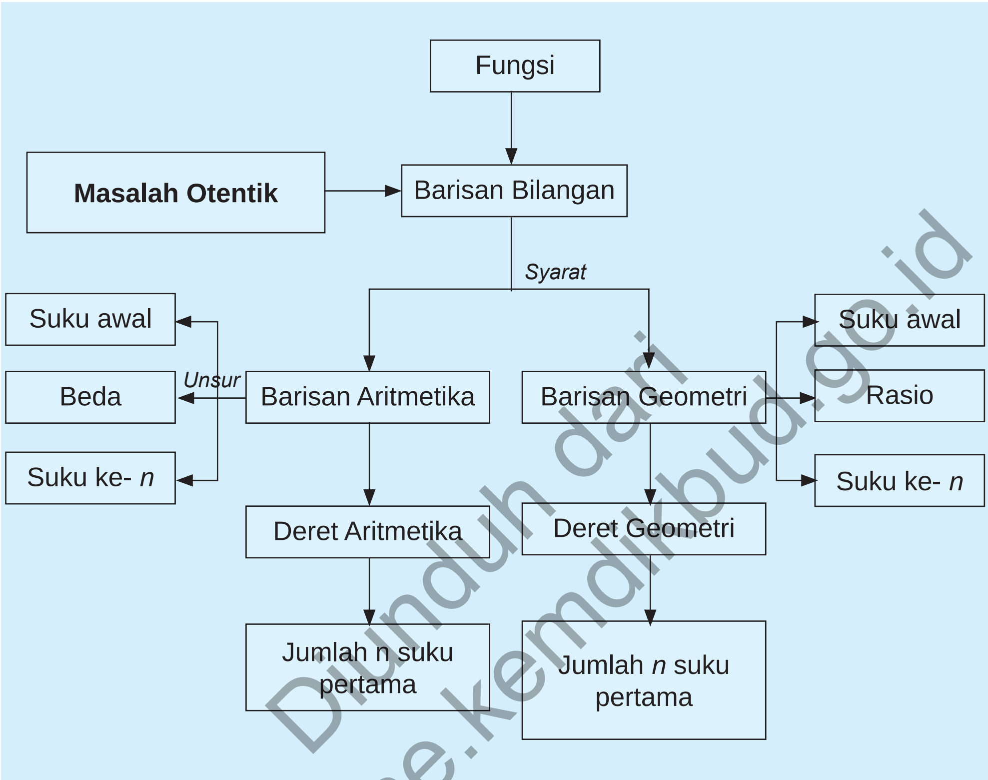
Melalui pembelajaran materi barisan dan deret aritmetika dan geometri atau barisan lainnya,siswa memperoleh pengalaman belajar:

- menemukan konsep dan pola barisan dan deret melalui pemecahan masalah otentik;
- berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur;
- berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis, kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep dan pola barisan dan deret dalam memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Pola Bilangan*
- *Beda*
- *Rasio*
- *Suku*
- *Jumlah n suku pertama*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Pola Barisan dan Deret

Konsep tentang fungsi akan kita gunakan dalam penerapan menemukan pola dari barisan, karena barisan merupakan suatu fungsi dengan domain bilangan bulat positip dan range bilangan real. Materi tentang fungsi sudah dipelajari di Bab 5. Pada Bab 5 Definisi 5.6 dituliskan definisi fungsi yaitu Misalkan A dan B himpunan, Fungsi f dari A ke B adalah suatu aturan pengaitan yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B. Jika kita perhatikan sebuah barisan maka suku ke-n dengan n merupakan bilangan bulat positip di sebut sebagai domain akan berpasangan terhadap rumus suku ke-n dari barisan itu dan disebut range, yang merupakan bilangan real.

Materi barisan dan deret sangat banyak diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, oleh karena itu agar materi ini dapat dipahami dengan baik dan konsep yang akan dibentuk itu benar maka cobalah untuk mengamati dan mengkritisi masalah nyata kehidupan yang dapat dipecahkan secara arif dan kreatif melalui proses matematisasi. Dalam proses pembelajaran barisan dan deret, berbagai konsep, prinsip dan aturan matematika terkait barisan dan deret akan ditemukan melalui pemecahan masalah, melihat pola susunan bilangan, menemukan berbagai strategi sebagai alternatif pemecahan masalah.

Kita akan mempelajari beberapa permasalahan yang terkait dengan barisan dan deret, setelah konsep, prinsip, dan aturan dikonstruk melalui penyelesaian masalah maka akan dibahas contoh yang berkaitan dengan konsep, prinsip, dan aturan pada materi barisan dan deret. Barisan suatu obyek dalam permasalahan yang diberikan membicarakan masalah urutannya dengan aturan tertentu. Aturan yang dimaksud adalah pola barisan. Kita memerlukan pengamatan terhadap suatu barisan untuk menemukan pola tersebut.

Organisasikan siswa belajar dengan mengamati dan mengkritisi masalah nyata yang dapat dipecahkan arif dan kreatif melalui proses matematisasi. Guru melatih siswa berpikir independen, mengajukan ide-ide secara bebas dan terbuka. Membangun hubungan-hubungan dengan melibatkan objek-objek nyata serta mengkomunikasikan permasalahan melalui diagram, skema, tabel dan simbol-simbol.

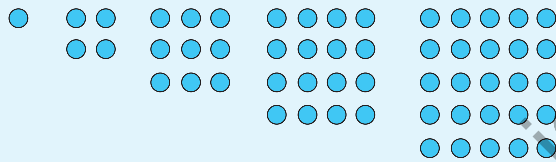
Permasalahan-permasalahan yang dijumpai dalam kehidupan biasanya dapat diselesaikan dengan menerapkan suatu cara, metode, atau aturan matematika tertentu. Hal itu dilakukan dengan alasan agar permasalahan tersebut dapat menjawab kebutuhan yang diinginkan.

Tanyakan kepada siswa :

Tahukah kamu maksud/ arti dari pola? Pernahkah anda melihat pola dalam kehidupan sehari-hari? Ajukan masalah berikut kepada siswa.

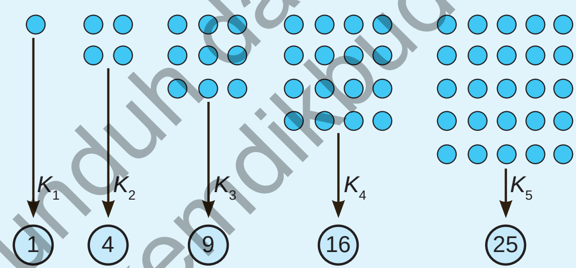
Masalah-6.1

Beberapa kelereng dikelompokkan dan disusun sehingga setiap kelompok tersusun dalam bentuk persegi sebagai berikut:



Gambar 6.1 Susunan Kelereng

Kelereng dihitung pada setiap kelompok dan diperoleh barisan: 1, 4, 9, 16, 25.

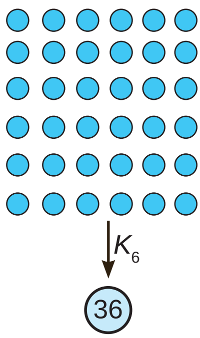


Gambar 6.2 Jumlah Kelereng pada Setiap Kelompok

Permasalahan:

Dapatkah kamu temukan bilangan berikutnya pada barisan tersebut? Dapatkah kamu temukan pola barisan tersebut? Berapa banyak kelereng pada kelompok ke-15?

Alternatif Penyelesaian

1. 

Gambar 6.3 Jumlah kelereng pada kelompok ke-6

Kemungkinan metode yang dapat digunakan adalah membuat susunan kelereng berikutnya dan menghitung kembali banyak kelereng pada susunan tersebut. Alternatif penyelesaian ini tidak efisien karena harus menyusun kembali banyak kelereng untuk kelompok berikutnya.

Berikan alternatif jawaban berikut kepada siswa, kemudian minta siswa untuk menanggapi penyelesaian masalah yang anda tawarkan.

2. Alternatif penyelesaian lainnya adalah menemukan pola barisan tersebut.

   Perhatikan tabel berikut!

Tabel 6.1 Pola banyak kelereng pada setiap kelompok

Kelompok	Banyak Kelereng	Pola
K_1	1	$1 = 1 \times 1$
K_2	4	$4 = 2 \times 2$
K_3	9	$9 = 3 \times 3$
K_4	16	$16 = 4 \times 4$
K_5	25	$25 = 5 \times 5$
⋮	⋮	⋮
K_n	?	$? = n \times n$

Dengan pola barisan pada tabel di atas, bilangan berikutnya adalah $K_6 = 6 \times 6 = 36$ dan bilangan pada $K_{15} = 15 \times 15 = 225$.

Berikut ini merupakan alternatif penyelesaian masalah yang mungkin untuk masalah menyusunn kelereng tersebut dalam bentuk persegi. Harapan dalam menjawab masalah ini adalah siswa memahami bentuk pola dari sebuah barisan. Jika siswa mengalami kesulitan, minta siswa untuk mengamati banyak kelereng tiap kelompok dan berikan beberap pertanyaan yang dapat membuat siswa untuk mencoba-coba beberapa pola dan akhirnya menyimpulkan pola yang mungkin untuk itu adalah $K_n = n \times n$

Ini juga merupakan beberapa alternatif penyelesaian masalah untuk menyusun kelereng tersebut dalam bentuk persegi. Harapan dari penyelesaian masalah ini adalah siswa memahami mengenai pola dari suatu barisan. Jika siswa mengalami kesulitan minta siswa untuk mengamati banyak kelereng dan guru memberikan arahan dan pertanyaan agar siswa dapat menemukan pola $K_n = n + n \times (n-1)$

Pada akhir penyelesaian masalah ini tekankan pada siswa bahwa untuk menentukan bilangan-bilangan berikutnya dapat dilakukan dengan cepat apabila siswa menemukan pola barisannya.

Berikan contoh berikut kepada siswa untuk membantu siswa memahami mengenai pola suatu barisan.

3. Apakah mungkin ada pola lain untuk menyelesaikan masalah diatas? Coba kamu lengkapi tabel berikut ini!

Tabel 6.2 Pola banyak kelereng pada setiap kelompok

Kelompok	Banyak Kelereng	Pola
K_1	1	$1 = 1 + 0 = 1 + 1 \times 0$
K_2	4	$4 = 2 + 2 = 2 + 2 \times 1$
K_3	9	$9 = 3 + 6 = 3 + 3 \times 2$
K_4	16	$16 = 4 + 12 = 4 + 4 \times 3$
K_5	25	$25 = 5 + 20 = 5 + 5 \times 4$
. . .	. . .	. . .
K_n	?	$? = n + n \times (n-1)$

Jadi pola barisan adalah $K_n = n + n \times (n - 1)$ sehingga bilangan berikutnya adalah $K_6 = 6 + 6 \times 5 = 36$ dan bilangan pada $K_{15} = 15 + 15 \times 14 = 225$.

Siswa dapat dengan mudah menentukan bilangan-bilangan berikutnya pada sebuah barisan bilangan jika dapat menemukan pola barisannya. Minta siswa mempelajari pola barisan pada beberapa contoh berikut.

Contoh 6.1

Perhatikan barisan huruf berikut:

A B B C C C D D D D A B B C C C D D D D A B B C C C D D D D ...

Berdasarkan pola barisan tersebut, tentukanlah huruf pada urutan ke 864.

Alternatif Penyelesaian

Pertama, kita perlihatkan urutan setiap huruf pada barisan, sebagai berikut:

A	*B*	*B*	*C*	*C*	*C*	*D*	*D*	*D*	*D*	*A*	*B*	*B*	*C*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

C	*C*	*D*	*D*	*D*	*D*	...
15	16	17	18	19	20	...

Jika kamu amati dengan teliti, kelompok huruf *ABBCCCDDDD* pada urutan 1 sampai 10 berulang. Perulangan kelompok huruf terjadi pada setiap kelipatan 10 huruf pertama. Jadi, huruf pada urutan 1 sama dengan huruf pada urutan 11, urutan 21, urutan 31, dan seterusnya.

Kedua, huruf pada urutan ke 864 atau $864 = 860 + 4 = 86 \times 10 + 4$ sehingga perulangan kelompok huruf tersebut mengalami perulangan sebanyak 86 kali. Dengan demikian, huruf pada urutan ke-864 sama dengan huruf pada urutan ke-4 atau *C*. Perhatikan tabel di bawah ini!

Tabel 6.3 Urutan barisan huruf

Urutan ke	Huruf	Urutan ke	Huruf	...	Urutan ke	Huruf	Urutan ke	Huruf
1	*A*	11	*A*	...	851	*A*	861	*A*
2	*B*	12	*B*	...	852	*B*	862	*B*
3	*B*	13	*B*	...	853	*B*	863	*B*
4	*C*	14	*C*	...	854	*C*	864	*C*
5	*C*	15	*C*	...	855	*C*		
6	*C*	16	*C*	...	856	*C*		
7	*D*	17	*D*	...	857	*D*		
8	*D*	18	*D*	...	858	*D*		
9	*D*	19	*D*	...	859	*D*		
10	*D*	20	*D*	...	860	*D*		

Contoh 6.2

Sebuah barisan bilangan dituliskan sebagai berikut: 12 3456789101112131415161718192021222324252 6… sehingga suku ke-10 = 1, suku ke-11 = 0, suku ke-12 = 1 dan seterusnya. Dapatkah kamu temukan angka yang menempati suku ke-2004?

Alternatif Penyelesaian

Mari kita amati kembali barisan tersebut, sebagai berikut:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 3 & 1 & \ldots & ? \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u_{15} & u_{16} & u_{17} & u_{18} & \ldots & u_{2004} \end{array}$$

u_n menyatakan suku ke-n pada barisan dengan n = 1, 2, 3, 4, ...

Kita akan mencari angka yang menempati suku ke-2004 dengan menghitung banyak suku pada bilangan satuan, puluhan, dan ratusan sebagai berikut:

Langkah 1.

Mencari banyak suku pada barisan bilangan satuan (1 sampai 9):

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Banyak suku pada barisan bilangan satuan adalah $1 \times 9 = 9$ suku.

Langkah 2.

Mencari banyak suku pada barisan bilangan puluhan (10 sampai 99)

10, 11, 12, 13, ..., 19 terdapat 2×10 suku = 20 suku

20, 21, 22, 23, ..., 29 terdapat 2×10 suku = 20 suku

.

.

.

90, 91, 92, 93, ..., 99 terdapat 2×10 suku = 20 suku

Banyak suku pada barisan bilangan puluhan adalah $9 \times 20 = 180$ suku. Jadi, banyak suku pada barisan 1 sampai 99 adalah $9 + 180 = 189$ suku.

Langkah 3.

Mencari banyak suku pada barisan bilangan ratusan (100 sampai 999)

Jika ratusannya (1 sampai 6)

100, 101, 102, ..., 109 terdapat 3×10 suku = 30 suku

110, 111, 112, ..., 119 terdapat 3×10 suku = 30 suku

120, 121, 122, ..., 129 terdapat 3 × 10 suku = 30 suku

.

.

.

690, 691, 692, ..., 699 terdapat 3 × 10 suku = 30 suku

Banyak suku untuk barisan bilangan ratusan dengan ratusan 1 sampai 6 adalah 6 × 10 × 30 = 1800 suku

Jadi terdapat sebanyak 9 + 180 + 1800 = 1989 suku pada barisan bilangan 1 sampai dengan 699 sehingga suku ke-1989 adalah 9. Suku berikutnya (suku ke-1990) adalah barisan bilangan dengan ratusan sebagai berikut.

9	7	0	0	7	0	1	7	0	2	7
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
u_{1989}	u_{1990}	u_{1991}	u_{1992}	u_{1993}	u_{1994}	u_{1995}	u_{1996}	u_{1997}	u_{1998}	u_{1999}

0	3	7	0	4
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
u_{2000}	u_{2001}	u_{2002}	u_{2003}	u_{2004}

Angka pada suku ke-2004 adalah 4.

Contoh 6.3

Diketahui pola barisan bilangan $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \ldots, \frac{1}{9900}$. Tentukanlah banyak suku pada barisan tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Jika u_n adalah suku ke-n sebuah barisan dengan n = 1, 2, 3,... maka barisan di atas disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 6.4 Pola Barisan

Suku ke	Nilai	Pola
u_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}=\frac{1}{1^2+1}$
u_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}=\frac{1}{2^2+2}$
u_3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}=\frac{1}{3^2+3}$
u_4	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}=\frac{1}{4^2+4}$
u_5	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}=\frac{1}{5^2+5}$
u_6	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{42}=\frac{1}{6^2+6}$
...	...	...
u_n	?	$?=\frac{1}{n^2+n}$

Berdasarkan pola barisan $u_n = \frac{1}{n^2+n}$ yang telah diperoleh pada tabel di bawah maka $u_n = \frac{1}{9900}$ atau

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{9900}$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2 + n = 9900$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2 + n - 9900 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (n - 99)(n + 100) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad n_1 = 99 \text{ atau } n_2 = -100$$

Barisan $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \ldots, \frac{1}{9900}$ terdiri atas 99 suku.

- Diskusikan dengan temanmu mengapa yang digunakan $n = 99$?

Jika s_n adalah jumlah n suku pertama dari sebuah barisan dengan n = 1, 2, 3, ... maka deret dari barisan di atas disajikan dalam tabel berikut.

Ajak siswa untuk memahami arti dari sebuah deret barisan dengan memperhatikan tabel berikut.

Tabel 6.5: Pola Deret

Deret	Jumlah suku-suku	Nilai
s_1	u_1	$\frac{1}{2}$
s_2	$u_1 + u_2$	$\frac{2}{3}$
s_3	$u_1 + u_2 + u_3$	$\frac{3}{4}$
s_4	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4$	$\frac{4}{5}$
s_5	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$	$\frac{5}{6}$
s_6	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$	$\frac{6}{7}$
...	...	...
s_n	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + ... + u_n$	$s_n = \frac{n}{n+1}$

Berdasarkan tabel di atas, s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ..., yaitu $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ..., \frac{99}{100}, ...$ adalah sebuah barisan dengan pola $s_n = \frac{n}{n+1}$.

Karena $n = 99$ maka

$$s_{99} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + ... + \frac{1}{9900} = \frac{99}{100}.$$

Jika s_n adalah jumlah n suku pertama dari sebuah barisan dengan $n = 1, 2, 3, \ldots$ atau $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n$ dan $s_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}$ maka $s_n = s_{n-1} + u_n$ atau $u_n = s_n - s_{n-1}$.

Contoh 6.4

Suatu barisan dengan pola deret $s_n = 2n^3 - 3n^2$. Tentukan pola barisan tersebut kemudian tentukanlah suku ke-10!

Alternatif Penyelesaian

Dengan rumus $u_n = s_n - s_{n-1}$ maka dapat ditentukan $s_n = 2n^3 - 3n^2$ maka

$$s_{n-1} = 2(n-1)^3 - 3(n-1)^2$$

$$s_{n-1} = (2n^3 - 6n^2 + 6n - 2) - (3n^2 - 6n + 3)$$

$$s_{n-1} = 2n^3 - 9n^2 + 12n - 5$$

Jadi,

$$u_n = s_n - s_{n-1} = (2n^3 - 3n^2) - (2n^3 - 9n^2 + 12n - 5)$$

$$u_n = 6n^2 - 12n + 5$$

Pola barisan tersebut adalah $u_n = 6n^2 - 12n + 5$ sehingga:

$$u_{10} = 6(10)^2 - 12(10) + 5 = 600 - 120 + 5 = 485$$

Jadi, suku ke-10 pada barisan tersebut adalah 485.

Setelah siswa memahami arti dari pola barisan dan deret selanjutnya arahkan siswa untuk dapat menemukan konsep barisan dan deret aritmetika melalui permasalahan-permasalahan yang diberikan.

2. Menemukan Konsep Barisan dan Deret Aritmetika

Pada sub-bab di atas, kita telah membicarakan masalah pola dari barisan dan deret bilangan secara umum. Berikutnya, kita akan belajar menemukan konsep barisan dan deret aritmetika.

a. Barisan Aritmetika

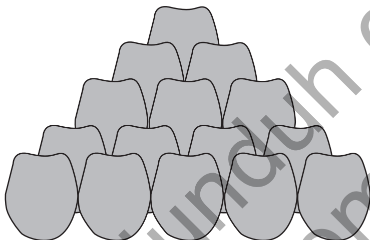
Masalah-6.2

Gambar 6.4 Tumpukan Buah Jeruk

Perhatikan gambar tumpukan jeruk di samping ini! Bagaimana cara menentukan atau menduga banyak jeruk dalam satu tumpukan?

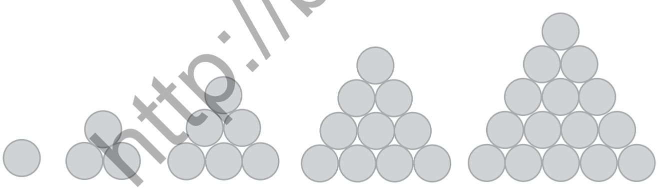
Alternatif Penyelesaian

Jika diperhatikan Gambar 6.5, maka diperoleh susunan dari beberapa jeruk. Jeruk itu dapat disusun membentuk sebuah piramida.



Gambar 6.5 Susunan piramida jeruk

Jumlah jeruk pada bagian bawah tumpukan akan lebih banyak dibandingkan pada susunan paling atas. Misalkan susunan jeruk tersebut disederhanakan menjadi sebuah susunan segitiga, seperti Gambar 6.6.

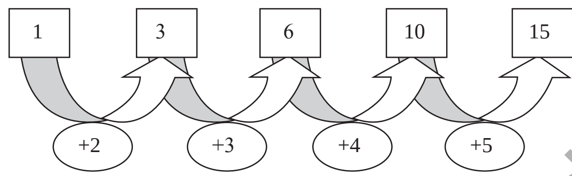


Gambar 6.6 Susunan bulatan bentuk segitiga

- Mengapa harus dengan susunan segitiga, coba lakukan dengan susunan segi empat. Apa yang kamu temukan?

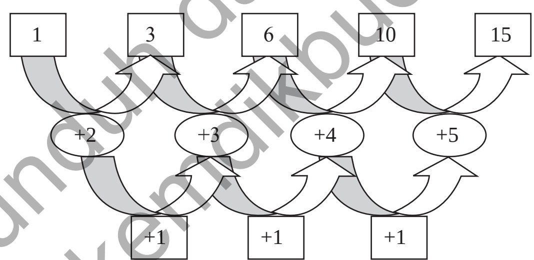
Tanyakan kepada siswa mengapa harus dengan susunan segitiga, coba suruh siswa untuk melakukan dengan susunan segi empat, lalu tanyakan apa yang ditemukan.

Banyaknya bulatan yang tersusun dari setiap kelompok dapat dituliskan dengan bilangan, yaitu 1, 3, 6, 10, 15. Bilangan tersebut membentuk barisan perhatikan polanya pada Gambar 6.7 berikut.



Gambar 6.7. Pola susunan banyak jeruk dalam tumpukan

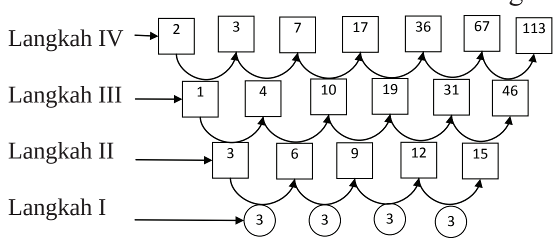
Ternyata beda antara setiap dua bilangan yang berdekatan membentuk barisan yang baru yaitu 2, 3, 4, 5,... Perhatikan skemanya pada Gambar 6.8 berikut.



Gambar 6.8. Pola turunan banyak jeruk dalam tumpukan

Beda setiap dua bilangan yang berdekatan pada barisan 2, 3, 4, 5,... adalah tetap yaitu 1. Dengan demikian barisan 2, 3, 4, 5,... disebut "Barisan Aritmetika" dan barisan 1, 3, 6, 10, 15, ... disebut "Barisan Aritmetika Tingkat Dua".

- Coba kamu bentuk sebuah barisan aritmetika tingkat tiga?



Meminta siswa mengecek, untuk susunan segitiga berikutnya, banyak sankisnya 21, sehingga selisih banyak jeruk berikutnya adalah 6. Selanjutnya meminta siswa mencermati dua suku yang berurutan.

Meminta siswa untuk membuat sebuah barisan dengan beda membentuk barisan baru yaitu barisan aritmatika tingkat 1.

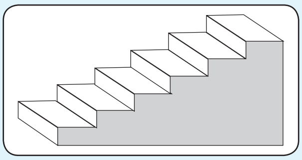
Selanjutnya minta siswa mempresentasikan hasil kerjanya di depan kelas dan mendorong siswa lain untuk mengkritisi hasil kerja siswa yang menyaji.

Berikut ini merupakan salah satu contoh barisan aritmetika tingkat tiga. Barisan aritmetika tingkat tiga dapat dibentuk dengan terlebih dahulu menentukan beda yang sama lalu berdasarkan beda tersebut pilih bilangan yang diinginkan yang memenuhi. Perhatikan contoh berikut.

sehingga diperoleh barisan aritmetika tingkat tiga adalah

2, 3, 7, 17, 36, 67, 113, …

Masalah-6.3



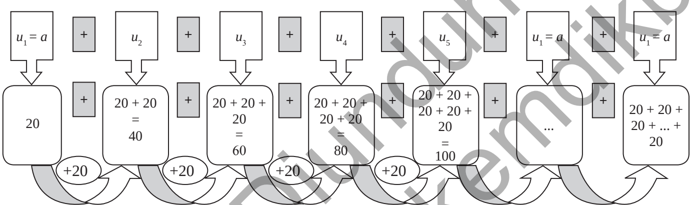
Gambar 6.9. Tangga

Perhatikan masalah berikut! Jika tinggi satu anak tangga adalah 20 cm, berapakah tinggi tangga jika terdapat 15 buah anak tangga? Tentukanlah pola barisannya!

minta siswa untuk memahami masalah 6.3 kemudian tanyakan bagaimana pola bilangan yang diperoleh oleh siswa.

Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan tinggi tangga maka permasalahan di atas diurutkan menjadi:



Penyelesaian masalah ini adalah menentukan pola bilangan sehingga siswa dapat menentukan suku ke-15

Dari uraian di atas, ditemukan susunan bilangan 20, 40, 60, 80, …

u_n : suku ke-n

$u_1 = 20 = 1 \times 20$

$u_2 = 40 = 2 \times 20$

$u_3 = 60 = 3 \times 20$

$u_4 = 80 = 4 \times 20$

$u_5 = 100 = 5 \times 20$

...

$u_n = n \times 20 = 20n$

Cermati pola bilangan $u_n = 20n$, sehingga $u_{15} = 15 \times 20 = 300$.

Berarti tinggi tangga tersebut sampai anak tangga yang ke-15 adalah 300 cm.

Minta siswa untuk memahami masalah 6.4 kemudian ajak siswa untuk menyelesaikannya. Penyelesaian dari permasalahan ini adalah untuk menemukan konsep tentang suku ke-n dari sebuah barisan aritmetika $u_n=a+(n-1).b$

Masalah-6.4

Lani, seorang pengerajin batik di Gunung Kidul. Ia dapat menyelesaikan 6 helai kain batik berukuran 2,4 m × 1,5 m selama 1 bulan. Permintaan kain batik terus bertambah sehingga Lani harus menyediakan 9 helai kain batik pada bulan kedua, dan 12 helai pada bulan ketiga. Dia menduga, jumlah kain batik untuk bulan berikutnya akan 3 lebih banyak dari bulan sebelumnya. Dengan pola kerja tersebut, pada bulan berapakah Lani menyelesaikan 63 helai kain batik?

Alternatif Penyelesaian

Dari Masalah-6.4, dapat dituliskan jumlah kain batik sejak bulan pertama seperti di bawah ini.

Bulan I : $u_1 = a = 6$
Bulan II : $u_2 = 6 + 1.3 = 9$
Bulan III : $u_3 = 6 + 2.3 = 12$
Bulan IV : $u_4 = 6 + 3.3 = 15$

Demikian seterusnya bertambah 3 helai kain batik untuk bulan-bulan berikutnya sehingga bulan ke-n : $u_n = 6 + (n–1).3$ (n merupakan bilangan asli).

Sesuai dengan pola di atas, 63 helai kain batik selesai dikerjakan pada bulan ke-n. Untuk menentukan n, dapat dip eroleh dari,

$63 = 6 + (n – 1).3$
$63 = 3 + 3n$
$n = 20$.

Jadi, pada bulan ke-20, Lani mampu menyelesaikan 63 helai kain batik.

Jika beda antara dua bilangan berdekatan di notasikan "b", maka pola susunan bilangan 6, 9, 12, 15,…, dapat dituliskan $u_n = a + (n – 1).b$.

Definisi 6.1

Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang beda setiap dua suku yang berurutan adalah sama.

Beda, dinotasikan "b" memenuhi pola berikut.

$$b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \ldots = u_n - u_{(n-1)}$$

n adalah bilangan asli sebagai nomor suku, u_n adalah suku ke-n.

Bersama-sama dengan siswa membuat definisi 6.1 secara induktif berdasarkan beberapa penyelesaian masalah-masalah sebelumnya.

Berdasarkan definisi di atas diperoleh bentuk umum barisan aritmetika sebagai berikut.

$$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots, u_n$$

Setiap dua suku yang berurutan pada barisan aritmetika memiliki beda yang sama, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
u_1 &= a \\
u_2 &= u_1 + 1.b \\
u_3 &= u_2 + b = u_1 + 2.b \\
u_4 &= u_3 + b = u_1 + 3.b \\
u_5 &= u_4 + b = u_1 + 4.b \\
&\ldots \\
u_n &= u_1 + (n-1)b
\end{aligned}$$

Sifat-6.1

Jika $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, \ldots, u_n$ merupakan suku-suku barisan aritmetika, rumus suku ke-n barisan tersebut dinyatakan sebagai berikut.

$$u_n = a + (n-1)b$$

$a = u_1$ adalah suku pertama barisan aritmetika, b adalah beda barisan aritmetika

Masalah-6.5

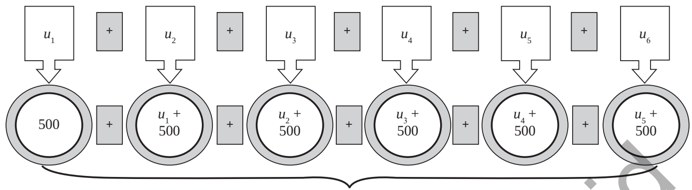
Setiap hari Siti menabungkan sisa uang jajannya. Uang yang ditabung setiap hari selama enam hari mengikuti pola barisan aritmetika dengan suku pertama a = 500 dan beda b = 500.

Bagaimana cara mengetahui banyaknya uang Siti yang ditabung pada hari ke-6?

Minta siswa untuk memahami masalah 6.5 penyelesaian dari permasalahan ini merupakan penggunaan dari prinsip suku ke-n barisan aritmetika.

Alternatif Penyelesaian

Penyelesaian Masalah-6.5 dapat dilakukan dengan membuat barisan aritmetika dari uang yang ditabung Siti kemudian menentukan suku terakhirnya.



Karena $u_n = a + (n - 1)b$ maka u_6

$$\begin{aligned} u_6 &= (a + 5b)\\ &= 500 + 5(500)\\ &= 500 + 2500\\ &= 3000 \end{aligned}$$

Berarti tabungan Siti pada hari ke-6 adalah Rp 3000,00.

Untuk lebih memahami tentang pronsip barisan aritmetika minta siswa memahami contoh-contoh berikut.

Contoh 6.5

1. Tentukan suku ke-n barisan di bawah ini!
   a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, … tentukan suku ke-15 !
   b) 4, 1, – 2, – 5, – 8, … tentukan suku ke-18!

Alternatif Penyelesaian

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, …
Dari barisan bilangan tersebut, diketahui bahwa
$u_1 = a = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, ….
$b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = 1$.
Karena $u_n = a + (u - 1)b$, maka
$u_{15} = a + (15 - 1)b$.
$u_{15} = 1 + (15 - 1).1 = 15$

b) 4, 1, – 2, – 5, – 8, …
Diketahui:
$u_1 = a = 4$, $u_2 = 1$, $u_3 = -2$, $u_4 = -5$ ….
$b = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = -3$.
Karena $u_n = a + (n - 1)b$, maka $u_{18} = a + (18 - 1)b$.
$u_{18} = 4 + (18 - 1).(-3) = -47$

2. Suku ke-4 barisan aritmetika adalah 19 dan suku ke-7 adalah 31. Tentukan suku ke-50.

Alternatif Penyelesaian

$$\begin{array}{lcrcl} u_n & = & a + (n - 1)b & & \\ u_4 & = & 19 & = & a + 3b \\ u_7 & = & 31 & = & a + 6b \;\; - \\ \hline & & -3b & = & -12 \\ & & b & = & 4 \end{array}$$

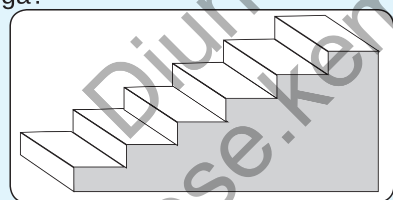
$$\begin{array}{rcl} a + 3b & = & 19 \\ a + 3(4) & = & 19 \\ a & = & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} u_{50} & = & a + 49b \\ & = & 7 + 49\,(4) \\ & = & 203 \end{array}$$

b. Deret Aritmetika

Berikut ini merupakan sebuah masalah yang jika diselesaikan bertujuan untuk menemukan konsep deret aritmetika.

Masalah-6.6

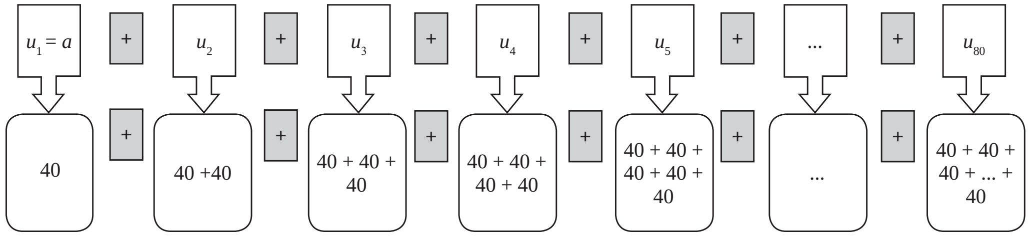
Perhatikan kembali gambar di samping! Jika membuat sebuah anak tangga dibutuhkan 40 batu bata, berapa banyak batu bata yang dibutuhkan untuk membuat 80 anak tangga?



Gambar 6.11: Tangga

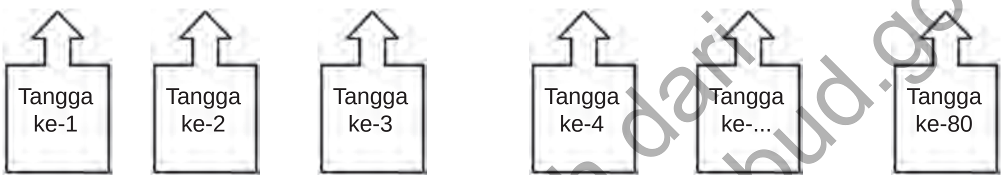
Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan banyaknya batu bata yang dibutuhkan dalam membuat anak tangga pertama sampai anak tangga yang ke 80 dapat diilustrasikan seperti gambar berikut.



Berdasarkan gambar di atas dapat disimpulkan bahwa banyak batu bata yang dibutuhkan untuk membuat 80 anak tangga:

40 + (40 + 40) + (40 + 40 + 40) + (40 + 40 + 40 + 40) + ... + (40 + 40 + 40 + 40 + 40 + ...)



Susunan banyak batu bata membentuk barisan aritmetika: 40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, 320, 360, 400,….

Cukup jelas, bahwa, $u_1 = 40$ dan $b = 40$, maka $u_{80} = 3200$. Karena pertanyaan dalam masalah ini adalah banyak batu bata yang diperlukan untuk membuat 80 anak tangga, bukan banyak batu bata yang diperlukan membuat anak tangga ke-80 maka banyak batu bata harus dijumlahkan.

$$\underbrace{40+80+120+160+200+240+280+320+400+...+3160+3200}_{\text{sebanyak 80 suku}}$$

Misalkan s_n adalah jumlah n suku pertama pada barisan. Perhatikan pola berikut:

- $s_2 = 40 + 80 = \dfrac{(40+80)\times 2}{2} = 120$
- $s_4 = 40 + 80 + 120 + 160 = \dfrac{(40+160)\times 4}{2} = 400$
- $s_6 = 40+80+120+160+200+240 = \dfrac{(40+240)\times 6}{2}$

  $= 840$

- $s_8 = 40 + 80 + 120 + 160 + 200 + 240 + 280 + 320$
  $= \dfrac{(40+320)\times 8}{2} = 1440.$

Jadi, untuk menghitung jumlah 80 suku pertama, dilakukan dengan pola di atas,

$s_{80} = 40 + 80 + 120 + 160 + 200 + 240 + 280 + 320 + 360 + 400 + \ldots + 3160 + 3200 = \dfrac{(40+3200)\times 80}{2} = 129.000.$

Jadi, banyak batu bata yang diperlukan untuk membuat 80 anak tangga adalah 129.000 batu bata.

- Untuk penjumlahan bilangan di atas, bagaimana cara yang kamu gunakan jika banyak bilangan yang akan dijumlahkan adalah ganjil?

Guru mengarahkan siswa menyelidiki rumusan pola untuk menghitung jumlah 3 suku pertama, 5 suku pertama, 15 suku pertama.

Susunan jumlah suku-suku barisan aritmetika, dinyatakan sebagai berikut.

$s_1 = u_1$
$s_2 = u_1 + u_2$
$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$
$s_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$
...
$s_{(n-1)} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_{(n-1)}$
$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_{(n-1)} + u_n$

Guru memastikan siswa mampu memanipulasi cara pembentukan pola di atas.

n merupakan bilangan asli.

Definisi 6.2

Deret aritmetika adalah barisan jumlah n suku pertama barisan aritmetika,
$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{(n-1)}, s_n$ dengan $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{(n-1)} + u_n$

Untuk menentukan jumlah n suku pertama, ditentukan rumus berikut:

$s_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + (n-1)b)$..............(1)

Persamaan 1) diubah menjadi

$s_n = (a + (n-1)b) + \ldots + (a + 2b) + (a + b) + a$.............(2)

Dengan menjumlahkan persamaan (1) dan (2), diperoleh:

$s_n = a + (a + b) + (a + 2b) + \ldots + (a + (n - 1)b)$

$s_n = (a + (n - 1)b) + \ldots + (a + 2b) + (a + b) + a$

$\rule{10cm}{0.4pt}\; +$

$2s_n \;=\; 2a + (n - 1)b + 2a + (n - 1)b + 2a + (n - 1)b + \ldots + 2a + (n - 1)b$

$2s_n \;=\; n\,(2a + (n - 1)b)$

$s_n \;=\; \frac{1}{2}n\left(2a+\left(n-1\right)b\right)$

Sifat-6.2

$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots + u_{n-1} + u_n$ merupakan jumlah n suku pertama barisan aritmetika,

$s_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b) = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

Contoh 6.6

Carilah jumlah bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 9!

Alternatif Penyelesaian

Bilangan bulat yang habis dibagi 9 diantara 1 dan 100 adalah

9, 18, 27, …, 99

Bilangan-bilangan tersebut membentuk barisan aritmetika dengan $a = 9$, $b = 9$, dan $u_n = 99$. Selanjutnya akan ditentukan nilai n sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_n = 99 \;&\Leftrightarrow\; a + (n - 1)b &= 99\\ &\Leftrightarrow\; 9 + (n - 1)9 &= 99\\ &\Leftrightarrow\; 9 + 9n - 9 &= 99\\ &\Leftrightarrow\; 9n &= 99\\ &\Leftrightarrow\; n &= 10 \end{aligned}$$

Jadi, banyak bilangan yang habis dibagi 9 diantara 1 dan 100 adalah 10. Dengan menggunakan rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika diperoleh:

$$s_n = \frac{1}{2}n\left(a + u_n\right) \text{ atau } s_{10} = \frac{1}{2}(10)(9 + 99) = 540$$

Dengan demikian, 9 + 18 + 27 + 36 + 45 + … + 99 = 540.

Contoh 6.7

Diketahui $a + (a + 1) + (a + 2) + ... + 50 = 1139$. Jika a bilangan bulat positif, maka nilai a = ...

Alternatif Penyelesaian

Suku ke-n barisan bilangan di atas adalah 50, sehingga

$$u_n = a + (n - 1)b \iff 50 = a + (n - 1)1$$
$$\iff a = 51 - n.$$

Jumlah n suku pertama adalah 1.139 sehingga

$$s_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)b) \iff 1139 = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)1), \text{ atau}$$
$$\iff 2278 = n\left((2a + (n - 1)\right).$$

Dengan mensubtitusikan $a = 51 - n$, diperoleh $n^2 - 101n + 2278 = 0$.

- Ingat kembali cara menentukan akar-akar persamaan kuadrat yang telah kamu pelajari di SMP.

$n^2 - 101n + 2278 = 0 \iff (n - 67).(n - 34) = 0$.
diperoleh, $n = 67$ atau $n = 34$.

Jika nilai a bilangan bulat positif maka nilai yang memenuhi adalah $n = 34$ dengan nilai $a = 17$.

Contoh 6.8

Diketahui deret aritmetika tingkat satu dengan s_n adalah jumlah n suku pertama. Jika $s_n = (m^3 - 1)\, n^2 - (m^2 + 2)\, n + m - 3$, maka tentukanlah suku ke-10 pada barisan tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Dengan mengingat kembali rumus deret aritmetika tingkat satu:

$$s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) = \frac{b}{2}n^2 + (a-b)n$$

maka

$s_n = (m^3 - 1)\, n^2 - (m^2 + 2)\, n + m - 3$ akan menjadi deret aritmetika tingkat satu jika $m - 3 = 0$ atau $m = 3$ sehingga $s_n = (3^3 - 1)\, n^2 - (3^2 + 2)\, n + (3 - 3) = 26n^2 - 11n$. Jadi, $u_{10} = s_{10} - s_9 = \left(26(10^2) - 11(10)\right) - \left(26(9^2) - 11(9)\right) = 2490 - 2007 = 483$.

Jika siswa lupa akan konsep menentukan akar-akar persamaan kuadrat, guru mengingatkan kembali kepada siswa. Buat contoh.

Uji Kompetensi 6.1

Berikan soal-soal uji kompetensi ini sebagai tugas di rumah, yang bertujuan untuk mengetahui seberapa besarkah penguasaan siswa terhadap materi berisan dan deret aritmetika.

1. Tentukan banyak suku dan jumlah barisan aritmetika berikut!
   a. $4 + 9 + 14 + 19 + ... + 104$
   b. $72 + 66 + 60 + 54 + ... + 12$
   c. $-12 - 8 - 4 - 0 + ... + 128$
   d. $-3 - 7 - 11 - 15 ... - 107$
2. Tentukan banyak suku dari barisan berikut!
   a. $6 + 9 + 12 + 15 + ... = 756$
   b. $56 + 51 + 46 + 41 + ... = -36$
   c. $10 + 14 + 18 + 22 + ... = 640$
3. Tentukan jumlah deret aritmetika berikut!
   a. $3 + 9 + 18 + 30 + ...$ sampai dengan 18 suku.
   b. $2 + 10 + 24 + 54 + ...$ sampai dengan 10 suku.
   c. $1 + 7 + 18 + 34 + ...$ sampai dengan 14 suku.
   d. $50 + 96 + 138 + 176 + ...$ sampai dengan 10 suku.
   e. $-22 - 38 - 48 - 52 - ...$ sampai dengan 20 suku.
4. Diketahui barisan aritmetika dengan suku ke-7 dan suku ke-10 berturut-turut adalah 25 dan 37. Tentukanlah jumlah 20 suku pertama!

5. Bila a, b, c merupakan suku ber-urutan yang membentuk barisan aritmetika, buktikan bahwa ketiga suku berurutan berikut ini juga membentuk barisan aritmetika $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$.

6. Tentukan banyak bilangan asli yang kurang dari 999 yang tidak habis dibagi 3 atau 5.

7. Diketahui barisan yang dibentuk oleh semua bilangan asli 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 …
Angka berapakah yang terletak pada bilangan ke 2004 ? (bilangan ke-12 adalah angka 1 dan bilangan ke-15 adalah angka 2).

8. Pola *A B B C C C D D D D A B B C C C D D D D A B B C C C D D D D* ... berulang sampai tak hingga. Huruf apakah yang menempati urutan $2^6 3^4$?

9. Diketahui barisan yang dibentuk oleh semua bilangan asli 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 … Angka berapakah yang terletak pada bilangan ke 2013? (bilangan ke-11 adalah angka 1 dan bilangan ke-12 adalah angka 6).

10. Suatu perusahaan minuman kaleng pada bulan Januari 2012 memproduksi 40.000 minuman kaleng. Setiap bulan perusahaan tersebut menaikkan produksinya secara tetap sebanyak 250 kaleng. Berapa banyak minuman kaleng yang diproduksi perusahaan sampai akhir bulan Juni 2013?

Projek

Himpunlah minimal tiga masalah penerapan barisan dan deret aritmatika dalam bidang fisika, teknologi informasi, dan masalah nyata di sekitarmu. Ujilah berbagai konsep dan aturan barisan dan deret aritmatika di dalam pemecahan masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas!

Sebaiknya tugas ini dikerjakan berkelompok dan diberi waktu tertentu untuk dikerjakan oleh siswa. Hasil kerja projek berupa laporan yang dipresentasikan di depan kelas.

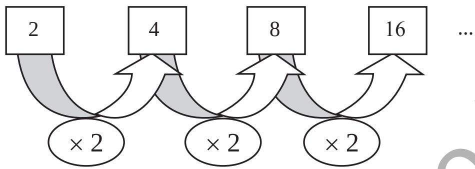
3. Menemukan Konsep Barisan dan Deret Geometri

a. Barisan Geometri

Contoh 6.9

Untuk menemukan konsep Barisan aritmetika minta siswa untuk memperhatikan beberapa contoh berikut.

Perhatikan barisan bilangan 2, 4, 8, 16, …

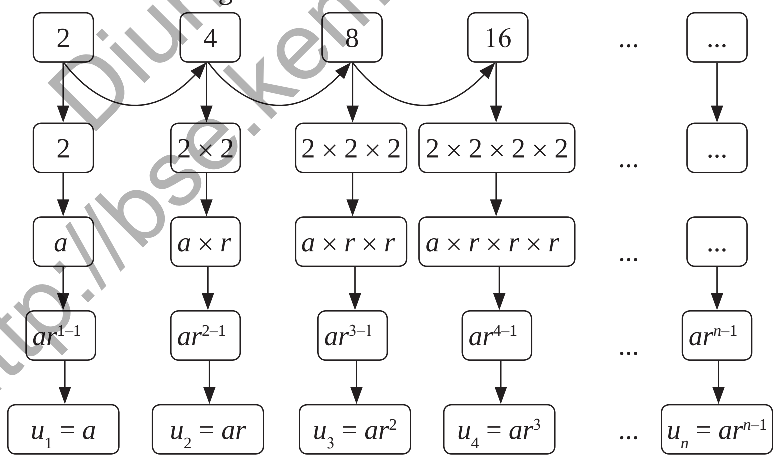


Nilai perbandingan $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{u_3}{u_2} = \ldots = \dfrac{u_n}{u_{n-1}} = 2$

$\dfrac{4}{2} = \dfrac{8}{4} = \dfrac{16}{8} = 2$

Jika nilai perbandingan dua suku berurutan dimisalkan r dan nilai suku pertama adalah a, maka susunan bilangan tersebut dapat dinyatakan dengan 2, 2 × 2, …

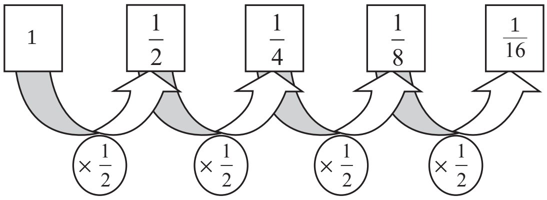
Perhatikan gambar berikut ini.



Dari pola di atas dapat disimpulkan bahwa $u_n = ar^{n-1}$

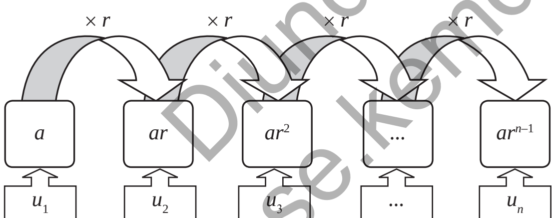
Contoh 6.10

Perhatikan susunan bilangan 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...



Nilai perbandingan $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \ldots = \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{1}{2}$. Jika nilai perbandingan dua suku berurutan dimisalkan r dan nilai suku pertama adalah a, maka susunan bilangan tersebut dapat dinyatakan dengan $1,\ 1\left(\frac{1}{2}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right),\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right),\ \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right), \ldots$

Perhatikan gambar berikut!



Penyelesaian contoh berikut bertujuan untuk menemukan rumus suku ke-n barisan geometri yaitu $u_n = a.r^{\,n-1}$

Sehingga:

- $u_1 = a = 1$
- $u_2 = u_1.\frac{1}{2} = 1.\frac{1}{2}$ $\quad\Leftrightarrow u_2 = u_1.r = a.r$
- $u_3 = u_2.\frac{1}{2} = 1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\quad\Leftrightarrow u_3 = u_2.r = a.r.r = a.r^2$
- $u_4 = u_3.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\quad\Leftrightarrow u_4 = u_3.r = a.r^2.r = a.r^3$
- $u_5 = u_4.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^3.\frac{1}{2} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^3$ $\quad\Leftrightarrow u_5 = u_4.r = a.r^3.r = a.r^4$

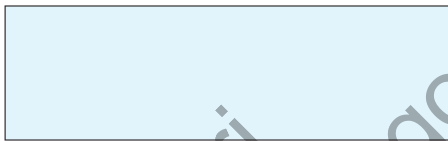
Dari pola di atas, tentunya dengan mudah kamu pahami bahwa,

$$u_n = u_{n-1}.r = a.r^{n-2}\, r = a.r^{n-1}$$

Contoh berikut ini bertujuan untuk menemukan konsep tentang barisan geometri.

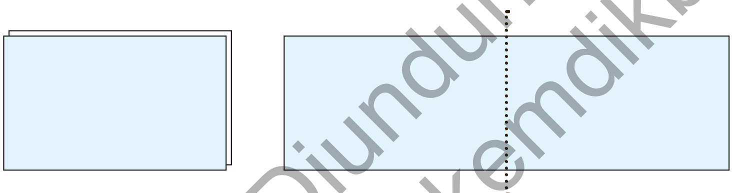
Contoh 6.11

Seorang anak memiliki selembar kertas. Berikut ini disajikan satu bagian kertas.



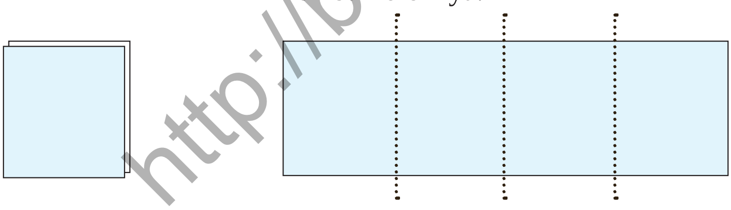
Gambar 6.12 Selembar Kertas

Ia melipat kertas tersebut menjadi dua bagian yang sama besar.



Gambar 6.13 Selembar Kertas pada Lipatan Pertama

Kertas yang sedang terlipat ini, kemudian dilipat dua kembali olehnya.



Gambar 6.14 Selembar Kertas pada Lipatan Kedua

Ia terus melipat dua kertas yang sedang terlipat sebelumnya. Setelah melipat, ia membuka hasil lipatan dan ditemukan kertas tersebut terbagi menjadi 2 bagian. Perhatikan bagian kertas tersebut membentuk sebuah barisan bilangan yang disajikan sebagai berikut.

1	2	4	...
u_1	u_2	u_3	$u_{...}$

Setiap dua suku berurutan dari barisan bilangan tersebut memiliki perbandingan yang sama, yaitu $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = ... = \frac{u_n}{u_{n-1}} = 2$. Barisan bilangan ini disebut barisan geometri.

Definisi 6.3

Barisan geometri adalah barisan bilangan yang nilai pembanding (rasio) antara dua suku yang berurutan selalu tetap.

Rasio, dinotasikan r merupakan nilai perbandingan dua suku berurutan. Nilai r dinyatakan:

$$r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = ... \frac{u_n}{u_{n-1}}.$$

Bersama dengan siswa membuat Definisi 6.3 secara induktif berdasarkan penyelesaian-penyelesaian permasalahan yang sudah diselesaikan.

Sifat-6.3

Jika $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ merupakan susunan suku-suku barisan geometri, dengan $u_1 = a$ dan r adalah *rasio*, maka suku ke-n dinyatakan

$u_n = ar^{n-1}$, n adalah bilangan asli.

b. Deret Geometri

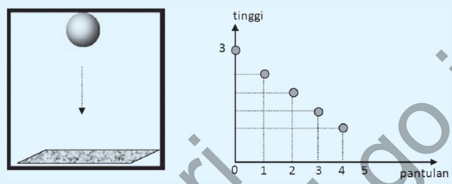
Analog dengan konsep deret aritmetika, deret geometri juga merupakan barisan suku pertama barisan geometri. Cermati masalah di bawah ini!

Pemberian masalah ini bertujuan untuk menemukan konsep deret geometri. Minta siswa untuk memahami Masalah 6.7 berikut.

Masalah-6.8

Sebuah bola jatuh dari gedung setinggi 3 meter ke lantai dan memantul kembali setinggi $\frac{4}{5}$ kali dari tinggi sebelumnya

Tentukanlah panjang lintasan bola tersebut sampai pada pantulan ke-10!



Gambar 6.15 Pantulan Bola

Alternatif Penyelesaian

Pandang dan amatilah kembali gambar di atas! Tampak pada Gambar 6.15 bahwa terdapat 2 kali lintasan bola yang sama tingginya setelah pantulan pertama. Misalkan a ketinggian awal bola dan misalkan t tinggi pantulan maka tinggi pantulan bola dapat diberikan pada tabel berikut.

Tabel 6.6 Tinggi Pantulan Bola

Pantulan ke ...	0	1	2	3	...
Tinggi pantulan (m)	3	$\frac{12}{5}$	$\frac{48}{25}$	$\frac{192}{125}$	...
Suku ke ...	u_1	u_2	u_3	u_4	...

Arahkan siswa untuk mengisi tabel pada pantulan berikutnya.

Pandu siswa untuk mengambil kesimpulan dari pengamatan terhadap tabel diatas jika pantulan terjadi terus.

- Coba kamu teruskan mengisi tabel pada pantulan berikutnya.
- Apakah mungkin terjadi ketinggian pantulan bola sama dengan nol?

Misalkan panjang lintasan bola sampai pantulan ke-10 adalah S.

$S = u_1 + 2\,(u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_{10})$

$\Leftrightarrow S = 2\,(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + ... + u_{10}) - u_1$

$\Leftrightarrow S = 2s_{10} - u_1$

dimana

Tabel 6.7 Deret Pantulan Bola

Deret	Jumlah suku-suku	Nilai
s_1	u_1	3
s_2	$u_1 + u_2$	$3+\frac{12}{5}=3(\frac{9}{5})=3(\frac{25-16}{5})$
s_3	$u_1 + u_2 + u_3$	$3+\frac{12}{5}+\frac{48}{25}=3(\frac{61}{25})=3(\frac{125-64}{25})$
s_4	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4$	$3+\frac{12}{5}+\frac{48}{25}+\frac{192}{125}=3(\frac{369}{125})=3(\frac{625-256}{125})$
...	...	...
s_n	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \dots + u_n$	$s_n=3(\frac{5^n-4^n}{5^{n-1}})$

Berdasarkan Tabel 6.7 deret bilangan tersebut adalah sebuah barisan jumlah, s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ... yaitu

Arahkan siswa mengerjakan terlebih dahulu

$$3(\frac{5^1-4^1}{5^0}),3(\frac{5^2-4^2}{5^1}),3(\frac{5^3-4^3}{5^2}),\dots,3(\frac{5^n-4^n}{5^{n-1}})$$

Sehingga $s_{10}=3(\frac{5^{10}-4^{10}}{5^9})$

Jadi, panjang lintasan bola sampai pantulan ke-10

adalah $S = 2s_{10} - u_1$ atau $S=6(\frac{5^{10}-4^{10}}{5^9})-3$

- Coba kamu diskusikan bersama temanmu untuk mencari panjang lintasan bola pantul jika dilemparkan ke atas setinggi 5 meter dan memantul setinggi 4/5 kali dari tinggi sebelumnya.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan panjang lintasan bola sampai pantulan ke-10 adalah S.

$S = u_1 + 2\,(u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{10})$
$\Leftrightarrow S = 2\,(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{10}) - u_1$
$\Leftrightarrow S = 2s_{10} - u_1$

Berikut ini disajikan penyelesaian permasalahan tentang panjang lintasan pantulan bola jika ketinggian awal 5 m dan memantul setinggi $\frac{4}{5}$ kali dari tinggi sebelumnya. Penyelesaian pertanyaan ini analogi dengan penyelesaian dari Masalah 6.8 dimana

Deret	Jumlah suku-suku	Nilai
s_1	u_1	5
s_2	$u_1 + u_2$	$5+\frac{20}{5}=5(\frac{9}{5})=5(\frac{25-16}{5})$
s_3	$u_1 + u_2 + u_3$	$5+\frac{20}{5}+\frac{80}{25}=5(\frac{61}{25})=5(\frac{125-64}{25})$
s_4	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4$	$5+\frac{20}{5}+\frac{80}{25}+\frac{320}{125}=5(\frac{369}{125})=5(\frac{625-256}{125})$
...	...	...
s_n	$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 ... + u_n$	$s_n = 5(\frac{5^n-4^n}{5^{n-1}})$

Berdasarkan tabel di atas deret bilangan tersebut adalah sebuah barisan jumlah, s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ...yaitu

$$3(\frac{5^1-4^1}{5^0}),\ 3(\frac{5^2-4^2}{5^1}),\ 3(\frac{5^3-4^3}{5^2}),\ ...,\ 3(\frac{5^n-4^n}{5^{n-1}})$$

Sehingga $S = 6(\frac{5^{10}-4^{10}}{5^9})-3$

Jadi, panjang lintasan bola sampai pantulan ke-10 adalah

$S = 2s_{10} - u_1$ atau $S = 10(\frac{5^{10}-4^{10}}{5^9})-5$

Masalah 6.9 merupakan masalah deret geometri yang terkait dengan masalah keuangan. Jika memungkinkan masalah ini dapat diperluas dengan masalah yang melibatkan bunga bank.

Masalah-6.9

Setiap akhir bulan Siti menabung di sebuah bank sebesar Rp 5.000.000,00 dan memperoleh jasa simpanan sebesar 1 % setiap bulan. Jika bank tidak membebankan biaya administrasi. Tentukan simpanan Siti setelah 2 tahun!

Alternatif Penyelesaian

Misalkan modal Siti yang disimpan setiap akhir bulan adalah M dengan bunga i %, maka diperoleh

Setelah Bulan ke-	Modal
1	$M + Mi = M(1 + i)$
2	$M(1 + i) + M(1 + i)\, i$ $= M(1 + i)(1 + i)$ $= M(1 + i)^2$
3	$M(1 + i)^2 + M(1 + i)^2 \cdot i$ $= M(1 + i)^2\ (1 + i)$ $= M(1 + i)^3$
. . .	. . .
n	$M(1 + \mathrm{i})^n$

Berdasarkan tabel di atas maka diperoleh simpanan Siti Bulan ke- 24 adalah :

Simpanan Siti $= M(1 + \mathrm{i})^n$

$= 5.000.000\ (1 + 0{,}01)^{24}$

$= 5.000.000\ (0{,}01)^{24}$

$= 6.348.673{,}24$

Simpanan Siti setelah Bulan ke- 24 adalah Rp 6.348.673,24

Definisi 6.4

Deret geometri adalah barisan jumlah *n* suku pertama barisan geometri,
$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ dengan

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

atau

$$s_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

dengan $u_1 = a$ dan r adalah rasio.

Bersama dengan siswa membuat definisi deret geometri sekaligus beberapa prinsip deret geometri yang terkait.

Sifat 6.4 merupakan sifat yang menjelaskan tentang deret geometri dengan mempertimbangkan nilai rasio (r) dari deret tersebut yaitu

(i) $r < 1$;

(ii) (ii) $r > 1$; dan

(iii) $r = 1$

Sifat-6.4

Jika suatu deret geometri suku pertama adalah $u_1 = a$, dan rasio = r, maka jumlah n suku pertama adalah

i. $s_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$, untuk $r < 1$.

ii. $s_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$, untuk $r > 1$.

iii. $s_n = na$, untuk $r = 1$.

Bukti:

i. $s_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$ ....(1)

Dengan mengalihkan kedua ruas persamaan 1 dengan r, didapatkan persamaan berikut.

$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n$ ....(2)

Sekarang, selisih persamaan (1) dengan (2), diperoleh

$s_n - rs_n = (a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n)$

$s_n(1 - r) = a - ar^n$

$s_n = \dfrac{a - ar^n}{1-r}$

Rumus jumlah n suku pertama deret geometri adalah

$s_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$, $r < 1$. (terbukti)

ii. $S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{2} + ar^{n-1}$ ....(1)

kedua ruas kalikan dengan r

$rS_n = (ar + ar^2 + ar^3 \ldots + ar^{n-1}) + ar^n$ ....(2)

$rS_n = (S_n - a) + ar^n$

$rS_n - S_n = ar^n - a$

$S_n (r - 1) = a (r^n - 1)$

$Sn = \dfrac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$ (terbukti)

Minta siswa untuk membuktikan sifat (ii) dan (iii) sekaligus untuk melatih analogi berpikir siswa. Pada buku guru ini akan dibahas untuk bukti (ii) dan (iii).

jika siswa mengalami kesulitan berikan bantuan kepada siswa dengan mengajukan beberapa pertanyaan sehingga

iii. $S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$ ....(1)

dengan r = 1, maka diperoleh.

$S_n = a + a(1) + a(1)^2 + \ldots + a(1)^{n-1}$

$$S_n = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n\ faktor}$$

$S_n = n.a$ (terbukti)

siswa dapat melakukan beberapa langkah pembuktian sehingga dapat membuktikan sifat tersebut.

Contoh 6.11

Tentukan jumlah 10 suku pertama dari deret geometri berikut ini!

$$4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Contoh 6.11 merupakan contoh dari penerapan tentang prinsip yang disajikan pada sifat 6.4. guru dapat memberikan contoh lain dalam melatih siswa untuk menerapkan tentang prinsip matematika yang sudah dibahas.

Alternatif Penyelesaian

Pertama harus ditentukan rasio deret bilangan tersebut.

$$r = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \frac{1}{4}.$$

Karena $r < 1$, maka jumlah 10 suku pertama ditentukan melalui rumus, $s_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

Akibatnya,

$$s_{10} = \frac{4\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right)}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right).$$

Pertanyaan ini untuk melatih apakah siswa memahami tentang konsep barisan aritmetika atau barisan geometri.

Pertanyaan Kritis

Perhatikan pola barisan bilangan berikut!

a) 1, 3, 7, 9, …

b) 1, 4, 9, 16, …

c) 3, 1, 4, 2, 5, …

Apakah barisan tersebut termasuk barisan aritmetika atau barisan geometri? Tentukanlah suku ke 10 dari pola barisan di atas!

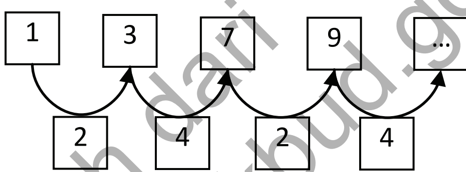
Pada penyelesaian butir a) Jika siswa mengalami kesulitan, guru dapat meminta siswa untuk menentukan terlebih dahulu beda atau rasio dari barisan tersebut. Ternyata jika dicari rasionya, barisan itu tidak memiliki rasio yang sama begitu juga dengan bedanya.

Salah satu cara untuk menyelesaikan masalah tersebut adalah barisan tersebut dibagi menjadi dua bagian yaitu yang bagian (I) suku yang berindeks ganjil dan bagian (II) suku yang berindeks genap.

Setelah barisan tersebut terbagi menjadi dua bagian minta siswa untuk memperhatikan barisan tersebut. Harapan jawaban siswa adalah masing-masing barisan tersebut

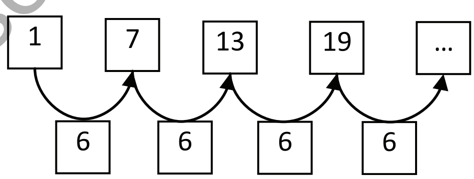
Alternatif Penyelesaian

a) 1, 3, 7, 9, …

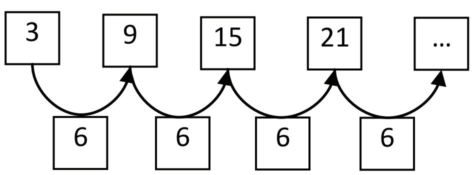


Jika diperhatikan maka beda dua suku yang berdekatan tidak sama, tetapi memiliki pola. Jika suku yang berindeks ganjil dan berindeks genap dipisahkan menjadi dua bagian maka akan diperoleh

Bagian I (suku yang berindeks ganjil)



Bagian II (suku yang berindeks genap)



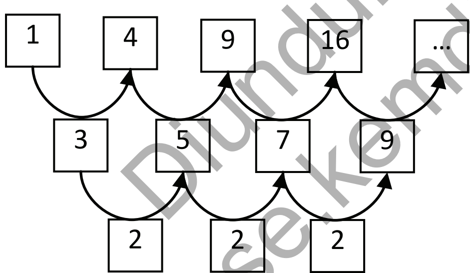
Bagian I (suku yang berindeks ganjil) dan Bagian II (suku yang berindeks genap) merupakan barisan aritmetika. Pertanyaannya adalah menentukan suku yang ke-10 dari barisan 1, 3, 7, 9, …

Karena suku ke-10 nya terdapat pada bagian II (suku yang berindeks genap) maka suku ke-10 merupakan suku ke-5 dari barisan bagian II (suku yang berindeks genap), sehingga diperoleh :

$U_n = a + (n - 1)b$
$U_5 = 3 + (5 - 1)(6)$
$U_5 = 3 + 24$
$U_5 = 27$

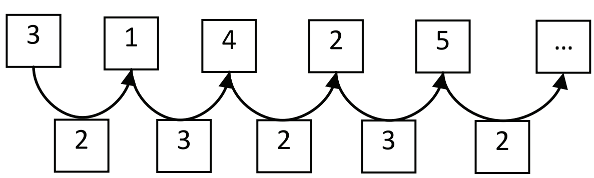
1, 3, 7, 9, … bukan merupakan barisan aritmetika maupun barisan geometri.

b) 1, 4, 9, 16, …



berdasarkan gambar di atas diperoleh bahwa 1, 4, 9, 16, … merupakan barisan aritmetika tingkat dua. Berdasarkan gambar diperoleh bahwa pola barisannya adalah $U_n = (n)^2$ $U_{10} = (10)^2 = 100$.

c) 3, 1, 4, 2, 5, ….



merupakan barisan aritmetika. sehingga akhirnya siswa dapat menentukan suku ke-10 dari barisan 1, 3, 7, 9, … adalah suku ke-5 dari barisan bagian (II) dan diperoleh $U_5 = 27$

Berdasarkan penyelesaian yang dilakukan siswa, diharapkan siswa dapat menyimpulkan bahwa barisan 1, 3, 7, 9, … bukan merupakan barisan aritmetika maupun barisan geometri.

Jika siswa mengalami kesulitan pada penyelesaian butir (b) arahkan siswa untuk terlebih dahulu menentukan beda atau rasio dari barisan 1, 4, 9, 16, …

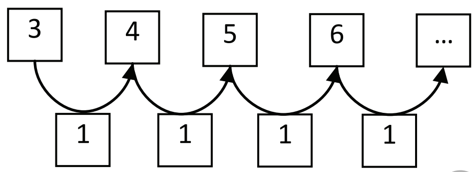
Setelah siswa menentukan beda barisan tersebut diharapkan siswa dapat menyimpulkan bahwa barisan tersebut merupakan barisan aritmetika tingkat dua. Dengan mengamati tiap-tiap suku pada barisannya, diharapkan siswa dapat menemukan pola $U_n = (n)2$ *dan diperoleh* $U_{10} = (10)2 = 100$

Jika siswa mengalami kesulitan pada penyelesaian butir (c) arahkan siswa untuk terlebih dahulu menentukan beda atau rasio dari barisan 3, 1, 4, 2, 5, …

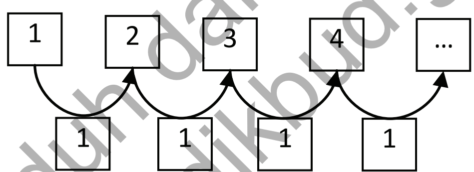
Penyelesaian butir (c) ini sama dengan butir (a)

Jika diperhatikan maka beda dua suku yang berdekatan tidak sama, tetapi memiliki pola. Jika suku yang berindeks ganjil dan berindeks genap dipisahkan menjadi dua bagian maka akan diperoleh

Bagian I (suku yang berindeks ganjil)



Bagian II (suku yang berindeks genap)



Bagian I (suku yang berindeks ganjil) dan Bagian II (suku yang berindeks genap) merupakan barisan aritmetika. Pertanyaannya adalah menentukan suku yang ke-10 dari barisan 3, 4, 5, 6, …

Karena suku ke-10 nya terdapat pada bagian II (suku yang berindeks genap) maka suku ke-10 merupakan suku ke-5 dari barisan bagian II (suku yang berindeks genap), sehingga diperoleh :

$U_n = a + (n - 1)b$

$U_5 = 1 + (5 - 1)(1)$

$U_5 = 3 + 4$

$U_5 = 7$

3, 1, 4, 2, 5, 3, … bukan merupakan barisan aritmetika maupun barisan geometri.

Uji Kompetensi 6.2

Uji kompetensi 6.2 sebagai sarana untuk mengetahui apakah siswa telah menguasai konsep barisan dan deret geometri.

1. Untuk memeriksa sebuah barisan merupakan barisan geometri apakah cukup hanya dengan menentukan rasio dua suku berturutan? Jelaskan dengan menggunakan contoh!

2. Tentukan rumus suku ke-*n* dan suku ke-10 dari barisan bilangan di bawah ini!
   a) 1, 4, 16, 24, …
   b) 5, 10, 20, 40, …
   c) 9, 27, 81, 243, …
   d) $\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1, 5, \ldots$
   e) 81, 27, 9, 3, …

3. Tentukan rasio dan suku pertama dari barisan geometri di bawah ini!
   a) Suku ke-4 = 8 dan suku ke-6 = 729
   b) Suku ke-2 = 6 dan suku ke-5 = 162
   c) $U_3 = 10$ dan $U_6 = 1{,}25$

4. Selesaikan barisan geometri di bawah ini!
   a) Suku ke- 4 = 27 dan suku ke-6 = 243 tentukan suku ke-8
   b) $U_2 = 10$ dan $U_6 = 10$, tentukan U_9
   c) $U_2 = \sqrt[2]{2}$ dan $U_5 = 8$, tentukan U_{10}

5. Tentukan hasil jumlah barisan bilangan di bawah ini!
   a) 1, 2, 4, 8, 16, … (sampai 10 suku)
   b) 54, 18, 6, 2, … (sampai 9 suku)
   c) 5, (–15), 45, (–135), … (sampai 8 suku)
   d) 1, 1, 3, 2, 9, 4, 27, 8, … (sampai 19 suku)
   e) $8, 7, 9, 3, \ldots, \frac{1}{27}, \frac{1}{81} = \ldots$

6. Tentukan nilai x dari penjumlahan suku-suku barisan geometri $2 + 4 + 8 + \ldots + 2^x = 2046$

7. Tiga bilangan membentuk barisan aritmetika. Jika suku ketiga ditambah 3 dan suku kedua dikurangi 1, diperoleh barisan geometri. Jika suku ketiga barisan aritmetika ditambah 8, maka hasilnya menjadi 5 kali suku pertama. Tentukan beda dari barisan aritmetika tersebut!

8. Tiga bilangan positif membentuk barisan geometri dengan rasio $r > 1$. Jika suku tengah ditambah 4, maka terbentuk sebuah barisan aritmetika yang jumlahnya 30. Tentukan Hasil kali dari ketiga bilangan tersebut!

9. Sebuah bola jatuh dari ketinggian 8m dan memantul kembali dengan ketinggian $\frac{3}{5}$ kali tinggi sebelumnya Pemantulan ini berlangsung terus menerus hingga bola berhenti. Berapakah jarak lintasan seluruhnya?

10. Pertumbuhan penduduk biasanya dinyatakan dalam persen. Misalnya, pertumbuhan penduduk adalah 2% per tahun artinya jumlah penduduk bertambah sebesar 2% dari jumlah penduduk tahun sebelumnya. Pertambahan penduduk menjadi dua kali setiap 10 tahun. Jumlah penduduk desa pada awalnya 500 orang, berapakah jumlah penduduknya setelah 70 tahun apabila pertumbuhannya 2.5%?

11. Pertumbuhan ekonomi biasanya dalam persen. Misalnya, pertum– buhan ekonomi suatu negara sebesar 5% per tahun artinya terjadi pertambahan Produk Domestik Bruto (PDB) sebesar 5% dari PDB tahun sebelumnya. Berdasarkan analisis, ekonomi Indonesia akan mengalami pertumbuhan sebesar 6.5% per tahun selama tiga tahun ke depan. Tentukan PDB pada tahun ketiga apabila PDB tahun ini PDB-nya sebesar 125 triliun rupiah.

12. Jika barisan x_1, x_2 , x_3,… memenuhi $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = n^3$, untuk semua n bilangan asli, maka x_{100} = ...

13. Kenaikan harga barang-barang disebut inflasi. Berdasarkan analisis, ekonomi Indonesia akan mengalami inflasi sebesar 8% per tahun selama 5 tahun mendatang. Apabila harga emas sekarang ini adalah Rp200.000,00 per gram, tentukan harga emas tersebut empat tahun lagi.

Projek

Himpunlah minimal tiga buah masalah penerapan barisan dan deret geometri dalam bidang fisika, teknologi informasi dan masalah nyata di sekitarmu. Ujilah berbagai konsep dan aturan barisan dan deret geometri di dalam pemecahan masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

Tugas projek diberikan sebagai tugas individu untuk menginformasikan kepada siswa bahwa belajar tentang barisan dan deret sangat diperlukan dalam perkembangan ilmu dan dalam menyelesaikan permasalahan kehidupan.

D. PENUTUP

Beberapa hal penting sebagai kesimpulan dari hasil pembahasan materi barisan dan deret, disajikan sebagai berikut.

Bagian penutup ini merupakan rangkuman tentang informasi dan konsep barisan dan deret

1. Barisan bilangan adalah sebuah fungsi dengan domainnya himpunan bilangan asli dan daerah hasilnya suatu himpunan bagian dari himpunan bilangan real.
2. Barisan aritmetika adalah barisan bilangan yang memiliki beda dua suku berurutan selalu tetap.
3. Deret aritmetika adalah jumlah suku-suku barisan aritmetika.
4. Barisan geometri adalah barisan bilangan yang memiliki hasil bagi dua suku berurutan adalah tetap. Hasil bagi dua suku berurutan disebut rasio.

5. Deret geometri adalah jumlah suku-suku barisan geometri.
6. Masih banyak jenis barisan yang akan kamu pelajari pada jenjang yang lebih tinggi, seperti barisan naik dan turun, barisan harmonik, barisan fibbonaci, dan lain sebagainya. Kamu dapat menggunakan sumber bacaan lain untuk lebih mendalami sifat-sifat barisan dan deret.

Selanjutnya kita akan membahas materi persamaan dan fungsi kuadrat. Tentu kamu wajib mengulangi mempelajari materi persamaan linear, relasi, dan fungsi, sebab materi tersebut adalah prasyarat utama mempelajari persamaan dan fungsi kuadrat.

Bab 7

Persamaan dan Fungsi Kuadrat

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar

Setelah mengikuti pembelajaran persamaan siswa mampu:

1. Mentransformasi diri dalam berpilaku jujur, tangguh mengadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika.
2. Mendeskripsikan berbagai bentuk ekspresi yang dapat diubah menjadi persamaan kuadrat.
3. Mendeskripsikan persamaan dan fungsi kuadrat, memilih strategi dan menerapkan untuk menyelesaikan persamaan dan fungsi kuadrat serta memeriksa kebenaran jawabannya.
4. Menganalisis fungsi dan persamaan kuadrat dalam berbagai bentuk penyajian masalah kontekstual.
5. Menganalisis grafik fungsi dari data terkait masalah nyata dan menentukan model matematika berupa fungsi kuadrat.
6. Mengidentifikasi dan menerapkan konsep fungsi dan persamaan kuadrat dalam menyelesaikan masalah nyata dan menjelaskannya secara lisan dan tulisan.
7. Menyusun model matematika dari masalah yang berkaitan dengan persamaan dan fungsi kuadrat dan menyelesaikan serta memeriksa kebenaran jawabannya.
8. Menggambar dan membuat sketsa grafik fungsi kuadrat dari masalah nyata berdasarkan data yang ditentukan dan menafsirkan karakteristiknya.

Pengalaman Belajar

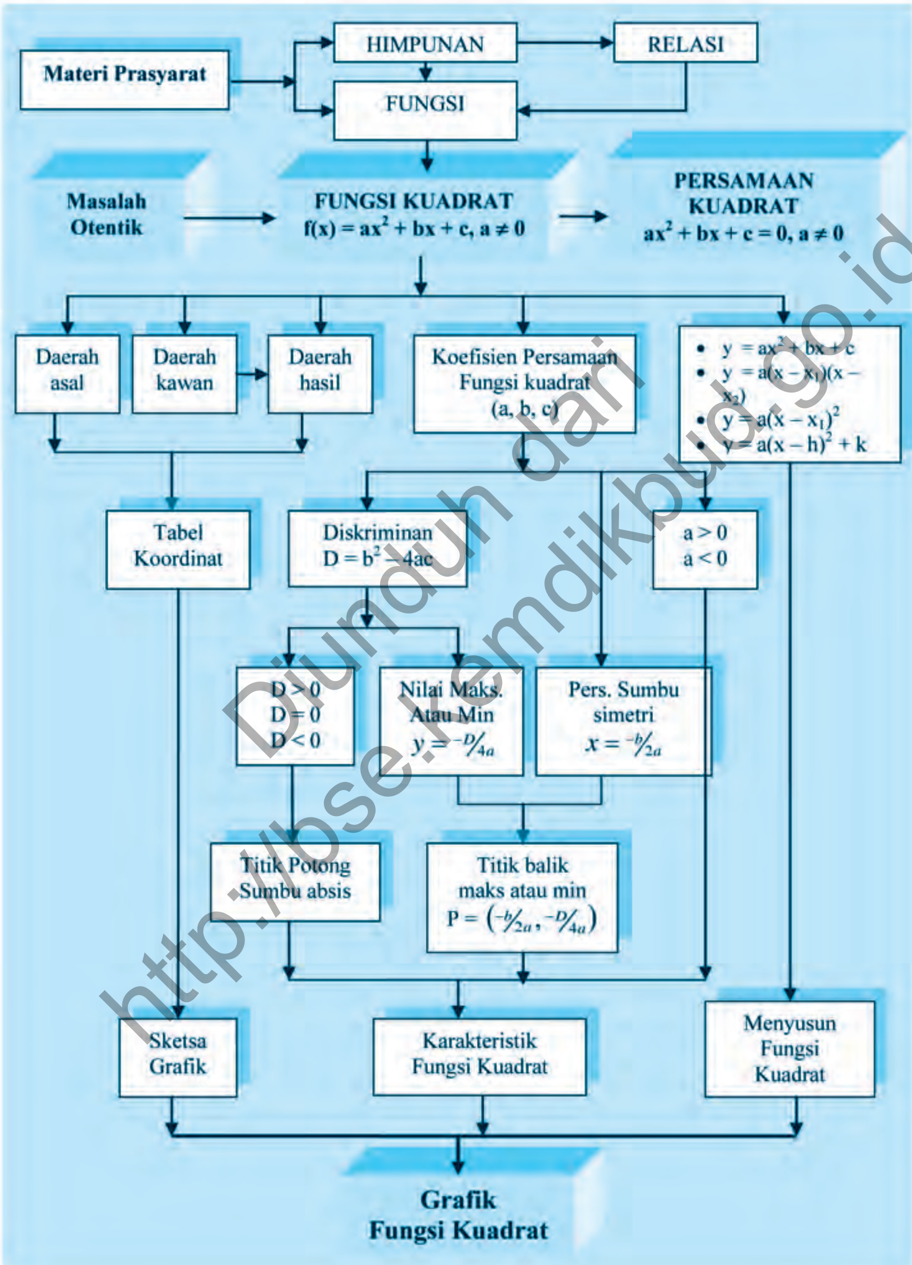
Melalui pembelajaran materi fungsi kuadrat, siswa memperoleh pengalaman belajar

- menjelaskan karakteristik masalah otentik yang pemecahannya terkait dengan model matematika sebagai persamaan kuadrat.
- merancang model matematika dari sebuah permasalahan otentik yang berkaitan dengan persamaan kuadrat..
- menyelesaikan model matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan.
- menafsirkan hasil pemecahan masalah.
- menuliskan ciri-ciri persamaan kuadrat. dari beberapa model matematika
- menuliskan konsep persamaan kuadrat.berdasarkan ciri-ciri yang ditemukan dengan bahasanya sendiri.
- menurunkan sifat-sifat dan aturan matematika yang berkaitan dengan persamaan kuadrat berdasarkan konsep yang sudah dimiliki..
- menggunakan konsep dan prinsip persamaan kuadrat untuk memecahkan masalah otentik.
- bekerjasama membangun ide-ide dan berlatih berpikir kritis, logis dan kreatif

Istilah Penting

- *Persamaan Kuadrat*
- *Peubah*
- *Koefisien*
- *Konstanta*
- *Akar-akar Persamaan*
- *Fungsi kuadrat*
- *Parabola*
- *Sumbu Simetri*
- *Titik Puncak*
- *Nilai Maksimum dan Minimum*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

I. PERSAMAAN KUADRAT

a. Menemukan Konsep Persamaan Kuadrat Satu Variabel

Banyak permasalahan dalam kehidupan yang pemecahannya terkait dengan konsep dan aturan-aturan dalam matematika. Secara khusus keterkaitan konsep dan prinsip-prinsip persamaan kuadrat, sering kita temukan dalam permasalahan kehidupan nyata yang menyatu/bersumber dari fakta dan lingkungan budaya kita. Konsep persamaan kuadrat dapat dibangun/ditemukan di dalam pemecahan permasalahan yang kita hadapi. Untuk itu perhatikan dan selesaikan dengan cermat permasalahan-permasalahan yang diberikan.

Di dalam proses pemecahan masalah-masalah yang diberikan, kamu cermati objek-objek budaya atau objek lingkungan budaya yang dilibatkan dalam permasalahan yang diberikan. Objek-objek itu menjadi bahan aspirasi/inspirasi, karena terkadang ada konsep matematika melekat pada objek itu yang tidak kita sadari dan ternyata sebagai kata kunci dalam penyelesaian masalah. Demikian juga kamu tidak boleh mengabaikan atau melupakan konsep-konsep dan aturan-aturan matematika yang telah dipelajari sebelumnya, baik di tingkat SD, SMP, bahkan pada materi yang baru saja kamu pelajari.

Dalam menyelesaikan masalah matematika, kamu bisa pada kesepakatan antara kamu dan teman-teman serta guru, dalam menggunakan variabel-variabel, bersifat abstrak sebab matematika adalah hasil abstraksi pemikiran manusia. Matematika menganut kebenaran konsistensi atau tidak boleh ada di dalamnya, unsur-unsur, simbol-simbol, konsep-konsep, dan rumus-rumus yang saling bertentangan. Alat ukur kebenarannya, jika

Proses pembelajaran dalam pokok bahasan sistem persamaan linear ni, kita menerapkan problem-based learning dengan pendekatan scientific learning. Sehingga dalam mengonstruksi konsep persamaan dan fungsi kuadrat berbasis pemecahan masalah melalui penemuan model matematika berupa persamaan dan fungsi kuadrat. Selanjutnya menganalisis sifat-sifat dari objek-objek matematika yang dikaji.

Untuk menemukan konsep persamaan kuadrat, ajukan pada siswa beberapa masalah secara berkelanjutan untuk dipecahkan. Biarkan siswa lebih dahulu berusaha memikirkan, bersusah payah mencari ide-ide, berdiskusi, mencari pemecahan masalah di dalam kelompok belajar. Dari beberapa model matematika berupa persamaan kuadrat, minta siswa secara individu menuliskan ciri-ciri persamaan kuadrat dan hasilnya didiskusikan dengan teman satu kelompok. Berdasarkan ciri-ciri tersebut minta siswa menuliskan konsep persamaan kuadrat dengan kata-katanya sendiri.

konsep yang ditemukan, ukuran kebenarannya apabila konsep tersebut diterima pada struktur matematika yang sudah ada sebelumnya. Prinsip (rumus-rumus, sifat-sifat) yang ditemukan, ukuran kebenarannya dapat dibuktikan kebenarannya menggunakan konsep atau aturan yang sudah ada sebelumnya.

Motivasi siswa dengan menunjukkan kebermanfaatan matematika dalam memecahkan Masalah 7.1. Arahkan siswa memahami Masalah-7.1 dan mendorong siswa melakukan analisis terhadap informasi yang diketahui dan yang ditanyakan. Beri kesempatan pada siswa menggali ide-ide dan memunculkan pertanyaan sekitar masalah. Meminta siswa menuliskan apa yang diketahui dan yang ditanyakan pada masalah

Masalah-7.1

Arsitek Ferdinand Silaban merancang sebuah rumah adat Batak di daerah Tuk-tuk di tepi Danau Toba. Ia menginginkan luas penampang atap bagian depan $12\ m^2$. Di dalam penampang dibentuk sebuah persegi panjang tempat ornamen (ukiran) Batak dengan ukuran lebar 2 m dan tingginya 3 m. Bantulah Pak Silaban menentukan panjang alas penampang atap dan tinggi atap bagian depan!

Gambar 7.1 Rumah Adat

Pahamilah masalah di atas, artinya kamu tuliskan hal apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan sajikan/dekati masalah dalam gambar. Gunakan variabel untuk menyatakan masalah dalam matematika. Ingat konsep dan aturan-aturan apa saja yang terkait dengan masalah yang dihadapi supaya dapat terpecahkan. Perhatikan konsep apa yang melekat pada penampang depan atap rumah adat tersebut. Gunakan sebagai langkah awal untuk menyelesaikan masalah. Ingat kembali apa yang dimaksud dua bangun dikatakan kongruen dan lakukan perbandingan panjang sisi-sisi kedua bangun tersebut untuk memperoleh persamaan tinggi penampang atap.

Ingat kembali materi persamaan kuadrat yang telah dipelajari di SMP, bagaimana cara menentukan nilai variabel dengan menggunakan manipulasi aljabar pada persamaan yang diperoleh? Berdasarkan nilai variabel akan ditentukan tinggi penampang atap dan panjang alasnya.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Luas penampang atap bagian depan 12 m^2

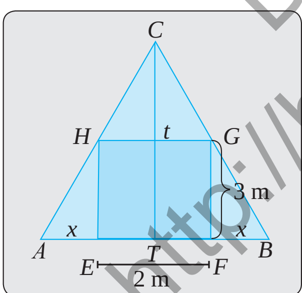
Ukuran persegipanjang tempat ornamen adalah 3 m × 2 m

Ditanya:

a. Panjang alas penampang atap

b. Tinggi atap

Kamu ilustrasikan masalah di atas seperti gambar berikut!



Gambar 7.2 Penampang Atap Bagian atas

- Memperhatikan konsep apa yang melekat pada penampang depan atap rumah adat tersebut.

Diharapkan siswa dapat mencermati segitiga sama kaki *ABC* dan melakukan hal berikut.

Beri bantuan kepada siswa menginterpretasikan masalah dalam gambar. Minta siswa mengamati bangun apa yang terbentuk dan sifat-sifat segitiga samasisi, sifat kesebangunan, rumus luas segitiga yang perlu diingatkan kembali, Arahkan siswa melakukan matematisasi dan manipulasi aljabar untuk mendapatkan model matematika berupa persamaan kuadrat.

Bantu siswa menerapkan rumus luas segitiga dalam menentukan tinggi penampang atap rumah adat, serta menerapkan sifat dua bangun yang sebangun. Ingatkan kembali apa yang dimaksud dua bangun dikatakan sebangun dan menyuruh siswa memperhatikan segitiga CTB dan segitiga GFB. Kedua segitiga tersebut sebangun.

Karena penampang atap rumah berbentuk segitiga sama kaki, maka

$$\text{Luas} = \frac{1}{2} \times \text{panjang alas} \times \text{tinggi}$$

$$L = \frac{1}{2} \times (AE + EF + FB) \times t$$

$$12 = \frac{1}{2} t(x + 2 + x)$$

$$12 = t(1 + x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Perhatikan segitiga *CTB* dan segitiga *GFB*. Kedua segitiga tersebut sebangun.

$$\frac{CT}{GF} = \frac{TB}{FB} \Leftrightarrow \frac{t}{3} = \frac{1+x}{x}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3+3x}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Mengarahkan siswa memanfaatkan persamaan (1) dan (2) untuk memperoleh model matematika berupa persamaan kuadrat.

Sehingga diperoleh

$$12 = \left(\frac{3+3x}{x}\right)(1 + x) \Leftrightarrow 12x = (3 + 3x)(1 + x)$$

$$\Leftrightarrow 12x = 3 + 3x + 3x + 3x^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 12x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$\therefore x^2 - 2x + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Ingat kembali materi persamaan kuadrat yang telah dipelajari di SMP, bagaimana cara menentukan nilai-nilai *x* dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (3). Berdasarkan persamaan (3) akan ditentukan nilai-nilai *x*.

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x + 1 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - x - x + 1 = 0\\
&\Leftrightarrow x(x-1) - 1(x-1) = 0\\
&\Leftrightarrow (x-1)(x-1) = 0\\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0\\
&\Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}
$$

- Apa makna dari $a \times b = 0$ dan apa kaitannya dengan $(x-1)(x-1) = 0$

Dengan menggunakan nilai x akan ditentukan nilai t.

Untuk $x = 1$ diperoleh $t = \dfrac{3-3x}{x} = 6$.

Sehingga diperoleh panjang alas dan tinggi penampang atap rumah adalah 4 m dan 6 m.

Sering kita temui orang tua yang sudah lanjut usia, mampu menghitung harga telur (banyak telur, cukup banyak) tanpa menggunakan kalkulator dengan waktu cukup singkat. Sementara orang tua tersebut tidak pernah menduduki jenjang pendidikan. Ternyata mereka memiliki warisan dari leluhur cara menjumlahkan dan mengalikan bilangan. Agar kamu mengetahuinya, gunakan jari tanganmu dan pecahkan Masalah 7.2 berikut.

Masalah-7.2

Nenek moyang salah satu suku di Indonesia dalam melakukan operasi hitung penjumlahan dan perkalian mereka menggunakan basis lima dengan fakta bahwa banyak jari tangan kiri atau kanan adalah lima. Coba bantu temukan aturan perkalian untuk menentukan hasil kali bilangan x dan y dengan

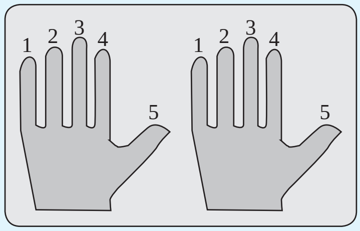
Meminta siswa mengingat kembali materi persamaan kuadrat yang telah dipelajari di SMP, bagaimana cara menentukan nilai-nilai x dengan melakukan manipulasi aljabar pada pers (1). Berdasarkan persamaan (1) akan ditentukan nilai-nilai x.

Ajukan pertanyaan pada beberapa orang siswa, penerapan prinsip Jika $a \times b = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$ dan hubungannya dengan $(x-1)(x-1) = 0$ dalam penentuan nilai x. Siswa diharapkan memberi jawaban berikut. Penggunaan sifat, Jika $a \times b = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$. Memandang $a = x - 1$ dan $b = x - 1$. Jika $(x-1)(x-1) = 0$, maka $x - 1 = 0$ atau $x - 1 = 0$. Dengan demikiaan $x - 1 = 0$ atau $x = 1$.

Motivasi siswa mampu menemukan algoritma perkalian yang sesuai dengan perkalian bilangan yang diterapkan nenek moyang pada waktu yang lalu. Arahkan siswa untuk mencoba menentukan *hasil kali bilangan 6 dan 8 sebelum menemukan prosedur yang berlaku secara umum.*

a. 5 < x, y < 10, dengan $x, y \in N$

b. x = 5 dan $y \geq$ 5, dengan $x, y \in N$



Gambar 7.3 Jari Tangan

Beri kesempatan kepada siswa mendemonstrasikan perkalian 6 × 8 mengikuti langkah-langkah perkalian bilangan yang telah disusun dan disajikan pada buku siswa (lihat di samping). Arahkan siswa menggunakan jari tangan kiri dan kanan.

Sebelum menemukan aturan perkalian bilangan-bilangan yang dibatasi pada bagian a) dan b), coba pilih dua bilangan x dan y, $5 < x, y < 10$, dengan $x, y \in N$ (misalnya, 6 × 8). Ingat apa arti basis 5, lakukan pencacahan bilangan 6 di jari tangan kiri dan bilangan 8 di jari tangan kanan. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut!

1) Setelah kamu mencacah satu kali bilangan x di tangan kiri, ada berapa banyak jari yang terpakai dan yang tidak terpakai pada pencacahan kedua kali?
2) Setelah kamu mencacah satu kali bilangan y di tangan kanan, ada berapa banyak jari yang terpakai dan yang tidak terpakai pada pencacahan kedua kali?
3) Berapa jumlah banyak jari yang terpakai pada tangan kiri dan banyak jari yang terpakai pada tangan kanan pada saat pencacahan kedua kali?
4) Berapa hasil kali jumlah jari yang terpakai di tangan kiri dan jari di tangan kanan dengan hasil pada langkah 3)?
5) Berapa banyak jari yang tidak terpakai di tangan kiri saat pencacahan kedua kali ?
6) Berapa banyak jari yang tidak terpakai di tangan kanan saat pencacahan kedua kali?
7) Berapa hasil kali bilangan pada langkah 5) dan 6)?
8) Berapa hasil jumlah bilangan pada langkah 4) dan 7)

Berdasarkan 8 langkah penentuan hasil perkalian bilangan x dan y, bekerjasama dengan temanmu satu kelompok untuk menemukan aturan perkalian dua bilangan x dan y, $5 < x, y < 10$, dengan $x, y \in N$.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan: z adalah bilangan basis (dalam contoh = 5)

$x = z + a, \;\; a < z$

$y = z + b, \;\; b < z$

1. hitung $(a + b)$
2. hitung $(z + z) = 2z$
3. kalikan hasil langkah 1) dan 2), yaitu $(a + b)\, 2z$
4. hitung $(z – a)$
5. hitung $(z – b)$
6. kalikan hasil langkah 4) dan 5), yaitu $(z – a)\,(z – b)$
7. jumlahkan hasil langkah 3) dan 6), yaitu $(a + b)\, 2z + (z – a)\,(z – b)$
8. diperoleh $x \times y = (a + b)\, 2z + (z – a)\,(z – b)$, $5 < x, y < 10$, $x, y \in N$

Untuk contoh di atas diperoleh

$6 \times 8 = (a + b)\, 2z + (z – a)(z – b)$

$48 = 8z + (z – 1)\,(z – 3)$

$\therefore \;\; z^2 + 4z - 45 = 0$...(1)

Beri kesempatan pada siswa menerapkan prosedur di atas secara formal matematika. Arahkan siswa menggunakan prinsip basis lima, dengan fakta bahwa jumlah jari tangan kiri dan kanan adalah lima.Selanjutnya meminta siswa menguji kebenaran algoritma yang diperoleh dengan mengganti nilai $x = 6$ dan $y = 8$. Temukan model matematika berupa persamaan kuadrat dari hasil subtitusi nilai $a = 1$ dan $b = 3$.

Latihan 7.1

Cermati aturan perkalian pada bagian a) dan coba temukan aturan perkalian bilangan pada bagian b). Awali kerja kamu dengan memilih dua bilangan $x = 5$ dan $y \geq 5$, dengan $x, y \in N$. Ingat apa arti basis 5, lakukan pencacahan bilangan x di jari tangan kiri dan bilangan y di jari tangan kanan.

Arahkan siswa diskusi dalam kelompok belajar yang heterogen untuk menemukan algoritma perkalian untuk bilangan $x = 5$ dan $y \geq 5$, dengan $x, y \in N$. Hasil yang diharapkan dari siswa disajikan di samping.

Bantu siswa membangun langkah-langkah (prosedur) yang analog dengan langkah perkalian pada bagian a) di atas. Bangun prosedur formal perkalian dengan memisalkan x dan y dua bilangan yang akan dikalikan.

Contoh: $5 \times 17 = \ldots .$?

1) bilangan 5 kita cacah pada jari tangan kiri. Setelah selesai mencacah sampai 5 jari, kita ulang kembali, berarti banyak jari yang terpakai sekarang adalah 0.
2) bilangan 17 kita cacah pada jari tangan kanan. Setelah selesai mencacah sampai 15 jari secara berulang, kita ulangi kembali dan banyak jari yang terpakai hanya 2.
3) jumlahkan 0 jari pada langkah 1) dan 2 jari pada langkah 2) hasilnya adalah $0 + 2 = 2$.
4) jumlahkan 5 jari ditangan kiri dan 15 jari ditangan kanan dan kalikan dengan hasil langkah 3) diperoleh $2\ (5 + 15) = 40$.
5) hitung banyak jari yang tidak terpakai di tangan kiri, yaitu $5 - 0 = 5$
6) hitung banyak jari yang tidak terpakai di tangan kanan, yaitu $5 - 2 = 3$
7) Hitung hasil kali antara hasil pada langkah 5) dengan berapa kali 5 mencacah di tangan kiri, yaitu $5 \times 1 = 5$.
8) hitung hasil kali antara hasil langkah 6) dengan berapa kali 5 mencacah di tangan kanan, yaitu $3 \times 3 = 9$
9) kalikan hasil pada langkah 7) dan 8) hasilnya $5 \times 9 = 45$
10) jumlahkan hasil pada langkah 4) dan 9), yaitu $40 + 45 = 85$.
11) jadi $5 \times 17 = 85$

Berdasarkan langkah 1) sampai 10) di atas diperoleh $x \times\ y = b\ (n + 1)\ z\ + nz\ (z - b)$, $x = 5$ dan $y \geq 5$, x, $y \times N$ dan n adalah berapa kali 5 menggunakan jari-jari di tangan kanan.

Untuk contoh di atas diperoleh

$x \times \ y = b\ (n + 1)\ z\ \ + nz\ (z – b)$

$5 \times 17 = 2\ (3 + 1)\ z + 3z(z – 2)$

$85 = 8z + 3z^2 - 6z$

$\therefore\ 3z^2 + 2z - 85 = 0$..(1)

Masalah-7.3

Pak Anas memiliki tambak ikan mas di hulu sungai yang berada di belakang rumahnya. Setiap pagi, ia pergi ke tambak tersebut naik perahu melalui sungai yang berada di belakang rumahnya. Dengan perahu memerlukan waktu 1 jam lebih lama menuju tambak daripada pulangnya. Jika laju air sungai 4 km/jam dan jarak tambak dari rumah 6 km, berapa laju perahu dalam air yang tenang?

Ilustrasi masalah dapat dicermati pada gambar berikut.

Gambar 7.4 Sungai

Orientasi Masalah 7.3 kepada siswa. Minta siswa menganalisis dan menggali ide-ide terkait informasi yang diketahui dalam soal. Bantu siswa mengorganisasikan pengetahuannya untuk menemukan konsep dan aturan matematika yang telah dipelajari sebelumnya yang berguna untuk penyelesaian masalah.

Selesaikanlah masalah di atas, dan agar pekerjaan kamu lebih efektif renungkan beberapa pertanyaan berikut.

1) Bagaimana kecepatan perahu saat menuju hulu sungai Asahan dan kecepatan perahu saat Pak Anas pulang?
2) Jika diasumsikan perahu tidak pernah berhenti sebelum sampai di tujuan, apa yang dapat kamu simpulkan dari keadaan perahu?
3) Coba temukan bentuk perasamaan kuadrat dalam langkah pemecahan masalah tersebut?

Arahkan siswa mengamati Gambar-7.3 untuk membayangkan aliran air sungai terkait kecepatan perahu dari hulu ke hilir dan dari hilir ke hulu sungai. Minta siswa memahami masalah dan menuliskan apa yang diketahui dan ditanyakan. Ajak siswa mencoba menjawab pertanyaan arahan yang tersedia pada buku siswa.

Menanyakan pada siswa, bagaimana kecepatan perahu saat pergi kehulu dan saat menuju hilir (pulang)?Selanjutnya meminta siswa memahami langkah-langkah penyelesaian masalah serta memberi kesempatan bagi siswa bertanya hal-hal yang belum dipahami.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan V_a adalah kecepatan air sungai dengan V_a = 4 km/jam

V_{hu} adalah kecepatan perahu ke hulu

V_{hi} adalah kecepatan perahu saat pulang

V_t adalah kecepatan perahu dalam air tenang

t_1 adalah waktu yang diperlukan menuju tambak

t_2 adalah waktu yang digunakan menuju rumah (pulang)

S adalah jarak tambak dari rumah Pak Anas

Bagaimana kecepatan perahu saat pergi ke hulu dan saat menuju hilir (pulang)?

Kecepatan perahu saat menuju hulu sungai Asahan menentang arus air dan saat Pak Anas pulang, kecepatan perahu searah dengan arus air sungai mengalir. Sehingga, jika dimisalkan

$V_{at} = x$ km/jam maka

$V_{hu} = x - 4$ dan $V_{hi} = x + 4$

Tunjukkan pada siswa bahwa matematika sangat terkait dengan ilmu fisika di dalam pemecahan Masalah 7.4. Uji pemahaman siswa dengan mengajukan pertanyaan, misalnya mengapa

$t_1 - t_2 = \frac{s}{v_{hu}} - \frac{s}{v_{hu}} = 1$

Diasumsikan perahu tidak pernah berhenti sebelum sampai di tujuan berarti

$x \neq -4$ dan $x \neq 4$.

$$t_1 - t_2 = \frac{S}{V_{hu}} - \frac{S}{V_{hi}} = 1$$

$$\frac{6}{x-4} - \frac{6}{x+4} = 1$$

$6(x + 4) - 6(x - 4) = (x + 4)(x - 4)$

$6x + 24 - 6x + 24 = x^2 + 4x - 4x - 16$

$48 = x^2 - 16$

$\therefore\ x^2 - 64 = 0$ ....(1)

$x^2 - 64 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 8) = 0$

$\Rightarrow x - 8 = 0$ atau $x + 8 = 0$

$\Rightarrow x = 8$ atau $x = -8$

Kecepatan perahu di air tenang adalah $V_{at} = x = 8$ km/jam.

Nilai x = - 8 tidak berlaku sebab kecepatan perahu bergerak maju selalu bernilai positif.

Kejadian dalam Masalah 7.4 yang akan dibahas, sering kita alami saat menggembala kerbau di tengah padang rumput yang penuh dengan pepohonan. Tentu kamu mengenal ketapel yang sering digunakan para petani untuk mengusir burung dikala padi sedang menguning. Mari kita temukan sebuah model matematika berupa persamaan kuadrat dari permasalahan berikut.

Masalah-7.4

Seorang penjual komputer telah merakit komputer dengan biaya selama seminggu sebesar Rp 37.500.000,-. Hasil rakitannya selama seminggu dipasarkan dan berhasil terjual dengan sisa 3 unit. Jika hasil penjualan komputer Rp 36.0000.000,- dengan keuntungan tiap komputer Rp 500.000,-, tentukan jumlah komputer yang diproduksi selama seminggu.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan banyak komputer yang dirakit dalam seminggu adalah x.

Biaya merakit tiap unit komputer = $\dfrac{37.500.000}{x}$ dan

Harga jual setiap unit komputer = $\dfrac{36.000.000}{x-3}$

Ingat kembali konsep keuntungan pada materi aritmatika sosial di SMP.

Untung = Harga penjualan – Biaya perakitan

$$500.000 = \frac{36.000.000}{x-3} - \frac{37.500.000}{x}$$

Bantu siswa mengingat kembali cara memfaktorkan untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat yang sudah dipelajari di SMP. Ajukan pertanyaan kepada siswa, mengapa nilai x = -8 tidak berlaku. Diharapkan siswa menjawab bahwa x harus bernilai positif sebab x menyatakan kecepatan perahu bergerak.

Motivasi siswa dengan menunjukkan kebergunaan matematika dalam memecahkan Masalah 7.4 tentang upah kerja tukang rakit komputer. Arahkan siswa memahami masalah dengan menuliskan apa yang diketahui dan ditanyakan pada masalah.

Bantu siswa menggunakan konsep keuntungan untuk menemukan model matematika berupa persamaan kuadrat dan menentukan nilai x menyatakan banyak komputer yang dirakit dalam waktu satu minggu.

Meminta siswa mengecek kembali kebenaran langkah-langkah pemecahan Masalah 7.1, 7.2, 7.3, dan 7.4. Selanjutnya siswa diarahkan menemukan beberapa model matematika berupa spersamaan kuadrat. Diharapkan siswa menemukan empat contoh model persamaan kuadrat seperti tertera di samping

$$1 = \frac{72}{x-3} - \frac{75}{x} \qquad \text{(sama-sama dibagi 500.000)}$$

$x(x - 3) = 72x - 75(x - 3)$

$x^2 - 3x \quad = 72x - 75x + 225$

$x^2 - 3x - 72x + 75x - 225 = 0$

$x^2 - 225 = 0$

$(x - 15)(x + 15) = 0$

$x = 15$ atau $x = -15$

$x = -15$ tidak mungkin, sehingga x yang mungkin adalah $x = 15$. Mengapa?

Jadi, banyak komputer yang dirakit dalam waktu satu minggu sebanyak 15 unit.

- Temukan persamaan kuadrat pada langkah pemecahan Masalah 7.1, 7.2, 7.3, dan 7.4
  - $x^2 - 2x + 1 = 0$
  - $z^2 + 4z - 45 = 0$
  - $3z^2 + 2z - 85 = 0$
  - $x^2 - 64 = 0$
  - $x^2 - 225 = 0$
- Tuliskan ciri-ciri persamaan kuadrat secara individual dan diskusikan dengan teman secara klasikal.

Memotivasi siswa menuliskan ciri-ciri persamaan kuadrat secara individual dan mendiskusikan hasilnya secara kelompok. Diharapkan siswa menuliskan ciri-ciri persamaan kuadrat seperti tertera pada buku siswa di samping.

Ciri-ciri persamaan kuadrat.

- Sebuah persamaan
- Pangkat tertinggi variabelnya adalah 2 dan pangkat terendah adalah 0
- Koefisien variabelnya adalah bilangan real
- Koefisien variabel berpangkat 2 tidak sama dengan nol
- Koefisien variabel berpangkat 1 dan 0 dapat bernilai 0.

Berdasarkan ciri-ciri persamaan kuadrat di atas, coba kamu tuliskan pengertian persamaan kuadrat dengan kata-katamu sendiri dan diskusikan hasilnya dengan temanmu secara klasikal. Dari hasil secara klasikal tetapkan definisi berikut.

Definisi 7.1

Persamaan kuadrat dalam x adalah suatu persamaan berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, dan c bilangan real dan $a \neq 0$.

Keterangan: x adalah variabel atau peubah
a adalah koefisien x^2
b adalah koefisien x
c adalah konstanta persamaan

Contoh 7.1

Persamaan linear satu variabel $2x + 5 = 0$ bukan persamaan kuadrat sebab persamaan $2x + 5 = 0$ dapat dibentuk menjadi persamaan $0x^2 + 2x + 5 = 0$, tetapi koefisien x^2 adalah nol. Hal ini menunjukkan bahwa persamaan $2x + 5 = 0$ tidak memenuhi syarat Definisi 7.1, sebab koefisien x^2 adalah 0.

Contoh 7.2

Sebuah bola bergerak dari ketinggian h m. Ketinggian bola dari tanah untuk setiap detiknya ditentukan fungsi waktu $h(t) = 20t - 5t^2$. Saat bola tiba di atas tanah, apa yang kamu temukan?

Alternatif Penyelesaian

Saat bola tiba di atas tanah, $h(t) = 0$.
$h(t) = 0 \Rightarrow h(t) = 20t - 5t^2 = 0$.
Persamaan $20t - 5t^2 = 0$ termasuk persamaan kuadrat sebab persamaan $20t - 5t^2 = 0$ dapat ditulis menjadi $-5t^2 + 20t + 0 = 0$, dengan koefisien $a = -5 \neq 0$, $b = 20$ dan

Meminta siswa menuliskan pengertian persamaan kuadrat dengan kata-katanya sendiri dan beberapa siswa diminta untuk menyajikan hasil kerjanya di depan kelas. Memberi kesempatan kepada siswa untuk saling berdebat untuk merumuskan pengertian persamaan kuadrat yang berlaku secara umum.

Untuk lebih memahami definisi di atas, ajukan contoh dan bukan contoh yang ada pada buku siswa. Minta siswa memberikan alasan, apakah persamaan yang diberikan termasuk contoh atau bukan contoh persamaan kuadrat dan cermati pemahaman siswa melalui alasan-alasan yang diberikan.

Latih siswa menerapkan konsep dan aturan persamaan kuadrat dengan menyelesaikan masalah aplikasi persamaan kuadrat dalam gerakan bola.

$c = 0$. Berdasarkan Definisi 7.1 persamaan $20t - 5t^2 = 0$ merupakan persamaan kuadrat dengan satu variabel, yaitu t.

Contoh 7.3

Persamaan $x^2 + y^2 - 2x + 5 = 0$, bukan persamaan kuadrat satu variabel sebab persamaan tersebut memuat dua variabel, yaitu x dan y.

Latihan 7.2

Di depan sebuah sekolah akan dibangun lapangan bola basket. Tanah kosong yang tersedia berukuran 60 m × 30 m. Karena dana terbatas, maka luas lapangan yang direncanakan adalah 1000 m^2. Untuk memperoleh luas yang diinginkan, ukuran panjang tanah dikurangi x m dan ukuran lebar dikurangi x m. Dapatkah kamu menemukan sebuah persamaan kuadrat dari masalah ini?

Berikan soal-soal uji kompetensi ini sebagai tugas tambahan. Tujuan uji ini adalah untuk mengetahui pemahaman siswa tentang konsep sistem persamaan linear dua peubah. Gunakan rubrik penilaian tugas yang tersedia pada akhir buku ini.

Uji Kompetensi 7.1

1. Apakah persamaan yang diberikan merupakan persamaan kuadrat? Berikan alasanmu!
   a. $x^2y = 0,\ y \in R, y \neq 0$.
   b. $x + \dfrac{1}{x} = 0,\ x \neq 0$.
2. Robert berangkat ke sekolah meng–enderai sepeda. Jarak sekolah dari rumahnya 12 km. Robert berangkat dengan kecepatan awal sepeda bergerak 7 km/jam. Karena Robert semakin lelah, kecepatan

sepedanya mengalami perlambatan 2 km/jam. Berapa lama waktu yang digunakan Robert sampai di sekolah.

3. Pada sebuah kerucut lingkaran tegak diketahui bahwa: penambahan volume karena jari-jarinya bertambah sepanjang 24 cm sama dengan penambahan volume ka-rena tingginya bertambah 24 cm. Jika tinggi semula kerucut 3 cm, berapakah jari-jari kerucut semula ?

4. Dua buah jenis printer komputer akan digunakan untuk mencetak satu set buku. Jenis printer pertama, $\frac{1}{2}$ jam lebih cepat dari jenis printer kedua untuk menyelesaikan cetakan satu set buku. Jika kedua jenis printer digunakan sekaligus, maka waktu yang digunakan untuk mencetak satu set buku adalah 4 jam. Berapa waktu yang dibutuhkan printer jenis kedua untuk mencetak satu set buku.

5. Harga beli sejumlah produk adalah Rp 18.000.000,-. Produk dijual dengan sisa 3 unit dengan hasil penjualan Rp 21.600.000,-. Jika harga setiap produk yang dibeli adalah Rp 600,- lebih murah dari haruga jualnya, temukan bentuk persamaan kuadrat dari permasalahan tersebut.

6. Sejumlah investor akan menanamkan modalnya dalam jumlah yang sama untuk membuka usaha di suatu daerah. Investasi yang akan ditanamkan sebesar Rp 19,5 miliar. Pada saat usaha akan dimulai, ada 4 investor lagi yang akan ikut bergabung. Jika keempat orang itu ikut bergabung, maka masing-masing akan membayar Rp 1,55 miliar kurangnya dari yang telah mereka bayar. Tentukan jumlah investor mula-mula yang berencana akan menanamkan modalnya.

7. Jika $a^2 + a - 3 = 0$, tentukan nilai terbesar yang mungkin $a^3 + 4a^2 + 9988$.

Tugas proyek diberikan untuk melatih siswa merancang masalah dari situasi nyata dan mampu memecahkannya. Tugas projek ini sebagai tugas kelompok untuk menginformasikan kepada siswa bahwa belajar tentang persamaan kuadrat sangat diperlukan dalam perkembangan ilmu dan dalam menyelesaikan permasalahan kehidupan. Gunakan rubrik penilaian projek untuk menilai hasil kerja siswa dan rubrik telah tersedia di bagian akhir buku guru ini.

Motivasi siswa untuk membangun dan menemukan cara menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan berbagai cara, antara lain, cara memfaktorkan, melengkapkan kuadrat sempurna, dan rumus ABC.

8. Jika $a^3 + b^3 = 637$ dan $a + b = 13$, tentukan nilai $(a–b)^2$.

9. Faktorkan: $4kn + 6ak + 6an + 9a^2$.

10. Jika $a + b + c = 0$ dengan $a, b, c \neq 0$, tentukan nilai

$$\left[a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^2$$

Projek

Rancanglah minimal dua masalah nyata di lingkungan sekitarmu yang terkait dengan persamaan kuadrat dan berilah penyelesaian kedua masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

b. Menentukan Akar-Akar Persamaan Kuadrat

Ada beberapa cara (aturan) menentukan akar-akar (penyelesaian) persamaan kuadrat. Aturan tersebut seluruhnya diturunkan dari konsep (Definisi-7.1) yang telah kita temukan. Aturan tersebut antara lain, cara memfaktorkan, melengkapkan kuadrat sempurna, dan rumus *ABC*. Ketiga aturan ini memiliki kelebihan dan kelemahan terkait dengan efisiensi waktu yang digunakan untuk menentukan akar-akar sebuah persamaan kuadrat. Agar lebih terarah pembahasan kita, mari kita coba memecahkan masalah-masalah yang diberikan.

1) Cara Pemfaktoran

Latihan 7.3

Temukan pola atau aturan memfaktorkan berdasarkan konsep persamaan kuadrat untuk menentukan akar-akarnya (harga-harga x yang memenuhi persamaan). Selesaikanlah masalah di atas, agar pekerjaan kamu lebih efektif pahamilah beberapa pertanyaan berikut!

a) Apa yang dimaksud dengan memfaktorkan? Berdasarkan Definisi-7.1, kita memiliki bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$. Nilai x dapat kita tentukan dengan cara pemfaktoran. Cara pemfaktoran dapat kita lakukan dengan memperhatikan koefisien x^2, x, dan konstanta c.

b) Ada berapa kasus yang dapat kamu pilah agar pemfaktoran persamaan kuadrat dapat terwakili seluruhnya.

Arahkan siswa mengerjakan Latihan 7.3. Minta siswa menemukan pola, bagaimana cara memfaktorkan sebuah persamaan kuadrat untuk menentukan nilai-nilai x yang memenuhi dan tanyakan apa kelemahan cara pemfaktoran tersebut. Sebelum melakukan proses kerja membangun algoritma pemaktoran, ajukan pertanyaan yang tertera di samping, untuk dijawab oleh siswa. Hasil kerja siswa yang diharapkan, akan disajikan secara lengkap di samping.

- Jika $a = 1$

$a = 1 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow x^2 + bx + c = 0$..(1)

Perhatikan bentuk $(x + m)(x + n) = 0$

$\Rightarrow (x^2 + nx) + (mx + m \times n) = 0$

$\Rightarrow x^2 + (m + n)x + m \times n = 0$......................(2)

Berdasarkan persamaan (1) dan (2) diperoleh

$x^2 + bx + c = x^2 + (m + n)x + m \times n = 0$

Menggunakan sifat persamaan, maka diperoleh $m + n = b$ dan $m \times n = c$.

$\therefore\ ax^2 + bx + c = (x + m)(x + n) = 0$, untuk $a = 1$, $m + n = b$ dan $m \times n = c$.

Nilai-nilai x yang memenuhi persamaan $ax^2 + bx + c = (x + m)(x + n) = 0$ adalah $x = -m$ atau $x = -n$.

Beri bantuan kepada siswa menganalisis koefisien persamaan kuadrat ketika $a = 1$, $a > 1$ atau $a < 1$. Tetapi $a \neq 0$. Ingat sifat persamaan pada Bab II (Sifat 2.1), gunakan dalam menurunkan rumus umum penentuan akar-akar persamaan kuadrat dengan cara pemfaktoran.

Perhatikan persamaan kuadrat yang kita peroleh dari beberapa permasalahan di atas yang memiliki koefisien x^2, $a = 1$, kita telah menerapkan cara pemfaktoran ini.

• Jika $a < 1$ atau $a > 1$

Berdasarkan Definisi-1, bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, dan c bilangan riel dan $a \neq 0$.

$a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a} \neq 0$

$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(a^2x^2 + abx + ac) = 0$...............(1)

Perhatikan bentuk $((ax + m)(ax + n)) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}((ax + n)ax + m(ax + n)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}((a^2x^2 + anx) + (amx + m \times n)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}(\ a^2x^2 + a(m + n)x + m \times n) = 0 \text{.......(2)}$$

Berdasarkan Persamaan-1 dan 2 diperoleh,
$(a^2x^2 + abx + ac) = (\ a^2x^2 + a(m + n)x + m \times n) = 0$
Menggunakan sifat persamaan maka diperoleh $m + n = b$ dan $m \times n = ac$.

$\therefore\ ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(ax + m)(ax + n) = 0$, untuk $a \neq 1$, $m + n = b$ dan $m \times n = ac$

Nilai x yang memenuhi persamaan $ax^2 + bx + c = (ax + m)(ax + n) = 0$ adalah $x_1 = -\frac{m}{a}$ atau $x_2 = -\frac{n}{a}$.

Contoh 7.4

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $3z^2 + 2z - 85 = 0$ dengan cara pemfaktoran.

Alternatif Penyelesaian

$$
\begin{aligned}
3z^2 + 2z - 85 &= \frac{1}{3}\left(9z^2 + 6z - 225\right) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{3}\left(9z^2 + 3(17-15)z + (17\times(15))\right) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{3}\left((9z^2 + 51z) - (45z + 255)\right) = 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{3}\left((3z+17)3z - 15(3z+17)\right) = 0 \\
&\Rightarrow (3z+17)(3z-15) = 0 \text{ atau } (3z+17)(z-5) = 0
\end{aligned}
$$

Harga-harga z yang memenuhi adalah $z = \frac{-17}{3}$ atau $z = 5$, sehingga himpunan penye-

lesaian persamaan $3z^2 + 2z - 85 = 0$ adalah $\left\{\frac{-17}{3}, 5\right\}$.

Berikan contoh untuk melatih siswa menggunakan cara pemfaktoran dalam menentukan akar-akar persamaan kuadrat, seperti Contoh 7.4. Bantu siswa melakukan proses pemfaktoran persamaan kuadrat yang diketahui dalam soal. Meminta siswa menguji nilai z yang diperoleh ke persamaan kuadrat yang diberikan.

Ingat bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$.

$m = 17$

$n = -15$

$m + n = 2$

$m \times n = -255$

2) Cara Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Untuk menemukan aturan penentuan akar-akar persamaan kuadrat dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna cermati beberapa pertanyaan berikut.

a) Apa yang dimaksud melengkapkan kuadrat sempurna?

b) Apakah kamu masih ingat pelajaran di SMP bahwa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$?

c) Dapatkah kamu membentuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dalam bentuk $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$?

d) Apakah seluruh bentuk persamaan kuadrat dapat ditentukan akarnya dengan teknik kuadrat sempurna?

Minta siswa menemukan pola, bagaimana cara melengkapkan sebuah persamaan kuadrat untuk menentukan nilai-nilai x yang memenuhi dan tanyakan apa kelemahan cara tersebut.

Bantu siswa memodifikasi bentuk umum persamaan kuadrat membentuk kuadrat sempurnauntuk *kasus a = 1.Gunakan sifat perpangkatan dan penarikan akar (Sifat 1) yang ada pada Bab I dan sifat persamaan pada Bab II untuk menemukan rumus penentuan nilai x sebagai akar persamaan kuadrat.*

Berdasarkan Definisi-7.1, kita memiliki bentuk umum persamaan kuadrat

$ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$. Untuk $a = 1$,

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + bx + c - c = 0 - c$$

$$\Leftrightarrow x^2 + bx + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2}b)^2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2}b) = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c}\text{, jika } \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c}\text{, jika } \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c \geq 0$$

Contoh 7.5

Beri kesempatan kepada siswa untuk lebih memahami cara melengkapkan kuadrat dalam menentukan akar-akar persamaan kuadrat melalui Contoh 7.5. Bantu siswa melakukan manipulasi aljabar dalam melengkapkan kuadrat sempurna.

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - x - 6 = 0$.

Alternatif Penyelesaian

$x^2 - x - 6 = 0$

$x^2 - x = 6$

$$x^2 - x + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 6 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x^2 - x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$x^2 - x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm\frac{5}{2}$$

$$x = \pm\frac{5}{2} + \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

$$x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -2$$

Jadi akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - x - 6 = 0$ adalah $x_1 = 3$ dan $x_2 = -2$.

3) Menggunakan Rumus *ABC*

Masih ingatkah kamu rumus *abc* waktu belajar persamaan kuadrat di SMP? Darimana rumus itu diturunkan? Bagaimana cara menemukannya?. Untuk itu perhatikan beberapa pertanyaan berikut.

a) Dapatkah kamu membagi persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan koefisien a? mengapa?
b) Setelah kamu membagi persamaan dengan koefisien a, dapatkah kamu melakukan manipulasi aljabar untuk mendapatkan bentuk kuadrat sempurna?
c) Bagaimana memanipulasi dan menyederhanakan persamaan agar diperoleh nilai x_1 dan x_2?
d) Akar persamaan kuadrat adalah dua bilangan, dapatkah kamu membedakan jenis akar-akar itu dari segi jenis bilangannya dan nilainya? Apa yang membedakan akar-akar tersebut?
e) Temukanlah jenis-jenis akar-akar persamaan kuadrat dilihat dari nilai diskriminan.

Minta siswa menemukan rumus abc, bagaimana cara menentukan nilai-nilai x yang memenuhi persamaan dengan rumus abc. Ingatkan kembali sifat persamaan pada Bab II yang berguna dalam memodifikasi bentuk umum persamaan kuadrat ke bentuk kuadrat sempurna. Meminta siswa merenungkan pertanyaan di samping agar lebih memahami langkah-langkah penurunan rumus abc.

Minta salah satu siswa endemostrasikan penurunan rumus abc. Bantu siswa melakukan manipulasi aljabar. Bagi $ax^2 + bx + c = 0$ dengan a, $a \neq 0$. Selanjutnya gunakan sifat persamaan dengan cara menambah atau mengurangi ruas kiri dan kanan dengan suatu bilangan tertentu pada persamaan $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Gunakan sifat persamaan (Sifat-1) pada Bab II untuk memodifikasi bentuk $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a}) = \pm\sqrt{\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Berdasarkan hasil penurunan rumus abc, minta siswa memahami sifat-1 di samping, dengan mengajukan beberapa pertanyaan. Apakah rumus abc selalu dapat (efektif) digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat?

Sifat-1

Akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, dan c bilangan real dan $a \neq 0$, adalah

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Latih siswa berpikir analitis dan kreatif dengan cara menurunkan rumus hasil jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat, menggunakan nilai x_1 dan x_2 yang diperoleh dari rumus abc.

c. Menemukan Rumus Untuk Menentukan Jumlah dan Hasil Kali Akar-akar Persamaan Kuadrat

Akar-akar sebuah persamaan kuadrat dapat dijumlahkan atau dikalikan. Bagaimana menentukan hasil jumlah dan hasil kali akar-akar dan kaitannya dengan koefisien-koefisien persamaan kuadrat tersebut? Untuk itu selesaikanlah masalah berikut.

Temukan aturan (rumus) menentukan jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat!

Selesaikanlah masalah di atas, lakukan tugas bersama temanmu satu kelompok. Beberapa pertanyaan yang kamu harus cermati untuk menemukan rumus hasil jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat antara lain:

a) Dapatkah kamu menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan aturan yang sudah kamu miliki? Aturan mana yang kamu pilih dari tiga cara di atas terkait dengan menemukan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat?
b) Bagaimana syarat menjumlahkan dan mengalikan dua akar?
c) Dapatkah kamu menyatakan v jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat dalam koefisien-koefisien persamaan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan rumus ABC di atas, akar-akar persamaan kuadrat adalah

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ dan } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

a. Jumlah Akar-akar Persamaan Kuadrat

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

b. Hasil Kali Akar-akar Persamaan Kuadrat

$$x_1 \,.\, x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

Meminta siswa mencermati rumus hasil jumlah dan hasil kali yang ditetapkan pada Sifat-2 di samping. Uji pemahaman siswa dengan mengajukan beberapa soal yang diselesaikan dengan sifat tersebut.

Berdasarkan kedua rumus di atas, disimpulkan

Sifat-2

Jika persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$ memiliki akar-akar x_1 dan x_2, maka $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ dan $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

- Suruh siswa mencermati nilai diskriminan dan menentukan sifat-sifat akar sebuah persamaan kuadrat. Diharapkan siswa dapat menemukan hal berikut.

Sifat akar-akar persamaan kuadrat dapat ditinjau dari nilai diskriminan, yaitu $D = b^2 - 4ac$. Sifat akar-akar tersebut adalah.

1) jika $D > 0$, maka persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ memiliki dua akar real yang berbeda. Misalkan kedua akar tersebut x_1 dan x_2, maka $x_1 \neq x_2$.

2) jika $D = 0$, maka persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ memiliki dua akar real yang sama (kembar). Misalkan kedua akar tersebut x_1 dan x_2, maka $x_1 = x_2$.

$$D = 0 \quad \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3) jika $D < 0$, maka persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ memiliki dua akar kompleks (tidak real) yang berbeda. Misalkan kedua akar tersebut x_1 dan x_2, maka $x_1 \neq x_2$.

d. Persamaan Kuadrat Dengan Akar-akar x_1 dan x_2

Jika diketahui akar-akar persamaan kuadrat x_1 dan x_2, maka kita dapat menemukan persamaan kuadratnya. Sehingga permasalahan kita saat ini adalah sebagai berikut.

> Temukan aturan untuk menentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya x_1 dan x_2.
> Selesaikanlah masalah di atas, lakukan bersama temanmu satu kelompok. Agar pekerjaan kamu lebih efektif pahamilah beberapa pertanyaan berikut
> a) Bagaimana kamu akan mengkonstruk sebuah persamaan kuadrat dengan akar-akar yang diberikan?
> b) Apa keterkaitan rumus hasil jumlah dan rumus hasil kali akar-akar yang diberikan?

Jika diketahui akar-akar persamaan kuadrat x_1 dan x_2 maka kita dapat menemukan persamaan kuadratnya. Berdasarkan Definisi-1, kita memiliki bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{c}{a} = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \times x_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - x_1)x - x_2\,(x - x_1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0
\end{aligned}
$$

Sifat-3

Persamaan kuadrat dengan akar-akar x_1 dan x_2 adalah $(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Menjelaskan kepada siswa menemukan persamaan kuadrat, jika diketahui akar-akarnya dengan memanfaatkan rumus hasil jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan yang diinginkan. Selanjutnya uji pemahaman siswa terhadap sifat yang diturunkan dengan mengajukan beberapa contoh soal. Misalnya, jika diketahui x_1 = -3 dan x_2 = 2 adalah akar-akar persamaan kuadrat. Tentukanlah persamaannya.

Bagaimana akar-akar dari persamaan koordinat berikut?

$$a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = 0\ ,\ \alpha \in 0$$

Apa kesimpulanmu?

Berikan soal-soal pada uji kompetensi sebagai tugas di rumah kepada siswa yang bertujuan untuk menngukur kemampuan siswa menguasai materi persamaan kuadrat.

Uji Kompetensi 7.2

1. Tentukanlah akar-akar persamaan kuadrat berikut.
   a. $x^2 - 12x + 20 = 0$
   b. $3x^2 + 10x + 36 = 0$
   c. $2x^2 + 7x = 5$

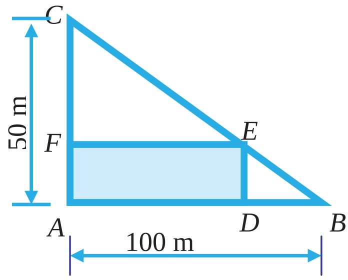
2. Persamaan $(m - 1)x^2 + 4x + 2m = 0$ mempunyai akar-akar real. Tentukan nilai m yang memenuhi!

3. Jika α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, tunjukkan bahwa
   a. $\alpha^4 + \beta^4 = \dfrac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$
   b. $(\alpha - \beta)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{a^2}$

4. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 2x + 5 = 0$ adalah p dan q. Temukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya $(p + 2)$ dan $(q + 2)$!

5. Dua jenis mesin penggiling padi digunakan untuk menggiling satu peti padi. Untuk menggiling satu peti padi, mesin jenis pertama lebih cepat $\frac{1}{2}$ jam dari mesin jenis kedua. Sementara jika kedua mesin digunakan sekaligus, dapat menggiling satu peti padi selama 6 jam.
   a. Berapa jam waktu yang digunakan mesin jenis pertama untuk menggiling satu peti padi.
   b. Berapa jam waktu yang digunakan mesin jenis kedua untuk menggiling satu peti padi.

6. Jika $a^2 + a - 3 = 0$, tentukan nilai terbesar yang mungkin
$a^3 + 4a^2 + 9988$.
7. Pada sebidang tanah akan didirikan sebuah sekolah SD. Bentuk tanah dan ukuran tanah dapat dilihat pada gambar.



8. Jika $\dfrac{x}{x^2 + 3x + 1} = a$, tentukan nilai $\dfrac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 1}$.
9. Jika $\sqrt{2009x^2 - 11x + 144} + \sqrt{2009x^2 - 11x + 96}$ $= 16$,tentukan nilai yang mungkin untuk $\sqrt{2009x^2 - 11x + 144} - \sqrt{2009x^2 - 11x + 96}$.
10. Faktorkan : $3x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 6y - 16$.

Projek

Himpunlah informasi penggunaan sifat-sifat dan aturan yang berlaku pada persamaan kuadrat di bidang ekonomi, fisika, dan teknik bangunan. Kamu dapat mencari informasi tersebut dengan menggunakan internet, buku-buku dan sumber lain yang relevan. Temukan berbagai masalah dan pemecahannya menggunakan aturan dan sifat-sifat akar persamaan kuadrat. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas!

Tugas proyek diberikan sebagai tugas individu maupun kelompok untuk menginformasikan kepada siswa bahwa konsep persamaan kuadrat sangat diperlukan dalam perkembangan ilmu serta menyelesaikan permasalahan kehidupan

2. FUNGSI KUADRAT

a. Menemukan Konsep Fungsi Kuadrat

Untuk menemukan konsep fungsi kuadrat, ajukan pada siswa beberapa masalah secara berkelanjutan untuk dipecahkan. Berikan kesempatan pada siswa lebih dahulu berusaha memikirkan, bersusah payah mencari ide-ide, berdiskusi, mencari Pemecahan masalah di dalam kelompok. Dari beberapa model matematika berupa fungsi kuadrat, minta siswa secara individu maupun kelompok berdiskusi menuliskan ciri-ciri fungsi kuadrat dan berdasarkan ciri-ciri tersebut minta siswa menuliskan konsep fungsi kuadrat dengan kata-kata nya sendiri.

Arahkan siswa memahami masalah dan menginterpretasikan masalah dalam gambar. Sebelum siswa melakukan pemecahan masalah, minta siswa menjawab beberapa pertanyaan di samping.

Fungsi kuadrat sering kita temukan dalam permasalahan kehidupan nyata yang menyatu pada fakta dan lingkungan budaya kita. Konsep fungsi kuadrat dapat ditemukan di dalam pemecahan permasalahan yang kita hadapi. Untuk itu perhatikan dengan cermat permasalahan-permasalahan yang diberikan.

Masalah-7.5

Untuk pengadaan air bersih bagi masyarakat desa, anak rantau dari desa tersebut sepakat membangun tali air dari sebuah sungai di kaki pegunungan ke rumah-rumah penduduk. Sebuah pipa besi yang panjangnya *s* dan berdiameter d ditanam pada kedalaman 1 m di bawah permukaan air sungai sebagai saluran air. Tentukanlah debit air yang mengalir dari pipa tersebut. (Gravitasi bumi adalah 10 m/det^2).

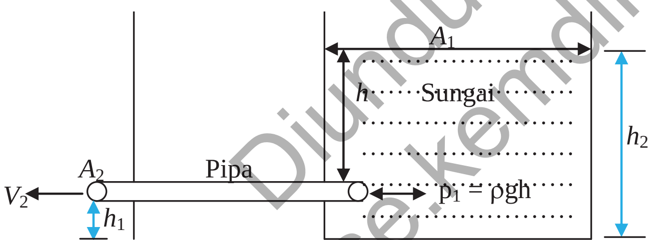
Gambar 7.6 Sumber Air Bersih

Pahamilah masalah di atas, artinya kamu tuliskan hal apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan interpretasikan masalah dalam Gambar 7.6. Gunakan variabel untuk menyatakan masalah dalam matematika. Ingat konsep dan aturan-aturan apa saja yang terkait dengan masalah yang dihadapi sehingga masalah tersebut dapat diselesaikan.

Beberapa pertanyaan yang harus kamu pahami untuk dapat memecahkan masalah dengan baik antara lain sebagai berikut.

1) Apa yang terjadi jika luas permukaan sungai jauh lebih luas dari luas permukaan pipa?
2) Bagaimana tekanan air pada pangkal pipa di ujung pipa serta aturan apa yang terkait dengan keadaan tersebut?
3) Dapatkah kamu menentukan kecepatan air yang keluar dari mulut pipa menggunakan aturan pada pertanyaan 2)?
4) Dapatkah kamu menentukan debit air yang mengalir dari pipa dengan mengingat rumus debit zat cair, saat kamu belajar di SD?
5) Apa keterkaitan luas penampang pipa dengan kecepatan air mengalir?

Alternatif Penyelesaian



Gambar 7.7 Ilustrasi Posisi Pipa di Dalam Sungai

Misalkan:

p_1 adalah tekanan air pada mulut pipa

p_2 adalah tekanan air pada ujung pipa

h adalah kedalaman pipa di bawah permukaan air sungai = 1 m

h_1 adalah ketinggian pipa dari permukaan tanah

h_2 adalah ketinggian permukaan air sungai

V_1 adalah kecepatan air sungai mengalir

V_2 adalah kecepatan air mengalir dari ujung pipa

Meminta siswa mengamati Gambar 7.6 tentang sumber air bersih. Selanjutnya menyajikan masalah dalam gambar seperti disajikan pada Gambar 7.7. Beri kesempatan kepada siswa untuk menganalisis posisi pipa paralon di bawah permukaan sungai dan mengajukan beberapa pertanyaan terkait permasalahan. Selanjutnya meminta siswa menuliskan apa yang diketahui dan yang ditanyakan, serta memilih variabel untuk menemukan model pemecahan masalah.

A_1 adalah luas penampang permukaan air sungai

A_2 adalah luas penampang permukaan ujung pipa

g adalah gravitasi bumi = 10 m/det^2.

- Apa yang terjadi jika A_1 jauh lebih dari A_2. Diharapkan jawaban siswa sebagai berikut.

Bantu siswa menemukan hubungan luas penampang paralon dan penampang permukaan air sungai. Membantu siswa mengingat rumus fisika yang dibutuhkan terkait kecepatan fluida bergerak, seperti yang disajikan pada buku siswa di samping.

Jika A_1 lebih besar dan semakin besar dari A_2 (A_1 >>> A_2), maka volume V_1 lebih kecil dan semakin kecil dari V_2 (V_1 <<< V_2), akibatnya V_1 menuju 0 (nol).

Karena tekanan air pada pangkal pipa dan diujung pipa sama maka berdasarkan gambar di atas diperoleh persamaan

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

$$\rho g(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}\rho V_2^2 \quad \text{(karena } V_1^2 \text{ menuju nol)}$$

$$gh = \frac{1}{2}V_2^2 \quad \text{(karena } h = h_1 - h_2\text{)}$$

$$2gh = V_2^2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \sqrt{2gh}$$

$\therefore$ Kecepatan air mengalir dari pipa adalah $V = \sqrt{2gh}$

Debit air yang mengalir dari sebuah pipa adalah volume air yang mengalir persatuan waktu.

$$q = \frac{volume}{waktu}$$

$$= \frac{A \times S}{t}$$

$$= A \times V.$$

$q = (\frac{1}{4}\pi\, d^2)(\sqrt{2gh})$ (penampang pipa berbentuk lingkaran, luas penampang pipa adalah A) $= \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi\, d^2$, ($d$ adalah diameter pipa)

Debit air yang mengalir dari pipa dinyatakan dalam fungsi berikut

$$\therefore\ q(d) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)d^2,\ d \in R,\ d \geq 0$$

Membantu siswa mengkoordinasi pengetahuan dan keterampilannya untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan, struktur-struktur yang belum diketahui. Mengajak siswa menganalisis, apa yang terjadi jika A_1 jauh lebih luas dari A_2.

Sekarang perhatikan contoh lainnya, kain tenun yang berasal dari Sumatera Barat atau yang lebih dikenal dengan songket Minangkabau merupakan suatu hasil karya tradional yang perlu dipertahankan. Kekayaan motifnya ternyata juga memiliki arti dan nilai kebersamaan tersendiri. Adapun jenis-jenis motif dari kain songket Minangkabau tersebut diantaranya adalah motif Pucuk Rabuang, motif Itiak Pulang Patang, motif Kaluak Paku, dan yang lainnya. Motif Kaluak Paku misalnya memiliki makna bahwa kita sebagai manusia haruslah mawas diri sejak kecil dan perlu belajar sejak dini mulai dari keluarga untuk menjalankan kehidupan di masyarakat agar kita menjadi lebih kuat dan tidak mudah terpengaruh hal negatif. Makna lainnya, yaitu seorang pemimpin harus mampu menjadi teladan bagi masyarakat yang ada disekitarnya.

Ukuran panjang dan lebar kain songket cukup bervariasi. Sekarang mari kita perhatikan salah satu jenis kain songket, yaitu kain sonket motif Kaluak Paku, dalam hal ini kita jadikan bahan inspirasi mengangkat masalah matematika terkait fungsi kuadrat.

Motivasi siswa belajar matematika, dengan menunjukkan kebermanfaatan matematika dalam pemecahan masalah nyata, seperti Masalah 7.6 di samping. Arahkan siswa mengamati masalah dan menemukan informasi dari masalah yang diajukan. Beri kesempatan kepada siswa mencoba menganalisis dan menggali berbagai pertanyaan terkait penyelesaian masalah tersebut.

Masalah-7.6

Sebuah kain songket memiliki ukuran panjang $\frac{9}{4}$ m dan lebar $\frac{3}{4}$ m. Di bagian tengah terdapat 5 bagian daerah yang luas seluruhnya $\frac{451}{400}$ m. Tentukan ukuran bagian kain songket yang berwarna merah dan daerah berambu benang.

Gambar 7.8 Kain Songket

Renungkan pertanyaan yang diajukan pada Masalah 7.6, coba ingat kembali konsep fungsi yang sudah dipelajari sebelumnya di kelas X. Katakan pada siswa, sebelum kamu memecahkan masalah, koordinasi pengetahuan dan keterampilan yang kamu su-

Pahamilah masalah di atas, artinya kamu tuliskan hal apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan interpretasikan dalam gambar. Gunakan variabel untuk menyatakan masalah dalam matematika. Ingat konsep dan aturan-aturan apa saja yang terkait dengan masalah yang dihadapi sehingga dapat terpecahkan.

Cermatilah beberapa pertanyaan yang mengarahkan kamu bekerja lebih efektif.

1) Berbentuk apakah daerah bagian dalam kain songket. Bagaimana kamu menentukan luas daerah tersebut?
2) Apakah ada keterkaitan konsep dan prinsip persamaan kuadrat untuk menentukan ukuran daerah bagian dalam kain songket?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan

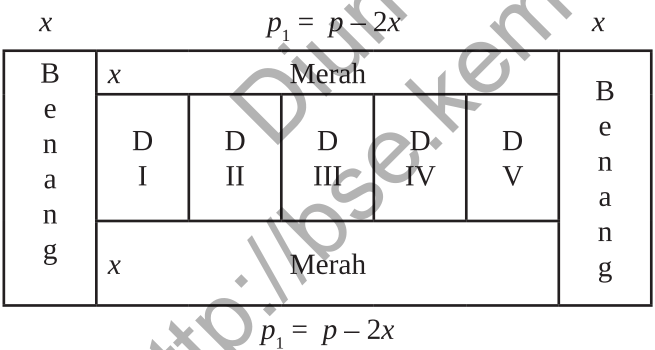
Panjang songket adalah $p = \frac{9}{4}m$

Lebar songket adalah $l = \frac{3}{4}m$

Lebar daerah berwarna merah dan berambu benang adalah x m.

Akibatnya panjang dan lebar daerah bagian dalam masing-masing $(p – 2x)$ m dan $(l – 2x)$ m

Secara keseluruhan, bagian-bagian songket dapat digambarkan sebagai berikut



Karena daerah bagian dalam songket berbentuk persegipanjang, maka luas bagian dalam songket adalah

$L_1 = (p – 2x)(l – 2x)$

$L_1(x) = (\frac{9}{4} – 2x)(\frac{3}{4} – 2x)$

$L_1(x) = \frac{27}{16} - (\frac{18}{4} + \frac{6}{4})x + 4x^2$

dah miliki untuk menemukan aturan-aturan, hubungan-hubungan dan struktur-struktur yang belum diketahui. Pahamilah Masalah-7.6 dan meminta siswa menuliskan hal apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan interpretasikan masalah dalam gambar. Meminta siswa memikirkan jawaban pertanyaan arahan yang tertera di samping.

Ingatkan siswa rumus luas persegipanjang yang akan digunakan dalam menentukan luas daerah bagian-bagian dari songket. Bantu siswa menemukan model matematika berupa fungsi kuadrat dalam x dari hasil perhitungan luas daerah bagian dalam songket.

$$\therefore L_1(x) = 4x^2 - 6x + \frac{27}{16}, x \in \mathrm{R}, x \geq 0 \text{.......................(1)}$$

Pada soal diketahui luas daerah bagian dalam songket $L_1(x) = \frac{451}{400} m^2$, sehingga Persamaan-1 dapat dijadikan dalam bentuk persamaan kuadrat

Bantu siswa dalam menentukan nilai x dengan mensubtitusikan nilai fungsi kuadrat sama dengan nol. Ingatkan kembali cara pemfaktoran dan diterapkan pada persamaan $4x^2 - 6x + \frac{14}{25} = 0$ *untuk menentukan akar-akarnya.*

$$L_1(x) = \frac{451}{400} \Rightarrow L_1(x) = 4x^2 - 6x + \frac{27}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{451}{400} = 4x^2 - 6x + \frac{27}{16}$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 - 6x + \frac{675}{400} - \frac{451}{400} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 - 6x + \frac{451}{400} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2x - \frac{14}{5})(2x - \frac{1}{5}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{7}{5} \text{ atau } x = \frac{1}{10}$$

Meminta salah satu siswa menyajikan hasil kerjanya di depan kelas dan meminta siswa lain untuk membandingkan dengan hasil kerja masing-masing. Menguji pemahaman siswa atas langkah-langkah pemecahan yang telah disajikan.

Ukuran panjang dan lebar daerah songket yang berwarna merah ditentukan sebagai berikut

$$x = \frac{1}{10} \Rightarrow p_1 = p - 2x = \frac{9}{4} - \frac{1}{5} = \frac{41}{20} m$$

$$x = \frac{1}{10} \Rightarrow l_1 = l - 2x = \frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20} m$$

Ukuran panjang dan lebar daerah berambu benang adalah

$$\frac{3}{4} m \times \frac{1}{10} m$$

Untuk $x = \frac{7}{5}$ tidak berlaku sebab menghasilkan panjang p_1 dan lebar l_1 bernilai negatif.

Kenyataan hidup terkadang berbeda dengan apa yang kita harapkan. Seperti Pak Ketut yang memiliki Ijazah Sarjana Pertanian telah lama dan berulangkali melamar pekerjaan di kota Jakarta. Ternyata, ia belum beruntung memanfaatkan ijazahnya sampai saat ini. Akhirnya, ia kembali ke Pulau Dewata dan berencana membuat keramba ikan Gurami dan Udang. Tetapi, ia mendapat masalah sebagai berikut.

Masalah-7.7

Pak Ketut memiliki jaring jala sepanjang 60 m. Ia ingin membuat keramba ikan gurami dan udang. Kedua keramba ikan dibuat berdampingan, seperti tampak pada gambar berikut.

Misalkan panjang keramba y m dan lebarnya x m, serta kelilingnya keramba k m. Tentukanlah ukuran keramba agar luasnya maksimum!

Gambar 7.9 Keramba Ikan Gurami dan Udang

Coba amati gambar keramba yang diinginkan dan renungkan beberapa pertanyaan berikut.

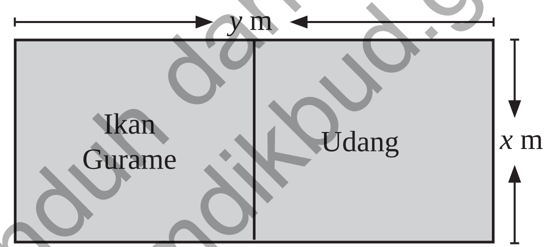
1) Bagaimana bentuk keramba yang direncanakan Pak Ketut?

Arahkan siswa mengamati Gambar 7.8 dan mencoba memecahkan Masalah 7.7 memahami masalah dan menginterpretasikan masalah dalam gambar dan memperhatikan Gambar-7.8

2) Adakah konsep dan prinsip matematika yang terkait untuk menentukan panjang keliling permukaan keramba?
3) Adakah konsep dan prinsip matematika untuk menentukan luas daerah permukaan keramba ?
4) Bagaimana menentukan ukuran panjang dan lebar permukaan keramba agar luasnya maksimum dengan jaring jala yang tersedia?

Alternatif Penyelesaian

Penampang permukaan keramba dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 7.10 Posisi Tambak

Karena panjang jaring jala yang tersedia adalah 60 m maka keliling keseluruhan permukaan keramba ikan adalah

$$K = 2y + 3x = 60 \Rightarrow 2y = 60 - 3x \Rightarrow y = 30 - \frac{3}{2}x$$

Luas keseluruhan permukaan keramba ikan adalah

L = panjang × lebar

$L = y \times x$

$$y = 30 - \frac{3}{2}x \Rightarrow L = y \times x \Rightarrow L = (30 - \frac{3}{2}x)x$$

$$\Rightarrow L = 30x - \frac{3}{2}x^2$$

Karena luas permukaan keramba bergantung pada nilai x, persamaan fungsi luas dapat dinyatakan sebagai berikut.

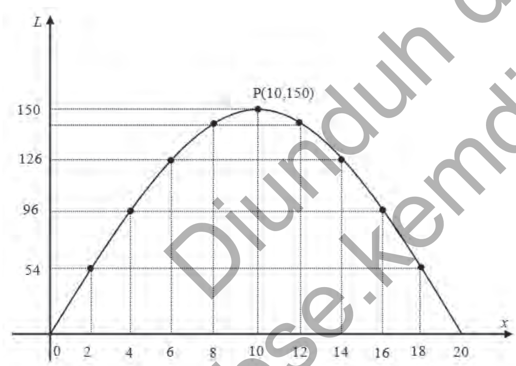
$$\therefore\ L(x) = 30x - \frac{3}{2}x^2,\ x \in R,\ x \geq 0$$

Dengan mengambil beberapa nilai x diperoleh beberapa nilai L dan disajikan pada tabel berikut

Tabel 7.1 Nilai *L* dengan *x* merupakan bilangan bulat genap positif

Nilai x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Nilai L	0	54	96	126	144	150	144	126	96	54	0

Sekarang mari kita gambarkan grafik fungsi $L(x) = 30x - x^2$ pada bidang koordinat dengan bantuan nilai-nilai x dan L yang ada pada tabel di atas.



Gambar 7.11 Grafik Fungsi Kuadrat

Minta siswa mengamati grafik fungsi kuadrat pada Gambar 7.11, mencoba menentukan unsur-unsur dari grafik fungsi, beserta sifat-sifatnya. Misalnya,
a) Tentukan titik potong terhadap sumbu x.
b) Sumbu simetri dan titik puncak parabola.
c) Grafik terbuka ke bawah

Coba cermati harga-harga x dan L di dalam Tabel 7.1 dan grafik fungsi $L(x) = 30x - \frac{3}{2}x^2,\ x \geq 0$ memiliki ciri-ciri sebagai berikut.

a) Kurva terbuka ke bawah
b) Grafik memotong sumbu-x pada dua titik yang berbeda yaitu titik (0, 0) dan titik (20, 0).
c) Grafik fungsi mencapai puncak pada titik (10, 150).

d) Garis $x = 10$ membagi dua (sama besar) daerah di bawah kurva, sehingga garis $x = 10$ dapat dikatakan sebagai sumbu simetri grafik fungsi $L(x) = 30x - \frac{3}{2}x^2$.

Menyuruh siswa menemukan fungsi kuadrat pada beberapa langkah Pemecahan masalah, berdasarkan pengetahuan yang telah dimiliki sebelumnya di SMP.

Berdasarkan grafik fungsi di atas, luas maksimum diperoleh saat lebar dan panjang permukaan keramba ikan, yaitu $x = 10$ m dan $y = 15$ m

$x = 10$ m dan $y = 30 - \frac{3}{2}x \Rightarrow y = 15$ m

Luas maksimum permukaan keramba ikan adalah $L = 150\ \text{m}^2$

Menyuruh siswa untuk menuliskan ciri-ciri dari fungsi kuadrat secara individual dan hasilnya didiskusikan secara klasikal. Diharapkan siswa menuliskan ciri-ciri fungsi kuadrat sebagai berikut.

Ciri-ciri fungsi kuadrat.

- *Sebuah fungsi*
- *Memuat sebuah variabel bebas atau peubah bebas*
- *Pangkat tertinggi variabel bebasnya adalah 2 dan pangkat terendahnya adalah 0*
- *Koefisien variabel bebas adalah bilangan real*
- *Koefisien variabel berpangkat 2 tidak sama dengan nol.*

Perhatikan kembali setiap langkah pemecahan Masalah 7.5, 7.6, dan Masalah 7.7. Masih ingatkan kamu contoh fungsi kuadrat ketika belajar di SMP. Coba temukan model-model matematika dari setiap permasalahan yang merupakan fungsi kuadrat. Kemudian coba temukan ciri-ciri dari fungsi itu dan tuliskan konsep (pengertian) fungsi kuadrat berdasarkan ciri-ciri yang kamu ditemukan, serta hasilnya diskusikan dengan temanmu.

Definisi 7.2

Fungsi kuadrat dalam x adalah suatu fungsi yang ditentukan oleh
$f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$.

Misalkan $A, B \subset R$, didefinisikan fungsi

$f : A \rightarrow B$, dengan $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$.

Dengan : x adalah variabel atau peubah
a adalah koefisien dari x^2
b adalah koefisien dari x
c adalah konstanta persamaan

$f(x)$ adalah nilai fungsi yang bergantung pada nilai variabel x.

Selanjutnya ujilah beberapa fungsi berikut, apakah merupakan fungsi kuadrat?

Latihan 7.4

Apakah fungsi yang didefinisikan berikut merupakan fungsi kuadrat?

1. Misalkan $A, B \subset R$, didefinisikan fungsi $g : A \rightarrow B$, dengan $g(x) = c, \forall x \in A, c \in B$.
   Catatan: simbol $\forall$ adalah sebuah simbol dalam logika matematika. Simbol tersebut dibaca untuk semua atau untuk setiap. Contoh $\forall x \in R$ berlakulah $x^2 \geq 0$.
2. Didefinisikan $h(t) = (t - 2)^2, t \in R$,
3. Misalkan himpunan $A = \{x \mid -2 \leq x < 3, x \in R\}$
   $B = \{y \mid -8 \leq y < 20, y \in R\}$
   Didefinisikan $f : A \rightarrow B$
   $f : x \rightarrow x^3, \forall x \in A$
4. Misalkan himpunan $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 3, x \in R\}$
   dan
   $B = \{y \mid 8 \leq y \leq 26, \forall y \in R\}$
   Didefinisikan $f : A \rightarrow B$, dengan
   $f(x) = x^2 + 3x + 8, \forall x \in A$

➢ *Koefisien variabel berpangkat 1 dan 0 dapat bernilai 0.*

Berdasarkan ciri-ciri fungsi kuadrat di atas, suruh siswa menuliskan pengertian fungsi kuadrat dengan kata-katanya sendiri dan hasilnya diskusikan secara klasikal.

Untuk lebih memahami konsep fungsi kuadrat di atas, ajukan beberapa contoh dan bukan contoh fungsi kuadrat yang ada pada buku siswa dan meminta siswa memberikan alasan mengapa fungsi yang diberikan merupakan fungsi kuadrat atau bukan fungsi kuadrat. Cermati pemahaman siswa dari alasan-alasan yang diberikan. Hasil kerja yang diharapkan dari siswa sebagai berikut.

1. Misalkan $A, B \subset R$, didefinisikan fungsi $g : A \rightarrow B$, dengan $g(x) = c$, $\forall x \in A$, $c \in B$. Apakah fungsi g merupakan fungsi kuadrat?
   Diharapkan siswa memberikan jawaban sebagai berikut.
   Fungsi g bukan merupakan fungsi kuadrat sebab nilai fungsi g adalah konstanta c untuk setiap x anggota domain A. Fungsi g dapat dinyatakan,
   $g(x) = c \Rightarrow g(x) = 0x^2 + 0x + c$. Berarti koefisien x^2 adalah 0. Hal ini tidak memenuhi syarat Definisi-7.2 di atas, bahwa $a \neq 0$. Fungsi g ini disebut juga fungsi konstan.

2. h merupakan fungsi kuadrat sebab
   1) h merupakan suatu fungsi
   2) $h(t) = (t - 2)^2 = t^2 - 4t + 2$, $t \in R$. Pangkat tertinggi variabel t adalah 2
      Koefisien t^2 adalah $a = 1 \neq 0$

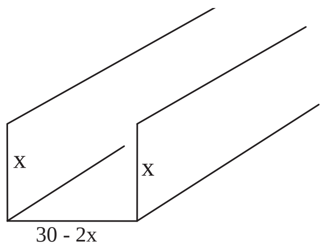
3. Fungsi $f(x) = x^3$, $\forall x \in A$, bukan merupakan fungsi kuadrat sebab pangkat tertinggi dari variabel x adalah 3.

4. f merupakan fungsi kuadrat sebab
   a) f merupakan fungsi dengan daerah asal (domain) f adalah $D_f = A$, dan daerah hasil (range) f adalah $R_f = B$.
   b) Pangkat tertinggi variabel x adalah 2.

Koefisien x^2, x, dan konstantanya adalah $a = 1$, $b = 3$, dan $c = 8$.

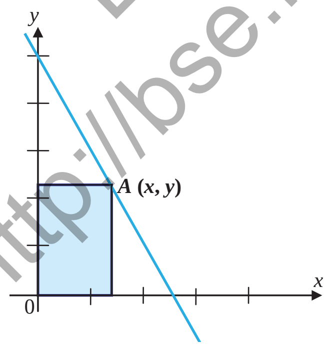
Uji Kompetensi 7.3

1. Pekerjaan Pak Suradi adalah pembuat talang air. Ia mendapat pesanan membuat sebuah talang air dari lembaran seng yang lebarnya 30 cm dengan melipat lebarnya atas tiga bagian seperti terlihat pada gambar di bawah ini.



Bantulah Pak Suradi menentukan nilai x agar volume air yang tertampung maksimal.

2. Titik $A(x, y)$ terletak pada garis g dengan persamaan $2x + y = 10$. Dari titik A dibuat garis-garis tegak lurus terhadap sumbu-x dan sumbu-y sehingga terbentuk persegipanjang dengan diagonal OA. Perhatikan gambar berikut!



a) Jika L menyatakan luas daerah persegipanjang yang terbentuk, nyatakan L sebagai fungsi x.
b) Apakah L sebagai fungsi merupakan fungsi kuadrat dalam x?

Berikan soal-soal pada uji kompetensi ini sebagai tugas di rumah siswa. Uji kompetnsi ini bertujuan untuk mengetahui pemahaman siswa tentang konsep fungsi kuadrat.

Projek

Rancanglah permasalahan terkait gerakan peluru dan ekonomi yang menerap-kan konsep dan aturan fungsi kuadrat. Buatlah pemecahan masalah tersebut dalam sebuah laporan serta sajikan di depan kelas.

b. Grafik Fungsi Kuadrat

Siswa diingatkan kembali, bagaimana menggambarkan grafik persamaan fungsi kuadrat dan memanfaatkan sifat pencerminan untuk memperoleh grafik persamaan fungsi kuadrat yang baru.

Dari hasil pemecahan Masalah 7.8, kita telah memperoleh persamaan fungsi kuadrat yang menyatakan debit air yang mengalir dari sebuah pipa adalah $q(d) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, d^2,\ d \in R,\ d \geq 0$. Misalkan diameter pipa adalah x dan debit air yang mengalir adalah y. Berarti y dapat dinyatakan dalam x, yaitu

$$y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2,\ x \in R,\ x \geq 0.$$

Temukan grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2$, $x \in R$ dari grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2$, $x \in R,\ x \geq 0$.

Beberapa pertanyaan arahan yang perlu kamu cermati untuk memperoleh grafik fungsi

$y = f(x) = (-\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2,\ x \in R$ dari grafik fungsi kuadrat

$f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, .\ x^2,\ x \in R,\ x \geq 0.$

1) Pikirkan apa saja yang kamu butuhkan untuk menggambar grafik fungsi $f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ x^2, x \in R, x \geq 0.$ dan ingat kembali bagaimana menggambar grafik fungsi kuadrat di SMP.

2) Apa perbedaan fungsi kuadrat $f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ x^2, x \in R, x \geq 0.$ dan fungsi kuadrat grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = (-\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ x^2, x \in R$

3) Apa kaitan konsep pencerminan dengan masalah ini?

4) Bagaimana komponen-komponen grafik fungsi setelah dicerminkan?

5) Dapatkah kamu memberikan perbedaan kedua grafik fungsi kuadrat tersebut?

6) Bilamana grafik memotong sumbu x dan memotong sumbu y?

♦ Ingat kembali, bagaimana menggambarkan grafik kuadrat dan memanfaatkan sifat pencerminan untuk memperoleh grafik fungsi kuadrat yang baru.

Perhatikan fungsi kuadrat

$y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4} \neq)x2$, $x \in R$, $x \geq 0$, yang menyatakan debit air yang mengalir dari pipa. Debit air yang mengalir dari pipa bergantung pada diameter (x) pipa. Jika $x = 0$, maka debit air adalah $y = f(x) = f(0) = 0$. Untuk beberapa nilai x diberikan, diperoleh nilai $y = f(x)$ seperti disajikan dalam tabel berikut.

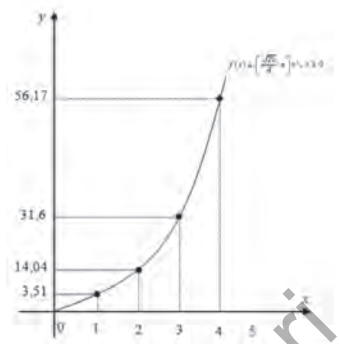
x	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	0	3,51	14,04	31,6	56,17

Grafik persamaan fungsi kuadrat

Arahkan siswa menggambar grafik fungsi kuadrat dan menemukan sifat-sifat grafik tersebut. Ingatkan siswa tentang materi transformasi tentang pencerminan terhadap sumbu x dan sumbu y. Arahkan siswa menggambar grafik fungsi kuadrat, dengan mengikuti langkah-langkah berikut.

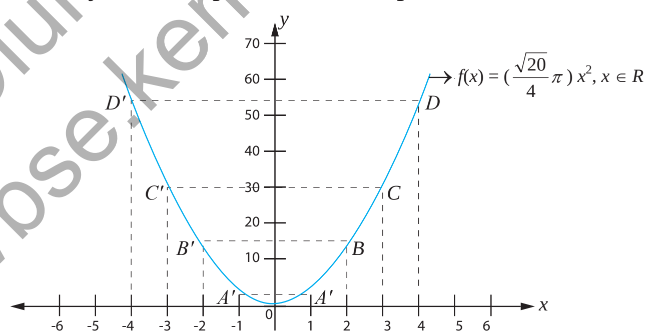
a. *Tentukan titik potong grafik fungsi terhadap sumbu x.*
b. *Buat tabel untuk memperoleh titik-titik yang dilalui grafik.*
c. *Gambarkan grafik fungsi pada sistem koordinat.*
d. *Tentukan nilai maksimum atau minimum*
e. *Tentukan titik puncak.*

$y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\,x^2,\ x \in R,\ x \geq 0,$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 7.12 Grafik Fungsi $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\,x^2,\ x \in R,\ x \geq 0,$

Dengan mencerminkan grafik persamaan fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\,x^2,\ x \in R,\ x \geq 0,$ terhadap sumbu-*y*, maka diperoleh sebuah parabola berikut.



Gambar 7.13 Grafik Fungsi $f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\,x^2,\ x \in R$

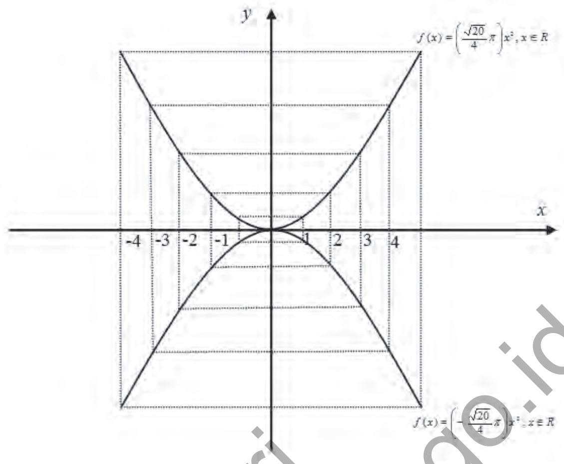
Ciri-ciri fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\,x^2,\ x \in R$ yang berupa parabola di atas adalah sebagai berikut.

- Koefisien x^2 adalah $a = \frac{\sqrt{20}}{4}\pi > 0$
- Kurva terbuka ke atas
- Memiliki titik puncak (titik balik minimum) di titik O (0, 0)
- Memiliki sumbu simetri yang membagi dua kurva sama besar, yaitu garis $x = 0$ dan nilai minimum $y = f(0) = 0$
- Nilai diskriminan, $D = b^2 - 4ac = 0$
- Kurva menyinggung sumbu x di titik O(0, 0)
- Cerminkan grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2, x \in R$ terhadap sumbu-x dan selidiki sifat-sifat grafik fungsi kuadrat yang ditemukan.

Kita cerminkan grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2, x \in R$ terhadap sumbu-x atau garis $y = 0$. Dengan mengingat kembali sifat-sifat pencerminan bahwa arah benda dengan bayangannya selalu berlawanan arah. Sehingga nilai fungsi kuadrat $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right)x^2,\ x \in R$ berubah dari bernilai positif menjadi negatif. Perubahan tersebut diikuti perubahan fungsinya dari $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)$ x^2, $x \in R$ menjadi $y = f(x) = (-\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2, x \in R$.

Secara lengkap bayangan grafik persamaan fungsi kuadrat $y = f(x)$ setelah dicerminkan terhadap Sumbu-x adalah sebagai berikut.

Meminta siswa mencerminkan grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4} \neq)\ x^2$, $x \in R$ terhadap Sumbu-x dan menyelidiki sifat-sifat grafik fungsi kuadrat yang ditemukan.



Gambar 7.14 Grafik Fungsi (x) dan grafik pencerminan $f(x)$

Ciri-ciri fungsi kuadrat $y = f(x) = (-\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ x^2$, $x \in R$ dan parabola hasil pencer-minan terhadap sumbu-x (Gambar-7.14) adalah sebagai berikut.

- Koefisien x^2 adalah a $= -\frac{\sqrt{20}}{4}\pi < 0$
- Kurva terbuka ke bawah
- Memiliki titik puncak (titik balik maksimum) di titik O (0, 0)
- Memiliki sumbu simetri yang membagi dua kurva sama besar, yaitu garis $y = 0$ dan nilai minimum $f(0) = 0$
- Nilai diskriminan, $D = b^2 - 4ac = 0$
- Kurva menyinggung sumbu x di titik O(0, 0)

Apa kesimpulan dari hasil pencerminan tersebut?

Kesimpulan

Misalkan $g(x) = ax^2$, $x \in R$. Jika grafik g dicerminkan terhadap sumbu-x maka diperoleh $g^*(x) = -ax^2$, $x \in$ R dengan sumbu simetri adalah sumbu-y dan memiliki titik puncak O (0, 0).

Meminta siswa menyimpulkan hasil pencerminan grafik fungsi kuadrat

Masalah-7.8

Mengajak siswa menemukan persamaan garis simetri dan titik puncak grafik fungsi kuadrat dengan mengajukan masalah berikut.

Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

a. Temukan persamaan garis simetri (sumbu simetri) dan titik puncak grafik fungsi kuadrat tersebut.
b. Temukan grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dari grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2$, $x \in R$, $a \neq 0$.
c. Temukan titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y.
d. Temukan sifat-sifat grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ terkait nilai koefisien a dan titik puncak parabola.

Untuk memecahkan masalah di atas, cermati beberapa grafik fungsi kuadrat yang telah digambar sebelumnya dan beberapa pertanyaan berikut:

1) Apa yang dimaksud dengan grafik fungsi kuadrat?
2) Apa yang dimaksud dengan persamaan garis sumbu simetri grafik fungsi kuadrat?
3) Apa yang dimaksud dengan titik puncak grafik fungsi kuadrat?
4) Bagaimana menemukan aturan penentuan persamaan garis simetri dan titik puncak grafik fungsi kuadrat?
5) Apa yang dimaksud dengan transformasi geser?

6) Apa kaitan transformasi geser dan sifat-sifatnya untuk memperoleh sebarang grafik fungsi kuadrat dari grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2$, $x \in R$, dan $a \neq 0$?

7) Temukan arah pergeseran grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2$, $x \in R$ untuk mendapatkan grafik fungsi $f(x) = g\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right) + \left(\frac{-D}{4a}\right)$ dan syarat-syarat yang diperlukan!

8) Sifat-sifat apa saja yang kamu simpulkan dari grafik fungsi kuadrat $f(x) = a\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right)^2 + \left(\frac{-D}{4a}\right)$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ berkaitan dengan nilai koefisien a dan titik puncak grafik fungsi?

9) Dapatkah kamu memberi beberapa kemungkinan gambaran grafik fungsi kuadrat terkait nilai koefisien a, nilai diskriminan, titik potong terhadap sumbu-x, nilai fungsinya.

Berdasarkan Definisi 7.2, rumus umum fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0 \Leftrightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right),\ a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right),\ a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right],\ a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right),\ a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = a\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right)^2 + \left(\frac{-D}{4a}\right),\ a \neq 0$$

Misalkan $g(x)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a(x - (\frac{-b}{2a}))^2 + (\frac{-D}{4a}),\ a \neq 0 \\ \text{dan } g(x) = ax^2,\ x \in R,\ a \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x - (\frac{-b}{2a})) + (\frac{-D}{4a})$$

Grafik fungsi $f(x) = g(x - (\frac{-b}{2a})) + (\frac{-D}{4a})$ adalah grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2$, $x \in R$ yang digeser sejauh satuan kearah Sumbu-x dan digeser sejauh satuan ke arah Sumbu-y.

Sifat-4

Grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$, memiliki

a. Persamaan sumbu simetri $x = \frac{-b}{2a}$ dan

b. Titik puncak $P(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$.

Dari beberapa sajian grafik fungsi kuadrat sebelumnya turunkan sifat-sifat grafik fungsi kuadrat dan sajikan beberapa kemungkinan kondisi grafik tersebut terkait dengan koefisien x^2 , nilai diskriminan dan nilai fungsi tersebut.

Dari fungsi kuadrat $f(x) = a(x - (\frac{-b}{2a}))^2 + (\frac{-D}{4a})$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$, dapat diturunkan beberapa sifat.

Dari beberapa sajian grafik persamaan fungsi kuadrat sebelumnya, guru meminta siswa menurunkan sifat-sifat grafik persamaan fungsi kuadrat dan menyajikan beberapa kemungkinan kondisi grafik tersebut terkait dengan koefisien x^2 , nilai diskriminan dan nilai fungsi tersebut.

Sifat-5

Jika $a > 0$, maka grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, dan c bilangan real $a \neq 0$ terbuka ke atas dan memiliki titik balik minimum $P(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$.

Sifat-6

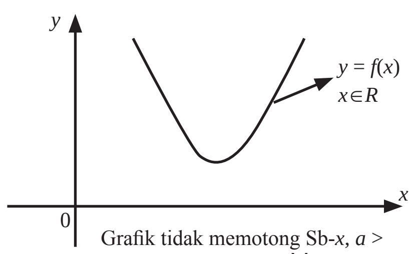
Jika $a < 0$, maka grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, dan c bilangan real $a \neq 0$ terbuka ke bawah dan memiliki titik puncak maksimum $P(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$.

Sifat-7

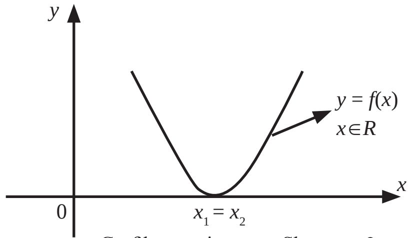
Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$, misalkan $D = b^2 - 4ac$ (D adalah diskriminan)

a. Jika $D > 0$, maka grafik $y = f(x)$ memotong sumbu-x di dua titik berbeda
b. Jika $D = 0$, maka grafik $y = f(x)$ menyinggung sumbu-x di satu titik
c. Jika $D < 0$, maka grafik $y = f(x)$ tidak memotong sumbu-x

Pada gambar berikut diperlihatkan berbagai kemungkinan letak parabola terhadap sumbu-x

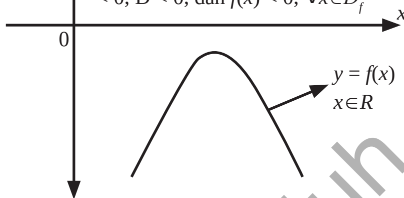


Grafik tidak memotong Sb-x, $a > 0$, D < 0, dan $f(x) > 0$, $\forall x \in R$

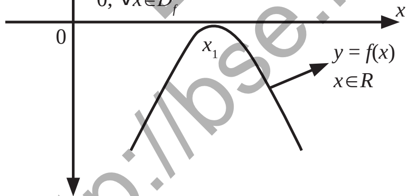


Grafik menyinggung Sb-x, $a > 0$, D = 0, dan $f(x) \geq 0$, $\forall x \in R$

Grafik tidak memotong Sb-x, $a < 0$, D < 0, dan $f(x) < 0$, $\forall x \in D_f$



Grafik menyinggung Sb-x pada dua titik, $a < 0$, $D = 0$, dan $f(x) \leq 0$, $\forall x \in D_f$



c. Hubungan Persamaan Kuadrat dan Fungsi Kuadrat

Kita cermati konsep persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat sebagai berikut.

- Persamaan kuadrat adalah suatu persamaan aljabar yang dinyatakan dalam bentuk $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

Meminta siswa mencermati kembali Definisi-1 dan Definisi-2, dan menemukan keterkaitan kedua konsep, serta menyatakan konsep yang satu dari konsep yang lain.

Arahkan siswa berdiskusi untuk menjawab beberapa pertanyaan pada Latihan 7.5. Dari hasil diskusi siswa, diperoleh jawaban sebagai berikut.

1. *Dapat, caranya, subtitusi nilai fungsi kuadrat untuk x tertentu, sehingga diperoleh persamaan kuadrat.*
2. *Jika nilai x yang memenuhi $ax^2 + bx + c = 0$, disubtitusikan ke fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$, maka diperoleh $f(x) = 0$.*
3. *Berdasarkan Definisi-7.1, $y = ax^2 + bx + c$, bukan persamaan kuadrat.*
4. *Fungsi adalah sebuah relasi, tetapi persamaan adalah sebuah kalimat terbuka. Sebuah persamaan berkaitan dengan himpunan penyelesaian.*

- Fungsi kuadrat adalah suatu fungsi yang dinyatakan dalam bentuk
 $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

Latihan 7.5

Berdasarkan kedua konsep di atas, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut

1. Apakah sebuah persamaan kuadrat dapat diperoleh dari sebuah fungsi kuadrat?
2. Jika disubtitusikan nilai x yang memenuhi persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ ke dalam persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ apa yang kamu dapatkan
3. Dapatkah persamaan fungsi kuadrat dipandang sebuah persamaan kuadrat? Jelaskan.
4. Apa perbedaan konsep fungsi dengan konsep persamaan?

Sifat-8

Untuk setiap nilai sebuah fungsi kuadrat diperoleh sebuah persamaan kuadrat.

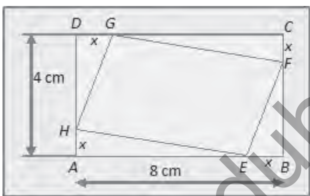
Uji Kompetensi 7.4

Berikan soal-soal uji kompetensi di samping sebagai tugas di rumah. Uji kompetensi ini bertujuan untuk mengukur kemampuan siswa tentang konsep fungsi kuadrat.

1. Gambarkanlah grafik fungsi kuadrat berikut tentukan titik puncak dan sifat-sifatnya.
   a. $f(x) = -x^2 + 5x - 6, x \in R$
   b. $g(y) = 2y^2 - 4y + 2, y \in R$

2. Sebuah fungsi kuadrat mempunyai nilai maksimum -3 pada saat $x = 2$, sedangkan untuk $x = -2$ fungsi bernilai -11. Tentukan rumus fungsi kuadrat tersebut !

3. Tentukan luas minimum segi empat *EFGH* di bawah ini !



4. Gambarlah grafik fungsi kuadrat $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$ dari grafik fungsi kuadrat $g(x) = 4x^2$!

5. Persegi *ABCD* dengan panjang sisinya *a* cm. Titik *E* terletak pada sisi *AB* dengan panjang *AE* adalah *x* cm. Diantara sisi *BC* terdapat titik *F* dengan panjang *BF* = *AE*. Panjang *EB* = *FC*. Tentukan luas minimum *DEF* !

6. Daerah asal fungsi kuadrat $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ adalah himpunan $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3, x \in R\}$. Tentukan daerah hasil fungsi *f* !

7. Gambarkan grafik fungsi kuadrat di bawah ini. (untuk setiap *x* bilangan real)
   a. $f(x) = 3x^2+5x-4, x \in R.$
   b. $f(x) =-2x^2-3x+7, x \in R.$

Tugas proyek diberikan sebagai tugas individu untuk menginformasikan kepada siswa bahwa belajar tentang tentang persamaan dan fungsi kuadrat sangat diperlukan dalam perkembangan ilmu dan dalam menyelesaikan permasalahan kehidupan.

Projek

Rancanglah masalah nyata yang melibatkan grafik fungsi kuadrat pada bidang teknik bangunan dan fisika. Buatlah pemecahan masalah tersebut dengan menerapkan berbagai sifat grafik fungsi kuadrat yang telah kamu pelajari. Buat laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

Bagian penutup ini merupakan rangkuman tentang informasi dan konsep persamaan dan fungsi kuadrat

D. PENUTUP

Telah kita temukan konsep dan aturan yang berlaku pada persamaan dan fungsi kuadrat. Beberapa hal yang penting sebagai pegangan kita untuk mendalami dan melanjutkan materi pada bahasan berikutnya, dapat dirangkum sebagai berikut.

1. Bentuk umum Persamaan kuadrat adalah $ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$.

2. Untuk menentukan akar-akar suatu persamaan kuadrat dapat dilakukan dengan cara berikut.
   a. Memfaktorkan.
   b. Melengkapkan Bentuk Kuadrat Sempurna.
   c. Menggunakan Rumus *abc*.

   Rumus *abc* adalah sebagai berikut.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. Jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat
   Akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, berhubungan erat dengan koefisien-koefisien a, b, dan c. Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan kuadrat, maka berlaku.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ dan } x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

4. Bentuk persamaan kuadrat dengan akar-akar x_1 dan x_2 adalah $(x - x_1)(x - x_2) = 0$
5. Karakteristik Grafik Fungsi Kuadrat
   Fungsi kuadrat memiliki bentuk umum dengan a, b, $c \in$ R dan $a \neq 0$. Dari bentuk aljabar tersebut, grafik fungsi kuadrat dapat diilustrasikan sebagi bentuk lintasan lengkung atau parabola dengan karakteristik sebagai berikut.
   a. Jika $a > 0$, maka parabola terbuka ke atas.
   b. Jika $a < 0$, maka parabola terbuka ke bawah.
   c. Jika $D < 0$, maka parabola tidak memotong maupun menyinggung sumbu x.
   d. Jika $D = 0$, maka parabola menyinggung sumbu x.
   e. Jika $D > 0$, maka parabola memotong sumbu x di dua titik.
6. Langkah-langkah yang diperlukan untuk membuat sketsa grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx$ adalah sebagai berikut
   a. Menentukan titik potong dengan sumbu x, diperoleh jika $y = 0$.
   b. Menentukan titik potong dengan sumbu y, diperoleh jika $x = 0$.
   c. Menentukan persamaan sumbu simetri $x = -\frac{b}{2a}$.
   d. Menentukan nilai ekstrim grafik $y = \frac{D}{-4a}$.
   e. Koordinat titik balik sebuah grafik fungsi kuadrat adalah $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$.

Kita telah menemukan berbagai konsep dan sifat-sifat yang berlaku pada persamaan dan fungsi kuadrat. Demikian juga, kita telah terapkan dalam berbagai pemecahan masalah nyata. Selanjutnya akan kita bahas tentang geometri terkait kedudukan titik, garis, sudut, dan bidang pada bidang datar dan ruang dimensi tiga. Penguasaan kamu pada materi pada setiap bahasan akan bermanfaat dalam mendalami materi selanjutnya.

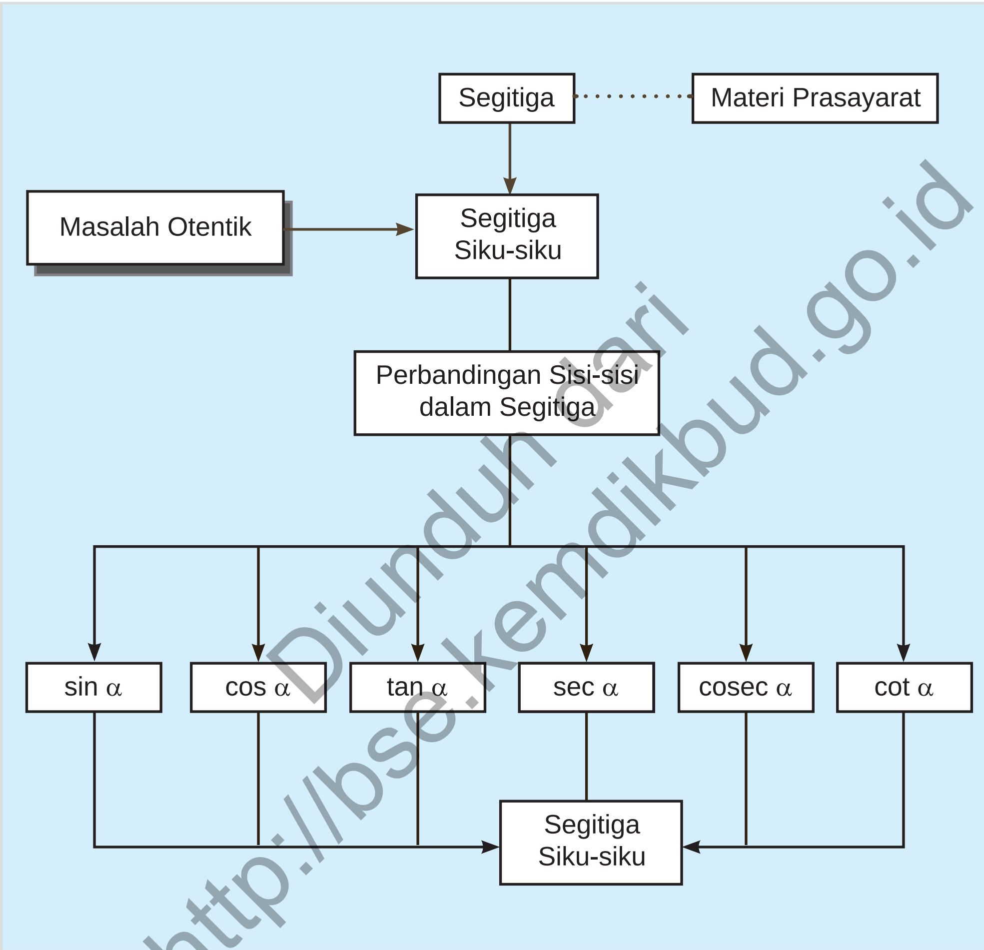
Bab 8

Trigonometri

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percayadiri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Menunjukkan sikap bertanggung jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan. 3. Mendeskripsikan konsep perbandingan trigonometri padasegitiga siku-siku melalui penyelidikan dan diskusi tentang hubungan perbandingan sisi-sisi yangbersesuaian dalam beberapa segitigasiku- siku sebangun. 4. Menemukan sifat-sifat dan hubungan antar perbandingan trigonometri dalam segitiga siku-siku. 5. Mendeskripsikan dan menentukan hubungan perbandingan Trigonometri dari sudut disetiap kuadran, memilih dan menerapkan dalam penyelesaian masalah nyata dan matematika. 6. Mendeskripsikan konsep fungsi Trigonometri dan menganalisis grafik fungsinya serta menentukan hubungan nilai fungsi Trigonometri dari sudut-sudut istimewa. 7. Menerapkan perbandingan trigonometri dalam menyelesaikan masalah. 8. Menyajikan grafik fungsi trigonometri.	Melalui pembelajaran materi trigonometri, siswa memperoleh pengalaman belajar: • menemukan konsep perbandingan trigonometri melalui pemecahan masalah otentik; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur; • berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis dan kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep trigonometri dalam memecahkan masalah otentik. **Istilah Penting** • *Sudut* • *Derajat* • *Radian* • *Kuadran* • *Perbandingan Sudut (sinus, cosinus, tangen, cotangen, cosecan, dan secan)* • *Identitas trigonometri*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Pernahkah kamu memperhatikan gerakan gelombang laut sampai ke pinggir pantai/ dinding suatu pelabuhan? Tahukah kamu bagaimana cara mengukur kedalaman laut/ samudera? Phenomena nyata ini merupakan hanya sebagain dari penerapan trigonometri dalam kehidupan nyata. Dalam bidang fisika, teknik, dan kedokteran, trigonometri mengambil peranan penting dalam pengembang teknologi kedokteran dan teori-teori fisika dan teknik. Dalam Matematika, trigonometri digunakan untun menemukan relasi antara sisi dari sudut pada suatu segitiga.

1. Ukuran Sudut (Derajat dan Radian)

Pada umumnya, ada dua ukuran yang digunakan untuk menentukan besar suatu sudut, yaitu derajat dan radian. Tanda "^{O}" dan "*rad*" berturut-turut menyatakan simbol derajat dan radian. Singkatnya, satu putaran penuh = 360^{O}, atau 1^{O} didefinisikan sebagai besar sudut yang dibentuk oleh $\dfrac{1}{360}$ putaran penuh. Cermati gambar berikut ini!

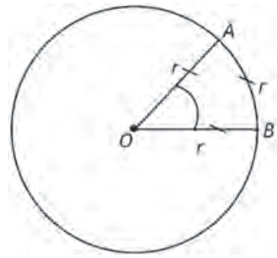
Gambar 8.1 Deskripsi besar rotasi

Tentunya, dari Gambar 8.1, kamu dapat mendeskripsikan untuk beberapa satuan putaran yang lain. Sebelum kita memahami hubungan "derajat dengan radian", mari kita pelajari kajian berikut ini.

Berikan penjelasan kepada siswa tentang kebergunaan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari bahkan dalam pengembangan teknologi kedokteran, fisika dan teknik. Ajak siswa untuk mengamati lebih lagi penerapan trigonometri sebagai pertimbangan bagi siswa/i dalam memilih dunia kerja bagi mereka.

Sebelum memahami menemukan konsep dasar sudut, terlebih dahulu perkenalkan kepada siswa tentang ukuran sudut dalam derajat dan radian, ajukan pada siswa Gambar 8.1. Biarkan siswa lebih dahulu memahami besarnya rotasi.

Berikan pemahaman kepada siswa tentang ukuran sudut dalam derajat dan radian! Dan ajak siswa untuk mencermati Gambar 8.1!



Gambar 8.2 Ukuran radian

Satu radian diartikan sebagai ukuran sudut pusat α suatu lingkaran yang panjang busurnya sama dengan jari-jari, perhatikan Gambar 8.2.

Jika besar $\angle AOB = \alpha$, $AB = OA = OB$ maka $\alpha = \dfrac{AB}{r} = 1$.

Jika panjang busur tidak sama dengan r, maka cara menentukan besar sudut tersebut dalam satuan radian diselesaikan menggunakan definisi perbandingan:

Definisi 8.1

$$\angle AOB = \frac{AB}{r}\ rad$$

Lebih lanjut, hubungan satuan derajat dengan satuan radian, bahwa 1 putaran penuh sama dengan 2π *rad*. Seperti dinyatakan dalam definisi berikut

Definisi 8.2

$$360^\circ = 2\pi\ rad \text{ atau } 1^\circ = \frac{\pi}{180}\ rad \text{ atau } 1\ rad \approx 57{,}3^\circ$$

Sebelum mengkaji Contoh 8.1, ajak siswa untuk mengajukan pertanyaan-pertanyaan/ide-ide terkait konsep dasar trigonometri.
Selanjutnya ajak siswa untuk memahami contoh berikut.

Perhatikan hubungan secara aljabar antara derajat dengan radian berikut ini.

Contoh 8.1

1. $\frac{1}{4}$ putaran $= \frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow 90^\circ = 90 \times \frac{\pi}{180}$ $rad = \frac{1}{2}\pi\ rad.$

2. $\frac{1}{3}$ putaran = $\frac{1}{3} \times 360^{o} = 120^{o} \Leftrightarrow 120^{o} = 120 \times \frac{\pi}{180}$ *rad*
$= \frac{2}{3}\pi$ *rad*.

3. $\frac{1}{2}$ putaran = $\frac{1}{2} \times 360^{o} = 180^{o} \Leftrightarrow 180^{o} = 180 \times \frac{\pi}{180}$ *rad*
$= \pi$ *rad*.

4. $\frac{2}{3}$ putaran = $\frac{2}{3} \times 360^{o} = 240^{o} \Leftrightarrow 240^{o} = 240 \times \frac{\pi}{180}$ *rad*
$= \frac{4}{3}\pi$ *rad*.

5. $\frac{3}{4}$ putaran = $\frac{3}{4} \times 360^{o} = 270^{o} \Leftrightarrow 270^{o} = 270 \times \frac{\pi}{180}$ *rad*
$= \frac{3}{2}\pi$ *rad*.

Tentunya dengan mudah kalian mampu mengubah ukuran sudut yang lain.
Pahami contoh berikut ini.

Contoh 8.2

Selesaikan soal-soal ukuran sudut berikut.

1. $\frac{1}{5}\pi$ rad = ... putaran = ...°
2 $\frac{1}{6}$ putaran = ... *rad* = ...°
3. 135° = ... *rad* = ... putaran
4. Berapa radian sudut yang dibentuk jarum jam pada pukul 11.00?
5. Jika suatu alat pemancar berputar 60 putaran dalam setiap menit, maka tentukanlah banyak putaran dalam satu detik.

Berikan soal-soal lain untuk memastikan keterampilan siswa dalam mengubah satuan sudut (derajat ke radian), misalnya:

a) $\frac{1}{12}$ *putaran.*

b) $\frac{1}{15}$ *putaran.*

c) $\frac{1}{18}$ *putaran.*

Alternatif Penyelesaian

1. 1 putaran = 360° = 2π *rad*. Jadi, $\frac{1}{2}$ putaran = π *rad*. Oleh karena itu, $\frac{1}{5}\pi\ rad = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$ putaran = $\frac{1}{10}$ putaran $= \frac{1}{10} \times 360° = 36°$.

2. Karena 1 putaran = π *rad* $\frac{1}{6}$ putaran = $\frac{1}{6} \times (2\pi\ rad) = \frac{1}{3}$ $\pi\ rad = \frac{1}{3}\pi \times \frac{180}{\pi} = 60°$.

3. $135° = 135° \times \frac{\pi}{180°}\ rad = \frac{3}{4}\pi\ rad = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ putaran = $\frac{3}{8}$ putaran.

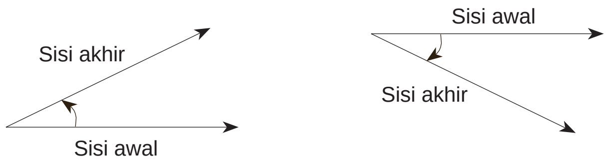
4. Sudut yang terbentuk pada pukul 11.00 adalah 30, 30 $= 30 \times \frac{\pi}{180}\ rad = \frac{1}{6}\pi\ rad$.

5. Jika setiap menit, alat tersebut melakukan rotasi sebanyak 60 putaran, maka setiap satu detik pemancar tersebut melakukan 3600 putaran.

> 360° pertama sekali diperkenalkan oleh bangsa Babilonia.
> Hitungan satu tahun pada kalender Babilonia, yaitu sebanyak 365 hari.

2. Konsep Dasar Sudut

Dalam kajian geometris, sudut didefinisikan sebagai hasil rotasi dari sisi awal (*initial side*) ke sisi akhir (*terminal side*). Selain itu, arah putaran memiliki makna dalam sudut. Suatu sudut bertanda *"positif"* jika arah putarannya berlawanan dengan arah putaran jarum jam, dan bertanda *"negatif"* jika arah putarannya searah dengan jarum jam. Arah putaran untuk membentuk sudut juga dapat diperhatikan pada posisi sisi akhir terhadap sisi awal. Untuk memudahkannya, mari kita cermati deskripsi berikut ini.



a. Sudut bertanda positif b. Sudut bertanda negatif

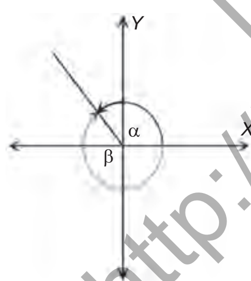
Gambar 8.3 Sudut berdasarkan arah putaran

Dalam bidang koordinat kartesius, jika sisi awal suatu garis berimpit dengan sumbu x dan sisi terminalnya terletak pada salah satu kuadran pada koordinat kartesius itu, disebut sudut *standar* (baku). Jika sisi akhir berada pada salah satu sumbu pada koordinat tersebut, sudut yang seperti ini disebut pembatas kuadran, yaitu 0°, 90°, 180°, 270° dan 360°.

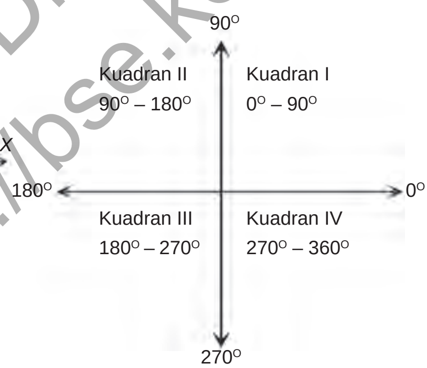
Sebagai catatan, bahwa untuk menyatakan suatu sudut, lazimnya digunakan huruf Yunani, seperti, α (*alpha*), β (*betha*), γ (*gamma*), dan θ (*tetha*), dan juga digunakan huruf-huruf kapital, seperti A, B, C, dan D.

Cermati gambar di bawah ini.

Jika sudut yang dihasilkan sebesar α (sudut standar), maka sudut β disebut sebagai sudut koterminal, sehingga $\alpha + \beta = 360^{\circ}$, seperti gambar berikut.



a. Sudut standar dan sudut koterminal



b. Besar sudut pada setiap kuadran

Gambar 8.4 Sudut secara geometri dan pembatas kuadran

Definisi 8.3

Sudut-sudut koterminal adalah dua sudut standar, memiliki sisi-sisi akhir (*terminal side*) yang berimpit.

Untuk memantapkan pemahaman kamu akan sudut baku dan pembatas kuadran, cermati contoh dan pembahasan di bawah ini.

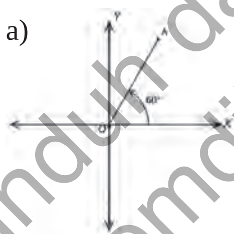
Contoh 8.3

Gambarkanlah sudut-sudut standar di bawah ini, dan tentukan posisi setiap sudut pada koordinat kartesius.

a) 60° b) –45° c)120° d) 600°

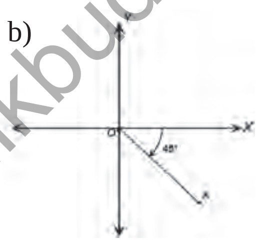
Penyelesaian

a)



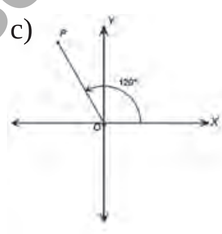
Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi akhir *OA* terletak di kuadran I.

b)



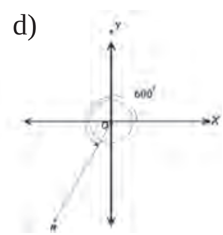
Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi akhir *OA* terletak di kuadran IV.

c)



Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi akhir *OP* terletak di kuadran II.

d)



Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi akhir *OR* terletak di kuadran III.

Gambar 8.5 Sudut pada setiap kuadran

Uji Kompetensi 8.1

Berikan soal-soal uji kompetensi ini sebagai tugas di rumah. Uji kompetensi ini bertujuan untuk mengukur kemampuan siswa dalam konsep ukuran sudut dalam derajat dan radian.

1. Untuk setiap besar sudut di bawah ini, ubahlah ke bentuk satuan derajat dan radian.

   a. $\frac{1}{6}$ putaran   c. $\frac{3}{10}$ putaran

   b. $\frac{2}{5}$ putaran   d. 5 putaran

2. Ubahlah sudut-sudut berikut ke bentuk radian.

   a. 45°   c. 87.4°

   b. 36°   d. 0,54°

3. Ubahlah sudut-sudut berikut ke bentuk derajat.

   a. $\frac{\pi}{12}$ *rad*   d. $\frac{7\pi}{8}$ *rad*

   b. $\frac{5\pi}{3}$ *rad*   e. $\frac{7\pi}{16}$ *rad*

   c. $\frac{3\pi}{5}$ *rad*   f. $\frac{8\pi}{15}$ *rad*

4. Tentukanlah sudut komplemen dan suplemen setiap sudut berikut ini.

   a. 15°   c. 68°

   b. 105°   d. 96°

5. Untuk setiap besar sudut dalam satuan derajat berikut ini, tentukan posisi setiap sudut tersebut.

   a. 90°   d. 300°

   b. 135°   e. –270°

   c. 225°   f. 1200°

   Selanjutnya, nyatakan setiap sudut di atas, dalam satuan radian.

6. Misalkan, sudut θ merupakan sudut lancip dan sudut β adalah sudut tumpul. Perhatikan kombinasi setiap sudut dan kedua sudut tersebut, dan tentukanlah posisinya.

   a. 3θ c. $\theta + \beta$

   b. 2β d. $2\beta - \theta$

7. Jika kita perhatikan jam, berapa kalikah dalam 1 hari terbentuk sudut-sudut di bawah ini.
   a. 90° c. 30°
   b. 180° d. 120°

Tugas proyek diberikan sebagai tugas individu untuk menginformasikan kepada siswa bahwa belajar tentang trigonometri sangat diperlukan dalam perkembangan ilmu dan dalam menyelesaikan permasalahan kehidupan.

Projek

Himpun berbagai informasi penerapan sudut pada bidang fisika dan masalah nyata. Coba rancang pemecahan masalah terkait informasi yang kamu peroleh. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

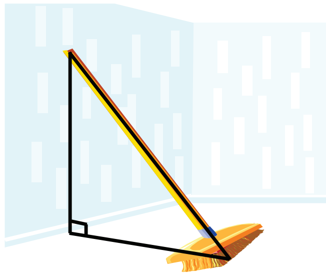
3. Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku

Ajak siswa mengamati gambar rumah adat pada Gambar 8.6! Berikan kesempatan ke siswa untuk menyampaikan hasil pengamatannya tentang penerapan trigonometri dalam dunia arsitek rumah adat.
Selain itu, motivasi siswa untuk memberikan ide-ide positif dari ilustrasi yang dianalisis mereka.

Pada peradaban kehidupan budaya Dayak, kajian mengenai trigonometri sudah tercermin dari berbagai ikon kehidupan mereka. Misalnya, para arsitekturnya, sudah menerapkan kesetimbangan bangunan pada rumah adat yang mereka ciptakan. Rumah adat tersebut berdiri kokoh sebagai hasil hubungan yang tepat antara besar sudut yang dikaitkan dengan panjang sisi-sisinya. Apakah para Arsitektur tersebut mempelajari trigonometri juga?

Gambar 8.6 Rumah Adat Suku Dayak

Pada sub bab ini, akan dipahami konsep perbandingan trigonometri pada suatu segitiga siku-siku. Dalam kehidupan sehari-hari sering kita jumpai bentuk segitiga siku-siku; misalnya, meletakkan posisi sapu. Perhatikan Gambar 8.7 berikut ini.



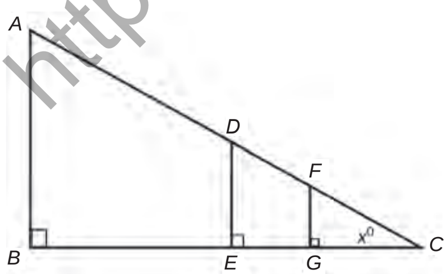
Gambar 8.7 Posisi sapu di dinding

Coba kita pahami deskripsi berikut.

Pak Yahya adalah seorang penjaga sekolah. Tinggi pak Yahya adalah 1,6 m. Dia mempunyai seorang anak, namanya Dani. Dani masih kelas II Sekolah Dasar. Tinggi badannya 1,2 m. Dani adalah anak yang baik dan suka bertanya. Dia pernah bertanya kepada ayahnya tentang tinggi tiang bendera di lapangan itu. Dengan senyum, Ayahnya menjawab 8 m. Suatu sore, disaat dia menemani ayahnya membersihkan rumput liar di lapangan, Dani melihat bayangan setiap benda ditanah. Dia mengambil tali meteran dan mengukur panjang bayangan ayahnya dan panjang bayangan tiang bendera, yaitu 3 m dan 15 m. Tetapi dia tidak dapat mengukur panjang bayangannya sendiri karena bayangannya mengikuti pergerakannya. *Jika kamu sebagai Dani, dapatkah kamu mengukur bayangan kamu sendiri?*

Berikan waktu ke siswa untuk memahami dan menganalisis phenomena yang ada desksripsi di samping.
Motivasi siswa untuk mengajukan ide-ide untuk menyelesaikan masalah yang ada pada deskipsi tersebut.

Konsep kesebangunan pada segitiga terdapat pada cerita tersebut. Mari kita gambarkan segitiga sesuai cerita di atas.



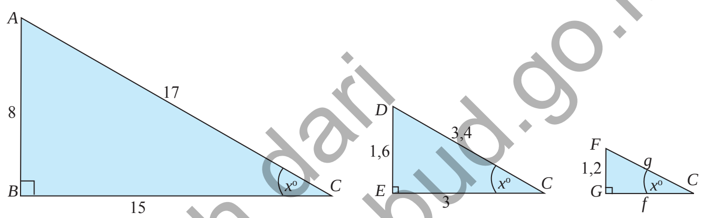
Gambar 8.8 Model tiang bendera dan orang

Ajak siswa untuk mampu mencoba membuat ilustrasi masalah di atas. Berikan penjelasan bahwa sangat dibutuhkan ketrampilan dalam mensketsakan suatu masalah.
Meminta siswa untuk menyajikan segitiga-segitiga yang sebangun pada Gambar 8.8.

Berikan kesempatan untuk mencoba menentukan perbandingan sisi yang segitiga-segitga yang sebangun.

Dimana:
AB = tinggi tiang bendera (8 m)
BC = panjang bayangan tiang (15 m)
DE = tinggi pak Yahya (1,6 m)
EC = panjang bayangan pak Yahya (3 m)
FG = tinggi Dani (1,2 m)
GC = panjang bayangan Dani

Berdasarkan gambar segitiga di atas terdapat tiga segitiga, yaitu ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC sebagai berikut.



Gambar 8.9 Kesebangunan

Karena ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC adalah sebangun, maka berlaku

$\dfrac{FG}{DE} = \dfrac{GC}{EC} = \dfrac{1,2}{1,6} = \dfrac{f}{3}$. Diperoleh $f = 2,25$

Dengan menggunakan Teorema Phytagoras diperoleh nilai $FC = g = \sqrt{6,5025} = 2,55$.

Berdasarkan kesebangunan ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC diperoleh perbandingan sebagai berikut.

a. $\dfrac{FG}{DE} = \dfrac{DE}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1,2}{2,25} = \dfrac{1,6}{3,4} = \dfrac{8}{17} =$

$= \dfrac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi miring segitiga}}$

$= 0,47$

Perbandingan ini disebut sinus sudut C, ditulis sin x^0 atau sin $C = \frac{8}{17}$

b. $\frac{GC}{FC} = \frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC} = \frac{2,25}{2,55} = \frac{3}{3,4} = \frac{15}{17} =$

$= \frac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi miring segitiga}}$

$= 0,88$

Perbandingan ini disebut cosinus sudut C, ditulis cos x^0 atau cos $C = \frac{15}{17}$

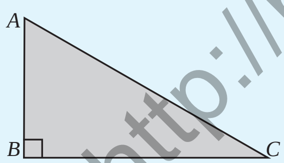
c. $\frac{FG}{GC} = \frac{DE}{EC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1,2}{2,25} = \frac{1,6}{3} = \frac{8}{15} =$

$= \frac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi di samping sudut}}$

$= 0,53$

Perbandingan ini disebut tangen sudut C, ditulis tan x^0 atau tan $C = \frac{8}{15}$.

Definisi 8.4



1. *sinus suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan sisi miring, ditulis sin $C = \frac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi miring segitiga}}$.

Berdasarkan penyelesaian masalah dan berdasarkan, ajak siswa untuk merumuskan definisi tentang perbandingan sudut segitiga.

Pastikan pemahaman siswa dengan Definisi 8.4 dengan mengajukan pertanyaan berikut ini.

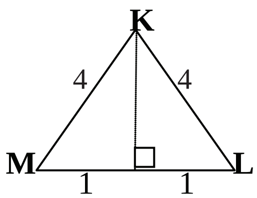
a. Segitiga KLM merupakan segitiga sama kaki, KL = KM = 4 satuan; LM = 2 satuan.

Hitunglah $(\angle KLM)$.

b. Jika RS merupakan sisi miring segitiga RST, dengan ST = 6 cm, RT = 5 cm. Tentukanlah $\cos(\angle RST)$.

Alternatif Penyelesaian

a. Tantang siswa untuk mampu menggambarkan segitiga yang dimaksud.



Dengan demikian

$(\angle KLM) = \dfrac{1}{4}$.

b. untuk bagian ini, berikan tantangan ke siswa untuk menyelesaikannya, tentunya Guru juga sudah mempunyai penyelesaiannya.

2. *cosinus suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi disamping sudut dengan sisi miring, ditulis $\cos C = \dfrac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi miring segitiga}}$.
3. *tangen suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan sisi di samping sudut, ditulis tan C = $\dfrac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi di samping sudut}}$.
4. *cosecan suatu sudut* didefinisikan sebagai panjang sisi miring dengan sisi di depan sudut, ditulis cosec $C = \dfrac{\text{sisi miring segitiga}}{\text{sisi di depan sudut}}$ atau cosec $C = \dfrac{1}{\sin C}$.
5. *secan suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi miring dengan sisi di samping sudut, ditulis sec $C = \dfrac{\text{sisi miring segitiga}}{\text{sisi di samping sudut}}$ atau sec $C = \dfrac{1}{\cos C}$.
6. *cotangen suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan sisi di samping sudut dengan sisi di depan sudut, ditulis cotan $C = \dfrac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi di depan sudut}}$ atau cotan $C = \dfrac{1}{\tan C}$.

Jika diperhatikan aturan perbandingan di atas, prinsip matematika lain yang perlu diingat kembali adalah teorema Phytagoras. Selain itu, pengenalan akan sisi miring, sisi di samping sudut, dan sisi di depan sudut tentunya dapat mudah diperhatikan. Nah, karena yang telah didefinisikan perbandingan sudut untuk sudut lancip *C*, silahkan Anda rumuskan ke enam jenis perbandingan sudut untuk sudut *A*.

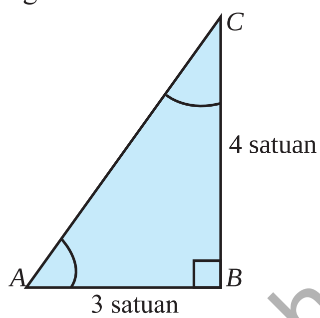
Contoh 8.4

Diberikan segitiga siku-siku ABC, siku-siku di B. Jika panjang sisi $AB = 3$ satuan,

$BC = 4$ satuan, tentukanlah sin A, cos C, dan tan A.

Alternatif Penyelesaian

Untuk segitiga di bawah ini, dengan Teorema Phytagoras diperoleh panjang sisi



Gambar 8.10 Segitiga siku-siku

$AC = 5$ satuan. Selanjutnya, dengan menggunakan Definisi 8.4,

bagian 1, 2,dan 3, maka berlaku:

$$\sin A = \frac{\textit{panjang sisi di depan sudut } A}{\textit{Panjang sisi miring}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos C = \frac{\textit{panjang sisi di samping sudut } C}{\textit{Panjang sisi miring}} = \frac{3}{5}$$

$$\tan A = \frac{\textit{panjang sisi di depan sudut } A}{\textit{panjang sisi di samping sudut } A} = \frac{4}{3}$$

Dengan pengalaman siswa akan konsep segitiga siku-siku dalam menyelesaikan Contoh 8.4. Berikan kesempatan ke siswa untuk menyelesaikan masalah tersebut.

Motivasi siswa akan kebermaknaan matematika dalam menyelesaikan masalah nyata.

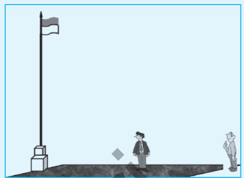
Berikan penjelesan tentang sifat-sifat yang diperoleh dari kemauan dalam menggali pengetahuan dari menyelesaikan Masalah 8.1.

Bantu siswa membangun kepercayaan diri siswa untuk memahami, menganalisis masalah nyata yang terkait trigonometri.

Berikan pertanyaan-pertanyaan yang membangun sikap ilmiah siswa dalam memahami masalah nyata yang mereka hadapi.

Masalah-8.1

Dua orang guru dengan tinggi badan yang sama yaitu 170 cm sedang berdiri memandang puncak tiang bendera di sekolahnya. Guru pertama berdiri tepat 10 m di depan guru kedua. Jika sudut elevasi guru pertama 60^0 dan guru kedua 30^0 maka dapatkah anda menghitung tinggi tiang bendera tersebut?

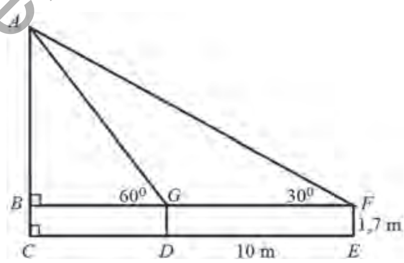


Gambar 8.11 Tiang Bendera

Memahami dan Merencanakan Pemecahan Masalah

Sudut elevasi: Sudut yang dibentuk oleh arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah atas

Misalkan tempat berdiri tegak tiang bendera, dan kedua guru tersebut adalah titik. Ujung puncak tiang bendera dan kepala kedua guru juga diwakili oleh titik, maka dapat diperoleh Gambar 8.12 sebagai berikut.



Gambar 8.12 Model masalah tiang bendera

Dimana:
AC = tinggi tiang bendera
DG = tinggi guru pertama
EF = tinggi guru kedua
DE = jarak kedua guru

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan pengalaman kita di awal pembicaraan di atas maka kita memiliki perbandingan, sebagai berikut:

$$\tan 60^\circ = \frac{AB}{BG} \Leftrightarrow BG = \frac{AB}{\tan 60^\circ}.$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BF} = \frac{AB}{10+BG} \Leftrightarrow AB = (10+BG).\tan 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow AB = \left(10 + \frac{AB}{\tan 60^\circ}\right).\tan 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow AB.(\tan 60^\circ) = \left(AB + 10.(\tan 60^\circ)\right).(\tan 30^\circ).$$

$$\Leftrightarrow AB.(\tan 60^\circ) = AB.(\tan 30^\circ) + 10.(\tan 60^\circ).(\tan 30^\circ).$$

$$\Leftrightarrow AB.\left[(\tan 60^\circ) - (\tan 30^\circ)\right] = 10.(\tan 60^\circ).(\tan 30^\circ).$$

$$\Leftrightarrow AB = \frac{10.(\tan 60^\circ).(\tan 30^\circ)}{\left[(\tan 60^\circ) - (\tan 30^\circ)\right]}.$$

Jadi, tinggi tiang bendera adalah:

$$AC = AB + BC \text{ atau } AC = \frac{10.(\tan 60^\circ).(\tan 30^\circ)}{\left[(\tan 60^\circ) - (\tan 30^\circ)\right]} + 1.7m$$

Berikan kesempatan ke siswa/i untuk mempresentasikan hasil kinerja mereka sebagai penyelesaian dari Masalah 8.1. Ingatkan siswa untuk menguasai prinsip perbandingan trigonometri.

Ingatkan siswa bahwa tinggi tiang bendera akan dihitung secara tuntas setelah kita mempelajari nilai tan 60°dan tan 30°. Materi ini akan dibahas pada Sub bab 5.

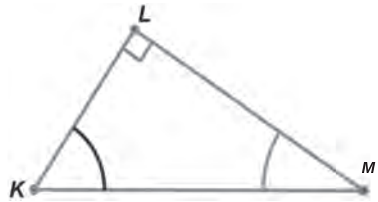
Ajukan pertanyaan ke siswa apa ciri-ciri sisi miring suatu segitiga siku-siku?

Ciri-ciri segitga siku-siku:

- *Perlu di ketahui, bahwa yang disebut sisi pada suatu segitiga siku-siku tidak selalu miring, tetapi sisi miring selalu dihadapan sudut siku-siku.*
- *Panjang sisi miring lebih besar dari sisi datar maupun sisi tegak.*

Contoh 8.5

Perhatikan segitiga siku-siku di bawah ini.



Gambar 8.13 Segitiga siku-siku *KLM*

Diketahui $\tan M = \dfrac{16}{30}$,

tentukanlah sin M dan cos M!

Alternatif Penyelesaian

Untuk menjawab contoh ini, kita mulai dari $\tan M = \dfrac{16}{30}$. Artinya, menurut Definisi 8.4, bahwa

$$\tan M = \frac{\text{Panjang sisi di depan sudut } M}{\text{Panjang sisi di samping sudut } M} = \frac{KL}{LM} = \frac{16}{30}$$

Jadi, panjang sisi $KL = 16$, dan $LM = 30$.
dengan Teorema Phytagoras, diperoleh $KM = 34$,
untuk menentukan nilai sin M dan cos K, menurut Definisi 8.4 diperoleh:

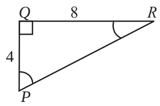
- $\sin M = \dfrac{\text{Panjang sisi di depan sudut } M}{\text{Panjang sisi miring}} = \dfrac{KL}{LM} = \dfrac{16}{34}$
- $\cos M = \dfrac{\text{Panjang sisi di samping sudut } M}{\text{Panjang sisi miring}} = \dfrac{LM}{KM} = \dfrac{30}{34}$.

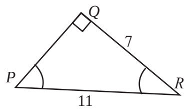
Perlu diketahui, bahwa yang disebut sisi pada suatu segitiga siku-siku tidak selalu miring, tetapi sisi miring selalu di hadapan sudut siku-siku.

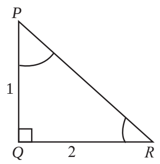
Uji Kompetensi 8.2

Uji kompetensi ini bertujuan untuk mengetahui kemampuan penguasaan siswa terhadap materi perbandingan sudut segitiga.
Berikan apresiasi bagi siswa yang belajar lebih giat dengan menuntaskan soal-soal pada uji kompetensi.
Terima semua ide-ide atau pertanyaan-pertanyaan dari siswa terkait trigonometri selain kajian yang ada pada buku.

1. Tentukanlah nilai sinus, kosinus, dan tangen untuk sudut P dan R pada setiap segitiga siku-siku di bawah ini. Nyatakanlah jawaban Anda dalam bentuk paling sederhana.

   a) 

   b) 

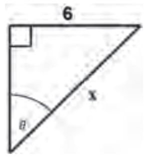
   c) 

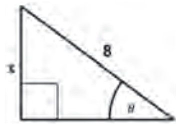
2. Diketahui suatu segitiga siku-siku, dengan nilai sinus salah satu sudut lancipnya adalah $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tentukanlah nilai cosinus, tangen sudut tersebut.

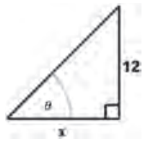
3. Pada sebuah segitiga KLM, dengan siku-siku di L, berlaku $\sin M = \frac{2}{3}$ dan panjang sisi $KL = \sqrt{10}$ cm, tentukan-lah panjang sisi segitiga yang lain.

4. Luas segitiga siku-siku RST, dengan sisi tegak RS adalah 20 cm^2. Tentukanlah nilai sinus, cosinus, dan tangen untuk sudut lancip T.

5. Di bawah ini diberikan tiga segitiga siku-siku, diketahui $\sin \theta = \frac{2}{5}$. Tentukanlah nilai x.

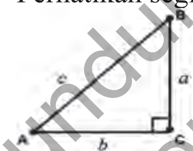
a) 

b) 

c) 

6. Pada segitiga XYZ dengan siku-siku di Y, $\cos Z = \dfrac{20}{24}$, tentukan nilai $\tan X$ dan $\tan Z$.

7. Perhatikan segitiga siku-siku di bawah ini.



Tunjukkan bahwa:

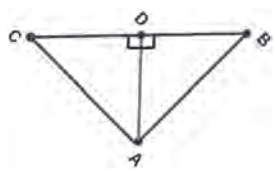
a) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

b. $\tan B = \dfrac{\sin B}{\cos B}$

c) $\text{cosec}^2 A - \text{cotan}^2 A = 1$

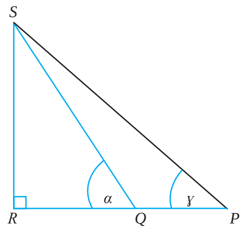
8. Dalam segitiga siku-siku ABC, siku-siku di A diketahui panjang $BC = a$ dan $\cos \angle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Tentukanlah panjang garis tinggi AD.



9. Diketahui $\sin x + \cos x = 3$ dan $\tan x = 1$, tentukanlah nilai $\sin x$ dan $\cos x$!

10. Diketahui segitiga *PRS*, seperti gambar di bawah. Panjang $PQ = 1$, $\angle RQS = \alpha$ dan $\angle RPS = \gamma$. Tentukanlah panjang sisi *RS*!



Projek

Rancanglah minimal tiga masalah nyata terkait penerapan perbandingan nilai sisi segitiga dan terkait trigonometri di bidang teknik bangunan dan bidang matematika. Selesaikanlah masalah tersebut dan buat laporannya serta sajikan di depan kelas.

Tugas proyek diberikan sebagai tugas individu untuk menginformasikan kepada siswa bahwa belajar tentang perbandingan sisi segitiga sangat diperlukan dalam perkembangan ilmu dan dalam menyelesaikan permasalahan kehidupan.

4. Nilai Perbandingan Trigonometri di Berbagai Kuadran

Pada awal subbab ini, akan dikaji nilai sinus, cosinus, tangen dan kebalikannya untuk domain sudut dalam satuan derajat atau radian. Selain itu, nilai semua perbandingan tersebut juga akan kita pelajari pada setiap kuadran dalam koordinat Kartesius. Mari kita pahami melalui pembahasan berikut ini.

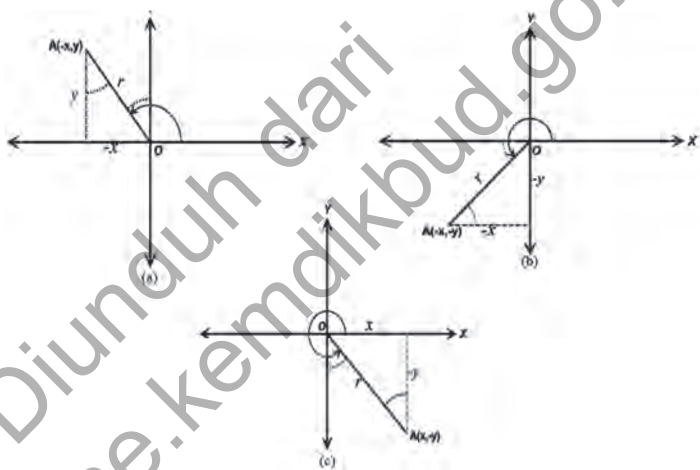
Misalkan titik $A(x, y)$, panjang $OA = r$ dan sudut $AOX = \alpha$. Mari kita perhatikan gambar di samping, dari segitiga siku-siku yang terdapat di kuadran I, berlaku :

Pada awal subbab ini informasikan kepada siswa bahwa akan didiskusikan mengenai nilai sinus, cosinus, tangen dan kebalikannya untuk domain sudut dalam satuan derajat atau radian. Selain itu, nilai semua perbandingan tersebut juga akan dipelajari pada setiap kuadran dalam koordinat kartesius.

Ajak siswa untuk memahaminya melalui pembahasan berikut ini.

- $\sin \alpha = \dfrac{y}{r}$.
- $\cos \alpha = \dfrac{x}{r}$.
- $\tan \alpha = \dfrac{y}{x}$.

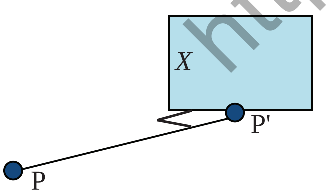
Dengan mempertimbangkan semua kombinasi koordinat titik pada koordinat Kartesius, kita dapat telusuri perbedaan tanda untuk ketiga perbandingan trigonometri yang utama.



Gambar 8.15 Kombinasi sudut pada koordinat Cartesius

Garis putus-putus pada gambar menyatakan projeksi *OA* ke setiap sumbu, misalnya pada Gambar 8.15(a), garis putus-putus adalah proyeksi sumbu *Y* di kuadran II. Sedangkan garis putus-putus melengkung menyatakan besar sudut yang besarnya sama, misalnya, pada Gambar 8.15 (b), garis putus-putus melengkung menyatakan dua sudut yang besarnya sama.

Berikan penjelasan ke siswa tentang makna proyeksi. Misalnya ajak siswa mengamati gambar berikut ini.



Titik P' merupakan proyeksi titik P pada bidang X.

Contoh 8.6

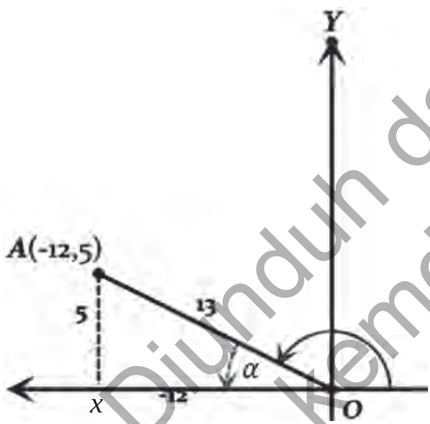
Misalkan diketahui titik-titik berikut ini:

1. A (–12,5) dan $\angle XOA = \alpha$.
2. B (15,–8) dan $\angle XOB = \theta$.

Tentukanlah nilai sin α dan tan α, serta cos θ dan tan θ!

Alternatif Penyelesaian

1. Dengan memperhatikan koordinat titik A (–12,5), sangat jelas bahwa titik tersebut terletak di kuadran kedua, karena x = –12, dan y = 5. Secara geometris, disajikan pada gambar berikut ini.



Gambar 8.16 Titik A (–12,5) pada kuadran II

Karena x = –12, dan y = 5, dengan menggunakan teorema Phytagoras diperoleh sisi miring, r = 13. Oleh karena itu, diperoleh :

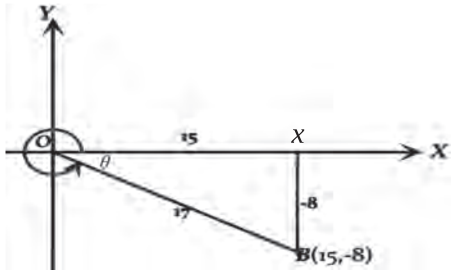
- $\sin \alpha = \dfrac{5}{13}$.
- $\tan \alpha = -\dfrac{5}{12}$.

2. Titik B (15, –8), berada di kuadran IV, karena x = 15, dan y = –8.

Untuk x =15, y = –8, dengan menggunakan teorema Phytagoras diperoleh sisi miring, r = 17. Oleh karena itu, berlaku:

Ajukan pertanyaan ke siswa mengapa segitiga yang terbentuk berada pada kuadran II.
Jika ada pertanyaan-pertanyaan atau ide-ide dari seorang siswa, berikan kesempatan ke siswa lain untuk memberikan tanggapan tentang ide/ pertanyaan tersebut.
Selain itu, pastikan siswa telah memahami penempatan sudut α pada segitiga pada Gambar 8.16 melalui pertanyaan berikut:

i. Mengapa sudut α tidak ditempatkan pada titik A?
ii. Mengapa bukan projeksi sumbu x yang dimunculkan untuk membentuk segitiga?



Gambar 8.17 Titik *B* (15, –8) pada kuadran IV

- $\cos \theta = \dfrac{15}{17}$.
- $\tan \theta = -\dfrac{8}{17}$.

Dari contoh di atas, dapat dipahami, ternyata nilai sudut perbandingan trigonometri, dapat bernilai positif juga negatif, tergantung pada letak koordinat titik yang diberikan. Selanjutnya, kebalikan dari kondisi pada Contoh 8.6, dapat diperhatikan pada contoh berikut ini.

Contoh 8.7

Pastikan siswa memahami bagaimana penulisan lain dari $90^\circ < \theta < 180^\circ$?, penulisan sudut tersebut dalam dituliskan dalam bentuk $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

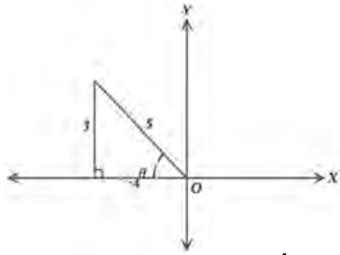
Hal ini diperlukan untuk memperkaya pengetahuan siswa dalam istilah matematika dan simbol-simbol matematika.

Jika diketahui:

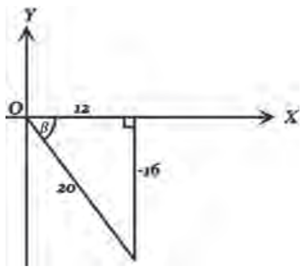
1. $\cos \theta = -\dfrac{4}{5}$ dengan $90^o < \theta < 180^o$, tentukan nilai cosec θ dan cotan θ.
2. $\tan \beta = -\dfrac{16}{12}$ dengan $90^o < \beta < 180^o$, tentukan nilai sin β dan cos β.

Alternatif Penyelesaian

1. Sudut θ yang terletak di kuadran II menjadi penentu tanda nilai perbandingan trigonometri. Dalam koordinat Cartesius, $\cos \theta = -\dfrac{4}{5}$, digambarkan sebagai berikut:



Gambar 8.18 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$



Gambar 8.19 $\tan \beta = -\frac{16}{12}$

Dari gambar di samping, mudah kita pahami bahwa:

- $\text{cosec } \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{5}{3}$
- $\text{cotan } \theta = \frac{1}{\tan \theta} = -\frac{4}{3}$

2. Dengan pemahaman yang sama, dapat kita gambarkan $\tan \beta = -\frac{16}{12}$, dengan β di kuadran IV sebagai berikut:

   Dengan atribut segitiga siku-siku yang sudah lengkap, seperti pada gambar di samping, dengan mudah kita menentukan:

   - $\sin \beta = -\frac{16}{20} = -\frac{4}{5}$
   - $\cos \beta = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

Melalui pembahasan Contoh 8.6 dan 8.7, Guru dan siswa berkolaborasi menyimpulkan tanda nilai perbandingan trigonometeri pada kuadran I, II, III, dan IV.

Pastikan siswa memahami Sifat 8.1, dengan mengajukan pertanyaan berikut :

1) *Sebutkan nilai perbandingan trigonometri yang lain yang nilainya* sec α *bertanda positif, di kuadran II.*
2) *Di kuadran berapa nilai perbandingan selalu positif? Bagaimana dengan* cotan α*?*

Berikan penjelasan ke siswa, pemahaman akan nilai setiap perbandingan bertanda negati atau positif sangat diperlukan untuk kajian selanjutnya.

Tentunya, dengan pengetahuan dari Gambar 8.20 dan pengalaman pembahasan Contoh 8.5 dan 8.6 di atas, dapat kita merumuskan nilai perbandingan trigonometri di setiap kuadran, yaitu:

Sifat-8.1

a. Jika $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, maka nilai sinus, cosinus, dan tangen bertanda positif.

b. Jika $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, maka nilai sinus bertanda positif dan nilai cosinus dan tangen bertanda negatif.

c. Jika $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, maka nilai tangen bertanda positif dan nilai sinus dan cosinus bertanda negatif.

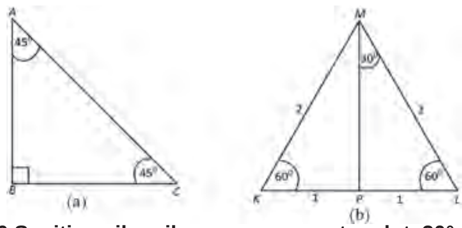
d. Jika $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, maka nilai cosinus bertanda positif dan nilai sinus dan tangen bertanda negatif.

Dalam kajian trigonometri ada istilah sudut istemewa, yang artinya sudut-sudut yang nilai perbandingan trigonometri dapat ditentukan secara eksak. Misalnya, 30°, 45°, 60°, dan 90° merupakan sudut istimewa di kuadran I. Selanjutnya (120°, 135°, 150°, 180°), (210°, 225°, 240°, 270°), dan (300°, 315°, 330°, 360°) berturut-turut adalah sudut-sudut istimewa di kuadran II, III, dan IV. Pada beberapa referensi yang lain, sudut-sudut istimewa tersebut dinyatakan dalam satuan radian.

Pembahasan selanjutnya, yaitu, bagaimana nilai-nilai perbandingan trigonometri untuk setiap sudut istimewa. Pertama kali, akan kita kaji nilai-nilai perbandingan tersebut di kuadran I.

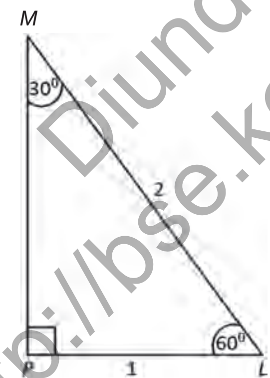
5. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 30°, 45° dan 60°

Mari perhatikan perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku istimewa. Segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku yang mengandung sudut 30°,45°,dan 60°. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 8.20 Segitiga siku-siku yang me-muat sudut 30°,45°,dan 60°

Perhatkan Gambar 8.20 (b), segitiga *KLM* adalah segitiga sama sisi. Kita menentukan nilai perbandingan trigonometri untuk setiap sudut 30° dan 60°.
Selanjutnya fokus kita adalah segitiga *MPL* seperti pada Gambar 8.21.



Gambar 8.21 Segitiga siku-siku *MPL*

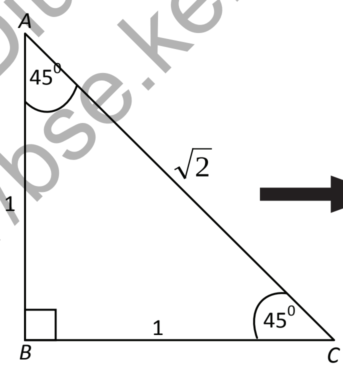
Dengan teorema phytagoras, diperoleh panjang MP = $\sqrt{3}$.
Oleh karena itu berlaku:

- $\sin 30° = \frac{1}{2}$
- $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\cos 60° = \frac{1}{2}$
- $\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

♦ Untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri untuk sudut 45°, silahkan diskusikan dan kaji bersama teman-temanmu melalui gambar segitiga *ABC* pada Gambar 8.20(a).

Dengan pemahaman siswa tentang kajian nilai sudut perbandingan pada segitiga MPL, bangun motivasi siswa untuk memiliki ketelitian dalam menyelesaikan kasus pada Gambar 8.20(a).
Ajak siswa untuk mengajukan ide dalam menyelesaikan masalah tersebut, seperti yang dituliskan dalam alternatf penyelesaian di samping.

Alternatif Penyelesaian

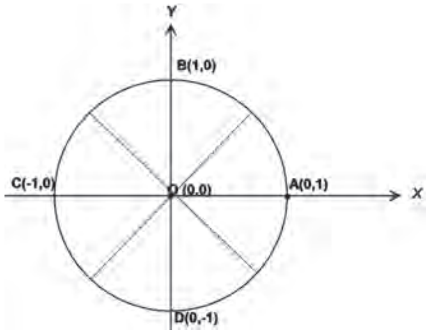


- $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- $\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$

Bangun kepercayaan diri siswa untuk memiliki komitmen dalam dirinya untuk tetap tangguh memahami dan menyele-

Untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri pada saat 0° dan 90°, mari kita cermati gambar berikut ini.

Secara umum, dapat ditentukan nilai semua sudut istimewa, yaitu dengan cara menentukan setiap koordinat titik pada lingkaran dengan jari-jari 1.



Gambar 8.22 Perbandingan Trigonometri

Misalnya untuk titik *A* (0,1),

- sin 0° = 0
- cos 0° = 1
- tan 0° = 0

dan untuk menentukan nilai perbandingan sudut pada saat sudut 90°, digunakan titik B(1,0).

- sin 90° = 1
- cos 90° = 0
- tan 90° tak terdefinisi

Selengkapnya, nilai setiap perbandingan trigonometri pada setiap sudut istimewa 0°,30°,45°,60° dan 90°, di sajikan di Tabel 8.1 berikut.

Tabel 8.1 Nilai Perbandingan Trigonometri pada Kuadran Pertama

Sudut	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tak terdefinisi

saikan masalah-masalah trigonometri.

Ajak siswa memahami informasi lain yang tersedia pada Gambar 8.22.

Pastikan siswa memahami gambar tersebut dengan mengajukan pertanyaan berikut ini.

Dari Gambar 8.22, tentukan :

sin 180˚, cos 180˚, tan180˚
sin 270˚, cos 270˚, tan270˚
sin 360˚, cos 360˚, dan tan360˚

Dengan menggunakan Gambar 8.21, dan Tabel 8.1, minta siswa untuk berdidkusi dengan temannya untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri pada sudut-sudut istimewa di kuadran II, III, dan IV.

Sebagai pedoman untuk memastikan hasil kerja siswa, minta siswa untuk *memperhatikan nilai perbandingan trigonometri untuk semua sudut istimewa.*

Untuk memastikan pemahaman siswa akan Tabel 8.2, ajak siswa untuk menuntaskan perhitungan penyelesaian Masalah 8.1.

$$AC = \frac{10 \times \tan 60^\circ \times \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ} + 1{,}7$$

$$AC = \frac{10 \times \sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}} + 1{,}7$$

$$AC = \left(5\sqrt{3} + 1{,}7\right)m, \text{ atau}$$

$$AC \approx 10{,}36m.$$

- Sekarang, dengan menggunakan Gambar 8.20, dan Tabel 8.1, kamu diskusikan dengan temanmu untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri pada sudut-sudut istimewa di kuadran I, II, III, dan IV.

Sebagai pedoman untuk memastikan hasil kerjamu, secara lengkap di bawah ini disajikan nilai perbandingan trigonometri untuk semua sudut-sudut istimewa.

Tabel 8.2 Tabel lengkap Nilai perbandingan trigonometri pada kuadran I, II, III, dan IV

sudut	sin	cos	tan
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	tak terdefinisi
120°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	–1
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

sudut	sin	cos	tan
180°	0	–1	0
210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
225°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
240°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270°	–1	0	tak terdefinisi
300°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	–1
330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
360°	0	1	0

Masalah-8.2

Seorang anak ingin menentukan besar sudut dari sebuah perbandingan trigonometri. Diberikan kepadanya perbandingan sebagai berikut.

sin $\alpha = \frac{1}{2}$, tugasnya adalah menentukan nilai α (besar sudut)!

Alternatif Penyelesaian

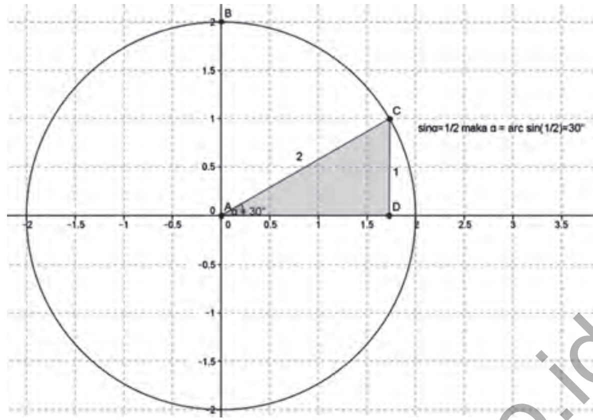
Penyelesaian I:

Langkah-langkah yang dilakukannya adalah

1. Menggambarkan sebuah segitiga siku-siku dan menerapkan sifat perbandingan sinus. Adapun cara yang dilakukannya adalah menggambarkan sisi di hadapan sudut dengan panjang 1 satuan dan menggambarkan sisi miring sebuah segitiga dengan panjang 2.

Berikan penjelasan ke siswa bahwa dengan tangguh dalam menyelesaikan masalah dalam matematika akan menjadi modal dalam menghadapi kehidupan nyata yang menyajikan berbagai masalah kehidupan.

Oleh karena itu, yakinkan siswa tetap tangguh dalam menyelesaikan Masalah 8.2 berikut ini sebagai media untuk melatih ketelitian dan tangggung jawab siswa.



Gambar 8.23 Segitiga dalam lingkaran

2. Selanjutnya dia mengukur besar sudut dari segitiga siku-siku yang sudah terbentuk dengan menggunakan busur derajat.
3. Berdasarkan pengukuran yang dilakukan ternyata diperoleh besarnya sudut α adalah 30° dan 150°.

Penyelesaian II:

1. Alternatif penyelesaian yang lain yaitu dengan menggunakan kalkulator. Dengan fasilitas yang dimiliki kalkulator dapat diperoleh invers nilai sin, yaitu

   $\alpha = \sin^{-1}\dfrac{1}{2} = 30°$.
2. $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}$ dituliskan dengan arcsin $\dfrac{1}{2}$.

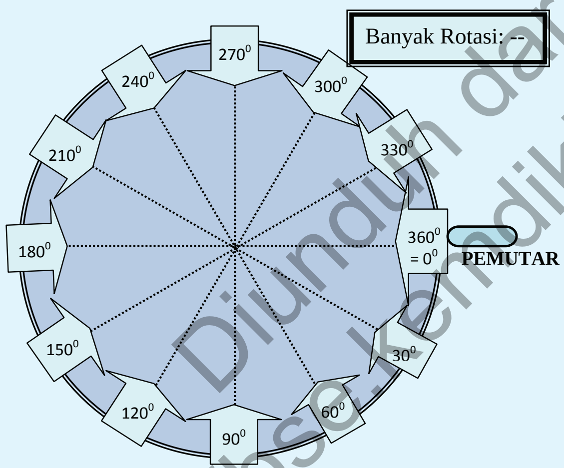
Penyelesaian III:

1. Alternatif yang mungkin dilakukan adalah dengan melihat tabel. Untuk kasus nilai perbandingan trigonometri sudut istimewa pada kuadran I, kuadran II, kuadran III, dan kuadran IV dapat menggunakan Tabel 8.2 dan *α* =30° dan 150°.

Masalah-8.3

Suatu kelompok belajar remaja yang terdiri dari siswa/i SMA, melakukan permainan lingkaran berputar dalam menentukan pilihan hadiah. Setiap anggota memiliki kesempatan untuk memilih hadiah melalui memutar papan lingkaran. Namun hadiah terbesar, jam tangan, akan muncul jika nilai sinus besar sudut yang dihasilkan putaran adalah $\frac{1}{2}$. Giliran pertama, Edo memutar papan banyak rotasi menunjukkan 3 dan papan lingkaran berhenti 120^o.

Menurut kamu, apakah Edo memperoleh jam tangan?



Gambar 8.24. Permainan lingkaran berputar

Untuk membuat warna dalam pembelajaran, Guru dimungkinkan untuk mendesain suatu pembelajaran Masalah 8.3 melalui suatu real game. Oleh karena itu, guru perlu menyediakan alat peraga untuk keperluan masalah tersebut. Beri penjelasan ke siswa, bahwa pelajaran matematika adalah pelajaran yang sangat diperlukan dalam kehidupan ini.

Alternatif Penyelesaian

Pertama kali, perlu kamu cermati bahwa jika papan banyak rotasi menunjukkan 3 rotasi dan papan lingkaran berhenti pada 120^o artinya besar sudut yang dihasilkan putaran Edo adalah 1200^o. Selanjutnya, kita akan menentukan sin 1200^0 .

Satu putaran memiliki arti posisi alat pemutar kembali ke posisi awal (0^0). Meskipun angka di papan banyak

Berikan kesempatan ke siswa untuk menunjukkan hasil kerja dalam menentukan sinus 1500º seperti penyelesaian di samping.
Pastikan siswa paham dalam menentukan nilai perbandingan trigonometri bila sudut lebih dari satu putaran dengan meminta siswa menentukan nilai dari sinus, cosinus dan tangen untuk ukuran sudut berikut:
a) 18000°
b) 24000°
c) $(1500^\circ)^2$

rotasi menunjukkan 5 atau 8, artinya nilai perbandingan trigonometri (sinus, cosinus, dan tangen) sama dengan nilai nilai perbandingan trigonometri sudut 0^0.
Oleh karena itu, besar sudut 1200º dapat dinyatakan:

$1200^o = 3 \cdot (360^0) + 120^0.$

Jadi,

$\sin 1200^o = \sin 120^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Dengan demikian, Edo memperoleh hadiah jam tangan pada permainan kelompok belajar tersebut.

- Jika Siti, menghasilkan besar sudut 1500^0, selidiki apakah Siti juga memperoleh jam tangan?

$1500^\circ = 4 \cdot (360^\circ) + 60^\circ$

Dengan demikian:

$$\sin 1500^0 = \sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Artinya, Siti tidak mendapat hadiah jam tangan.

Ajak siswa dalam mengetahui membaca Tabel 8.2. Ingatkan siswa, ketrampilan membaca tabel perlu dilatih sebagai modal untuk peningkatan pengetahuan siswa.
Pastikan siswa dengan cepat menentukan nilai β *dan* θ *dengan mengamati Tabel 8.2, sehingga diperoleh jawaban:*

$\beta = 60^\circ, 300^\circ$;
$\theta = 0^\circ, 180^\circ$, *dan* 360°.

Latihan 8.1

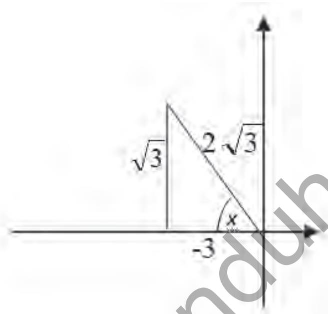
1. Tentukan nilai β jika $\cos \beta = \frac{1}{2}$.
2. Tentukan nilai θ jika $\tan \theta = 0$.

Latihan 8.2

Jika $\tan x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$, dan x tumpul berapakah nilai $\cos x$?

Alternatif Penyelesaian

Jika x tumpul, maka x berada di kuadran ke IV, sehingga gambar segitiga siku-siku berada di kuadran ke IV. Perhatikan gambar!



Sehingga untuk nilai $\cos x = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Berikan kesempatan pada siswa untuk mencoba menyelesaikan soal Latihan 8.2.

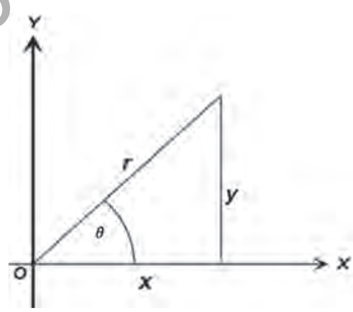
Berikan kepada siswa yang menemukan penyelesaian sampai tuntas seperti alternatif penyelesaian latihan tersebut.

Contoh 8.8

Perhatikan Gambar 8.25!

Tunjukkan bahwa

- $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\text{cotan}^2\,\theta + 1 = \text{cosec}^2\,\theta$



Gambar 8.25 Segitiga siku-siku

Jelaskan ke siswa akan kebermaknaan belajar aljabar di SMP dalam menyelesaikan Contoh 8.8. Pastikankan mereka mampu dalam memanipulasi bentuk-bentuk aljabar seperti yang diberikan pada alternatif penyelesaian.

Untuk memastikan pemahaman siswa dalam manipulasi aljabar, minta siswa untuk menemukan bentuk kesamaan yang mungkin diperoleh dari persamaan 1), 2), dan 3). Dari persamaan 1) siswa harus menemukan:

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

Dari persamaan 2), siswa harus menemukan:

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

dan dari persamaan 3), siswa harus menemukan:

$cotan^2\theta = cosec^2\theta - 1$

Alternatif Penyelesaian

Dari Gambar 8.25 berlaku:

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}, \ \cos\theta = \dfrac{x}{r}.$

Nilai perbandingan sin θ dan cos θ dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x}$$

sedangkan tan $\theta = \dfrac{y}{x}$.

sehingga berlaku bahwa:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} = \tan\theta \Leftrightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

Perlu kita kenalkan, bahwa (sin θ)(sin θ) = (sin $\theta)^2$ = $\sin^2\theta$; ($\sin^2\theta$ dibaca sinus kuadrat *tetha*). Tetapi perlu diingat bahwa, $\sin^2\theta \neq \sin\theta^2$.

Tentunya, jika sin $\theta = \dfrac{y}{r}$ maka $\sin^2\theta$ = (sin θ).(sin θ) = $\left(\dfrac{y}{r}\right).\left(\dfrac{y}{r}\right) = \dfrac{y^2}{r^2}$.

Sama halnya untuk memahami $\cos^2\theta = \dfrac{x^2}{r^2}$, dan $\tan^2\theta = \dfrac{y^2}{x^2}$.

Jumlah dari sinus kuadrat *tetha* dengan cosinus kuadrat *tetha* dinyatakan sebagai berikut:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

Jadi ditemukan:

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ....(1)

Persamaan ini disebut sebagai persamaan identitas trigonometri.

Dari persamaan ini kita dapat menemukan turunan rumusan dalam trigonometri. Misalnya, jika kedua ruas persamaan tersebut dibagi $\cos^2\theta$, (dengan syarat $\cos^2\theta \neq 0$), maka persamaan (1) berubah menjadi:

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \text{ ....(2)}$$

Jika kita lanjutkan membagi kedua ruas persamaan (1) dengan $\sin^2\theta$, maka berlaku:

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} \Leftrightarrow 1 + \text{cotan}^2\theta = \text{cosec}^2\theta \text{ ....(3)}$$

Formula di atas berlaku, untuk semua satuan sudut yang sama. Misalnya, $\alpha = 15°$, maka $2\alpha = 30°$.
Oleh karena itu berlaku:

$$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = \sin^2 30° + \cos^2 30° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Ingat kembali bahwa, $\sin^2 30° = \frac{1}{4}$, tetapi $\sin (30°)^2 = \sin 900° = 0$, (sudahkah kamu tahu alasannya?).

Berdasarkan hasil pembahasan Masalah 8.2 dan 8.3 serta Contoh 8.7, dirumuskan sifat berikut ini.

Berikan kesempatan siswa untuk menunjukkan bahwa: $900° = 2.(360°) + 180°$,
Akibatnya
$\sin 900° = \sin 180° = 0$.

Sifat-8.2

Sifat Perbandingan trigonometri sudut dalam Segitiga siku-siku
Jika Δ *ABC* segitiga siku-siku dengan siku-siku di *B*, *AB* = *x*, *BC* = *y*, *AC* = *r*, dan $\angle BAC = a$ maka:

a. $\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$

b. $\text{cotan } a = \dfrac{\cos a}{\sin a}$

c. $(\sin a)^2 = \sin^2 a$ dan $(\cos a)^2 = \cos^2 a$
d. $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$(identitas trigonometri).
$\tan^2 a + 1 = \sec^2 a$
$1 + \text{cotan}^2 a = \text{cosec}^2 a$

Guru berkolaborasi dengan siswa dalam merumuskan Sifat 8.2 dari pengalaman belajar melalui Contoh 8.8.

Minta siswa untuk memahami masalah berikut untuk melatih daya nalar siswa dengan suatu masalah nyata.
Tuntun siswa supaya mampu menyusun bahasa simbol matematik masalah yang terdapat pada Masalah 8.4.

Ajak siswa memahami makna apa yang mereka bisa selesaikan pada Masalah 8.4.
Berikan kesempatan kepada siswa untuk memberikan idenya tentang makna dari hasil perhitungan yang mereka temukan.

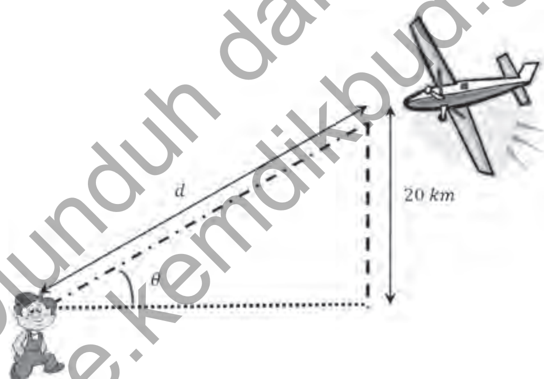
Misalnya, karena jarak pesawat ke tanah adalah 20km, dan setelah dihitung menggunakan sudut elevasi, ditemukan d = 20km, artinya posisi pesawat berada di atas anak.
Untuk sudut elevasi 1200, diperoleh $d = \dfrac{40}{3}\sqrt{3}$ *km, artinya pesawat bergerak sedemikian sehingga posisinya berada di arah berlawanan dengan si Bolang.*

Masalah-8.4

Di daerah pedesaan yang jauh dari bandar udara, kebiasan anak-anak jika melihat/mendengar pesawat udara sedang melintasi perkampungan mereka. Bolang, mengamati sebuah pesawat udara, yang terbang dengan ketinggian 20 km. Dengan sudut elevasi pengamat (Bolang) terhadap pesawat adalah sebesar θ, tentukanlah jarak pengamat ke pesawat jika : $\theta = 30°$, $\theta = 90°$, dan $\theta = 120°$.

Alternatif Penyelesaian

Ilustrasi persoalan di atas dapat disajikan pada Gambar 8.26.



Gambar 8.26 Sketsa pengamatan terhadap pesawat udara dengan sudut elevasi *θ*.

Untuk menentukan jarak pengamat terhadap pesawat, dengan diketahui ketinggian terbang pesawat, kita menentukan sin θ, (kenapa?).

$$\text{Untuk } \theta = 30°, \text{ maka } \sin 30° = \frac{20}{d} \Leftrightarrow d = \frac{20}{\sin 30°} = \frac{20}{1/2} = 40 \text{ km.}$$

- Kesimpulan apa yang dapat kamu tarik bila sudut elevasi 90°?
- Selidiki posisi si Bolang dengan pesawat jika sudut elevasi 120°.

Masalah-8.5

Sebuah perusahaan memproduksi mainan. Hasil penjualan bulanan (dalam satuan ribuan unit) selama 2 tahun diprediksi sebagai berikut

$$S = 23{,}1 + 0{,}442t + 4{,}3\cos\left(\pi t/6\right)$$

dengan t = waktu (bulan)

t = 1 merepresentasikan hasil penjualan bulan Januari tahun 2010.

Tentukanlah prediksi penjualan pada bulan Februari 2010 dan bulan April 2011.

Jelaskan ke siswa bahwa salah satu penerapan trigonomteri adalah sebagai fungsi hasil produksi mainan musiman.

Bangun motivasi siswa, masih banyak penerapan lain dari trigonometri dalam kehidupan nyata.

Yakinkan siswa bahwa dengan karakter tangguh menghadapi masalah semakin terasah melalui memahami dan meyelesaikan masalah nyata.

Alternatif Penyelesaian

Jika bulan Januari tahun 2010 menyatakan waktu t = 1, maka bulan Februari 2010 menyatakan waktu t = 2, dan bulan April 2011 menyatakan t = 16.

1. Prediksi penjualan mainan pada bulan Februari 2010, waktu $t = 2$ adalah:

$$S = 23{,}1 + 0{,}442.(2) + 4{,}3\cos\left(t\pi/6\right)$$

$$S = 23{,}1 + 0{,}884 + 4{,}3\cos(60°)$$

$$S = 23{,}984 + 4{,}3.\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}134$$

Jadi mainan yang terjual pada bulan Februari 2010 sebanyak 26.134 unit.

2. Prediksi penjualan mainan pada bulan April 2011, $t = 16$ adalah:

$$S = 23{,}1 + 0{,}442.(16) + 4{,}3\cos\left(16\pi/6\right)$$

$$S = 23{,}1 + 0{,}442.(16) + 4{,}3\cos(480^o)$$

$S = 30{,}172 + 4{,}3\cos(120^o)$ (kenapa $\cos(480^o) = \cos(120^o)$?)

$$S = 30{,}172 + 4{,}3.\left(-\frac{1}{2}\right) = 28{,}022$$

Karena jumlah penjualan dalam ribuan unit, maka prediksi penjualan pada bulan April 2011 adalah 28.022 unit.

Topik ini merupakan topik yang menuntut psikomotor dari anak untuk menggambarkan grafik fungsi trigonometri.
Ingatkan siswa, kemampuan membaca grafik perlu dilatih supaya grafik yang dihasilkan memiliki makna pada siswa.
Beri penjelasan ke siswa bahwa setiap grafik memiliki karakter yang berbeda dengan grafik fungsi yang lain.

6. Grafik Fungsi Trigonometri

a. Grafik Fungsi $y = \sin x$, $x \in [0°, 360°]$.

Dengan menggunakan nilai-nilai sudut yang telah diberikan di atas, mari kita selesaikan persamaan berikut ini.

Contoh 8.9

Tentukanlah nilai x yang memenuhi setiap persamaan di bawah ini:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$

b) $\sin x + \sqrt{2} = -\sin x$, $x \in [0, 2\pi]$

Alternatif Penyelesaian

$x \in [0, 2\pi]$ merupakan domain untuk menyelesaikan persamaan pada bagian a).

a) $\sin x = \frac{1}{2}$, hanya berlaku untuk $x = 30°$ dan $x = 150°$, karena perbandingan trigonometri hanya bernilai positif di kuadran I dan II. Sedangkan untuk $x = 210°$ dan $x = 330°$, nilai $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Pasangan nilai x dengan nilai perbandingan sin x merupakan suatu koordinat titik pada grafik fungsi sinus, yaitu koordinat:

$$\left(30°, \frac{1}{2}\right), \left(150°, \frac{1}{2}\right), \left(210°, -\frac{1}{2}\right), \left(240°, -\frac{1}{2}\right)$$

b) Persamaan $\sin x + \sqrt{2} = -\sin x \Leftrightarrow 2\sin x = -\sqrt{2}$ atau $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Jika kamu sudah menguasai Tabel 8.2, tentunya dengan mudah, kamu dapat menyebutkan bahwa nilai x yang memenuhi adalah $x = 225°$ dan $x = 315°$. Selain itu juga, kita harus menguasai bahwa nilai $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ pada saat $x = 45°$ dan $x = 135°$.

Oleh karena itu, sekarang kita memiliki pasangan titik:

$$\left(45°,\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(135°,\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(225°,-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(315°,-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

Selain pasangan titik besar sudut dan nilai perbandingan trigonometri di atas, tentunya, masih terdapat pasangan koordinat yang lain, yaitu:

- $\sin x = 0$, untuk $x = 0$, $x = 180°$ dan $x = 360°$.
  Akibatnya diperoleh: (0°,0), (180°,0), (360°,0).
- $\sin x = 1$, untuk $x = 90°$, $\sin x = -1$ untuk $x = 270°$.
  Akibatnya berlaku: (90°,1), (270°,1).

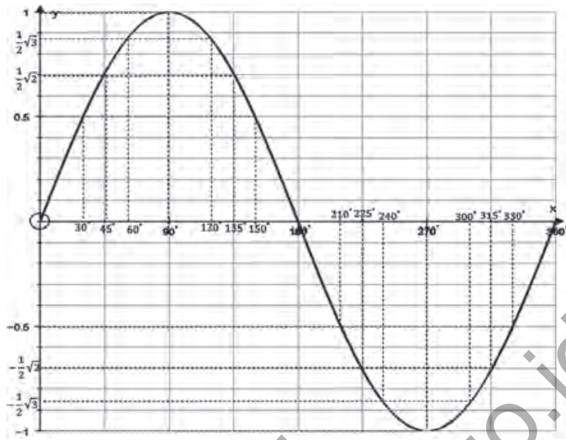
  $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, untuk $x = 60°$, dan $x = 120°$, serta $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ pada saat $x = 240°$, dan $x = 300°$. Oleh karena itu berlaku:

$$\left(60°,\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(120°,\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(240°,-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(300°,-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

Secara kumulatif hasil semua pasangan koordinat di atas, kita sajikan pada Gambar 8.27.

Topik ini merupakan topik yang menuntut psikomotor dari anak untuk menggambarkan grafik fungsi trigonometri.
Ingatkan siswa, kemampuan membaca grafik perlu dilatih supaya grafik yang dihasilkan memiliki makna pada siswa.
Beri penjelasan ke siswa bahwa setiap grafik me-

miliki karakter yang berbeda dengan grafik fungsi yang lain.



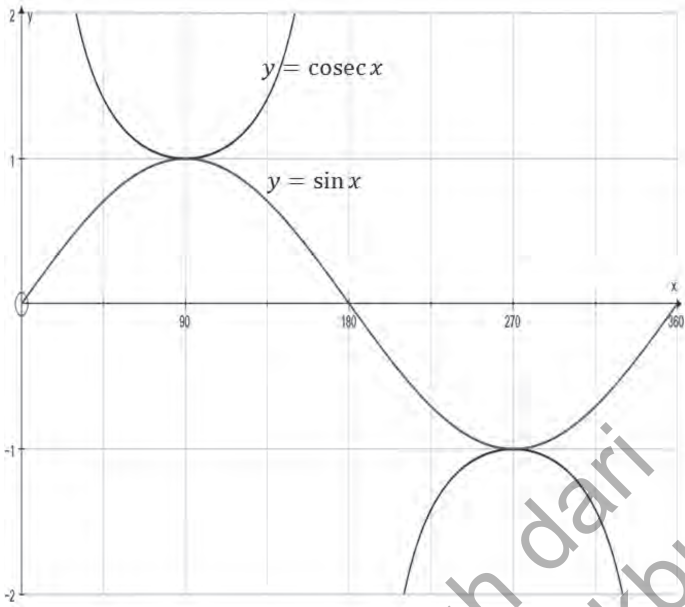
Gambar 8.27 Grafik fungsi *y* = sin *x*, *x* ϵ [0°,360°]

Grafik fungsi $y = \sin x$, $x \in [0°, 360°]$, berbentuk gelombang yang bergerak secara teratur seiring pergerakan x. Keterangan yang diperoleh dari grafiks fungsi $y = \sin x$ adalah sebagai berikut:

- Simpangan gelombang = 1 (Simpangan gelombang adalah jarak dari sumbu x ke titik puncak gelombang).
- Periode gelombang = satu putaran penuh.
- Grafik $y = \sin x$ memiliki nilai $y_{max} = 1$ dan $y_{min} = -1$.
- Titik maksimum gelombang adalah $(90^o, 1)$ dan titik minimumnya $(270^o, -1)$.

Secara manual, grafik di atas dapat kamu gambarkan pada kertas dengan spasi yang jelas.

- Tentukan pasangan koordinat titik-titik yang melalui grafik fungsi $y = \text{cosec } x$, $x \in [0°,360°]$. Kemudian sajikan pasangan titik tersebut dalam grafik fungsi.



Grafik $y = \sin x$ (garis berwarna biru) dan grafik $y = cosec\ x$

Pasangan titik-titik yang dilalui grafik $y = cosec\ x$, $x \in [0°, 360°]$

Dinyatakan dalam tabel berikut (untuk sudut-sudut istimewa):

x	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0
$y = \text{cosec } x$	*Tak terdefinisi*	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$

x	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
$y = \text{cosec } x$	*Tak terdefinisi*	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	*Tak terdefinisi*
$y = \sin x$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

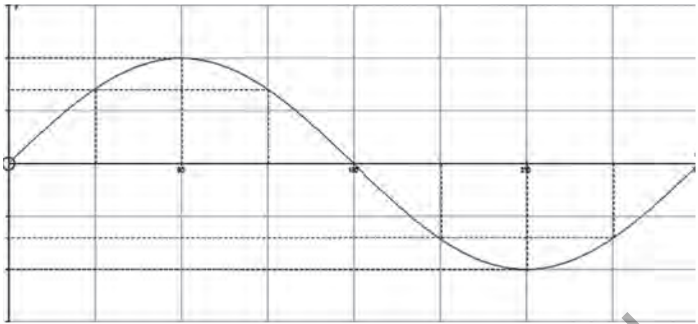
Perhatikan grafik $y = a \sin x$ di bawah ini. Cermati perbedaannya dengan grafik $y = \sin x$. Misalnya, pilih $a = 2$, sehingga diperoleh grafik di bawah ini. Perubahan nilai konstanta a mengakibatkan perubahan terhadap nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $y = a \sin x$.

Untuk melatih siswa terampil dalam mensketsa grafiks, koordinasikan siswa untuk menentukan pasangan koordinat titik-titik yang dilalui oleh grafik y=cosec x, x $\in$ [0°,360°], *dan menyajikan titik-titik tersebut dalam grafik seperti di samping.*

Pastikan siswa mampu membaca grafik di samping melalui mengajukan pertanyaan berikut ini,misalnya:

Sebutkan nilai fungsi y = cosec x, bila x = 135°.

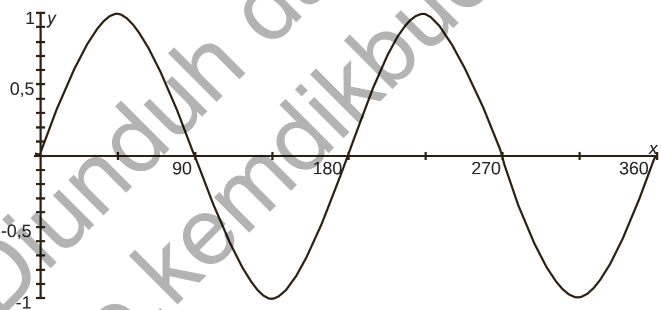
Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi.



Gambar 8.28 Grafik fungsi *y* = *a* sin *x*, *x* ϵ [0°,360°], *a* ϵ *R*

Berikan kesempatan kepada siswa untuk bekerja dalam kelompok untuk menyimpulkan ide/informasi yang diperoleh dari grafik.
Pastikan siswa memahami persamaan dan perbedaan grafik $y = a \sin x$ dan $y = \sin 2x$ melalui mengajukan pertanyaan-pertanyaan, misalnya:
Untuk domain fungsi yang sama, yaitu $x \in [0°,360°]$, berapa kali grafik $y = \sin 2x$ mencapai nilai maksimum fungsi?

♦ Cermati grafik $y = a \sin x$ dengan grafik $y = \sin 2x$ berikut ini. Berikan kesimpulan yang kamu temukan!



Gambar 8.29 Grafik fungsi $y = \sin 2x$

Selanjutnya, akan kita bandingkan grafik fungsi di atas dengan grafik fungsi
$y = \cos x$, $x \in [0°,360°]$.

b. Grafik Fungsi $y = \cos x$, $x \in [0°,360°]$

Contoh 8.10

Mari cermati beberapa persamaan di bawah ini.

1) $(\cos x)^2 - 2.\cos x = -1$.
2) $\sqrt{8}.\cos x - 2 = 0$.

Alternatif Penyelesaian

1) Persamaan $(\cos x)^2 - 2.\cos x = -1$ merupakan persamaan trigonomteri berbentuk persamaan kuadrat. Tentunya, untuk suatu persamaan kuadrat kita membutuhkan akar-akar persamaan kuadrat tersebut. Oleh karena itu dapat kita tulis:

   $(\cos x)^2 - 2.\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos x - 1).(\cos x - 1) = 0$

   atau $(\cos x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$.

   Nilai x yang memenuhi persamaan $\cos x = 1$ adalah $x = 0°$ dan $x = 360°$ (kembali sesuaikan dengan Tabel 8.2).

   Nilai $\cos x = -1$ berlaku untuk $x = 180°$ dan $\cos x = 0$ untuk $x = 90°$ dan $x = 270°$.Akibatnya, kita temukan pasangan titik:

   $(0°,1)$, $(90°,0)$, $(180°,-1)$, $(270°,0)$ dan $(360°,1)$

2) Persamaan $\sqrt{8}.\cos x - 2 = 0$ dapat kita sederhanakan menjadi:

   $2\sqrt{2}.\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

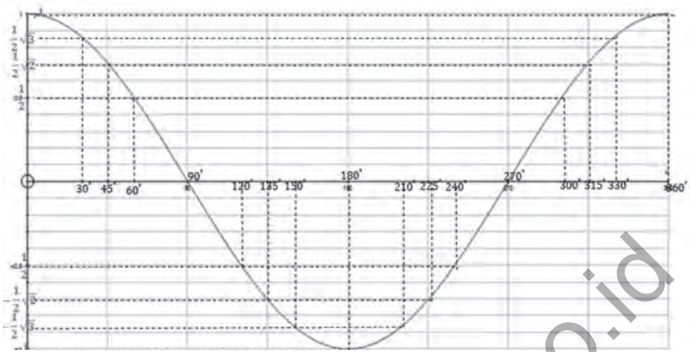
   Nilai x yang memenuhi persamaan $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ adalah untuk $x = 45°$ dan $x = 315°$ (lihat Tabel 8.2). Sedangkan untuk $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ berlaku untuk $x = 135°$ dan $x = 225°$. Oleh karena itu, kita dapat menuliskan pasangan titik-titik berikut:

$$\left(45°,\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(135°,-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(225°,-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \left(315°,\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

Selanjutnya, minta siswa untuk membentuk pasangan-pasangan titik yang lain, yang dilihat dari Tabel 8.2.

- Selanjutnya, silahkan bentuk pasangan-pasangan titik yang lain, dapat kita lihat dari Tabel 8.2.

Jadi, dengan menggunakan semua pasangan-pasangan titik di atas, berikut ini disajikan pada grafik berikut.



Gambar 8.30 Grafik fungsi y = cos *x*, *x* ∈ [0°,360°]

Grafik fungsi $y = \cos x$ berbentuk gelombang yang bergerak secara terartur dari titik mencapai titik hingga titik .

- ♦ Berikan keterangan lain yang kamu peroleh dari grafik $y = \cos x$.
- ♦ Selanjutnya, tentukanlah pasangan koordinat titik-titik yang dilalui grafik fungsi $y = \sec x$, untuk $x \in [0°, 360°]$. Kemudian sajikan pasangan titik-titik tersebut dalam grafik fungsi trigonometri.

x	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0
$y = \sec x$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	*Tak terdefinisi*	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
$y = \cos x$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

x	180^0	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
$y = \sec x$	-1	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	*Tak terdefinisi*	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1
$y = \cos x$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1

Dari grafik $y = \cos x$, minta siswa menemukan ciri-ciri grafik tersebut. Beri kesempatan ke siswa lain untuk member masukan atau menyimpulkan sifat-sifat grafik $y = \cos x$, yaitu:

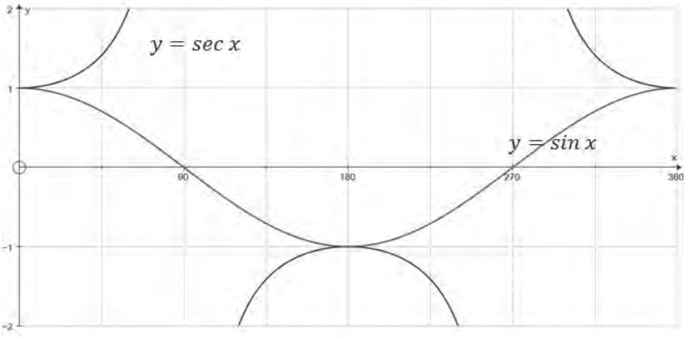
a) Simpangan grafik = 1

b) Nilai maksimum fungsi = 1; nilai minimum fungsi = -1

c) Periode gelombang = 2π.

d) Perubahan nilai fungsi dari x = 0° turun sampai x = 180° kemudian naik hingga mencapai nilai maksimum fungsi.

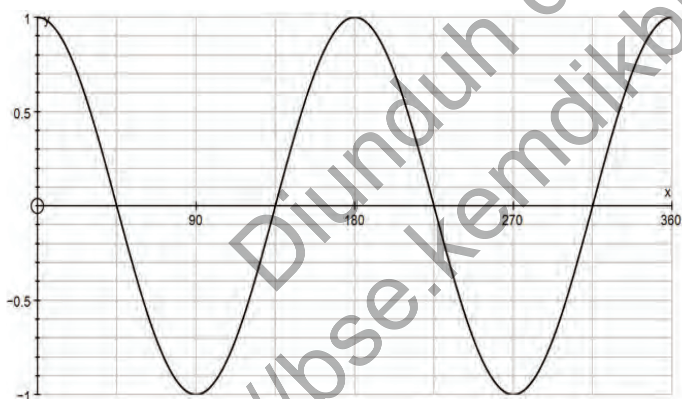
Sehingga disketsakan seperti grafik berikut ini.



Pastikan siswa mampu membaca grafik di samping dengan mengajukan pertanyaan perbedaan dan persamaan grafik y = sec x dan y = cos x.

Gambar 8.31 di bawah ini adalah grafik $y = \cos bx$, $x \in [0°,360°]$, $b \in R$.

Cermati dan tentukan perbedaan dengan grafik $y = \cos x$.



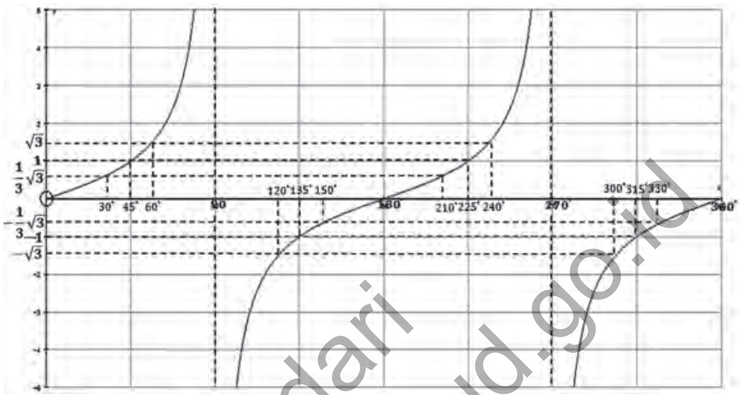
Gambar 8.31 Grafik fungsi $y = \cos bx$, $x \in [0°,360°]$, $b \in R$

- Untuk $x \in [0°, 360°]$, grafik $y = \cos x$ selalu mulai bergerak dari $y = 1$. Kondisi berbeda dengan grafik $y = b \cos x$, untuk $b \in R$, tetapi juga memiliki kesamaan. Temukan perbedaan dan kesamaannya.
- Fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$, untuk $x \in [0°,360°]$ akan bernilai sama untuk suatu x. Tentukan x yang memenuhi.

Koordinasikan siswa belajar dalam kelompok untuk menemukan perbedaan dan persamaan grafik y=cos x dan grafik y=bcos x.
Pastikan siswa dapat memahami arti konstanta b, sebagai penentu simpangan dan jangkauan grafik y = b cos x.
Ajak siswa mengamati kembali Tabel 8.1; Tabel 8.2 dan grafik y = sin x serta y = cos x, untuk menemukan nilai x sedemikian sehingga nilai kedua fungsi sama, yaitu x = 45^0.

c. Grafik Fungsi $y = \tan x, x \in [0°,360°]$.

Dengan cara yang sama, menggambarkan grafik fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$, grafik fungsi $y = \tan x$, untuk $x \in [0°,360°]$ dapat kita gambarkan sebagai berikut.

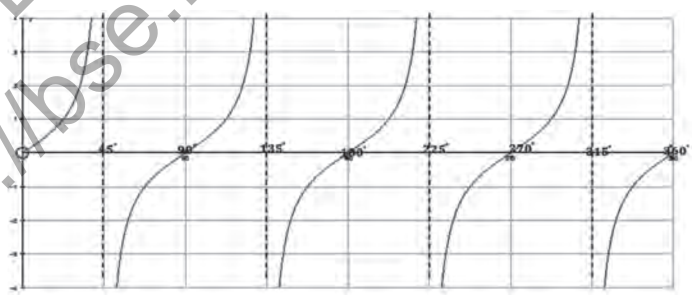


Gambar 8.32 Grafik fungsi $y = \tan x$, $x \in [0°,360°]$

Dengan pengamalaman membaca grafik fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$, minta siswa untuk mampu secara mandiri menemukan sifat-sifat grafik fungsi $y = \tan x$.
Guru memberikan klarifikasi untuk setiap jawaban siswa yang kurang tepat.

Perhatikan nilai fungsi disaat $x \rightarrow 90°$ dan $x \rightarrow 270°$ (dari kanan), nilai $y = \tan x$ menuju tak terhingga. Sebaliknya, untuk $x \rightarrow 90°$ dan $x \rightarrow 270°$ (dari kiri), nilai $y = \tan x$ menuju negatif tak terhingga.

♦ Dengan kondisi ini, apa yang dapat kalian simpulkan dari gambar di atas?



Gambar 8.33 Grafik fungsi $y = \tan ax$, $x \in [0°,360°]$, dan $a \in R$

♦ Dari grafik $y = \tan x$ dan $y = \tan ax$, untuk $x \in [0°, 360°]$, nilai fungsi dari grafik manakah yang paling cepat bertambah? Berikan alasanmu!

Dari ketiga grafik sinus, cosinus dan tangen yang sudah dikaji di atas, terdapat $x \in [0°, 360°]$ sedemikian nilai fungsi sinus sama dengan nilai fungsi cosinus, atau pasangan fungsi yang lain.

Mari kita cermati contoh berikut ini.

Contoh 8.11

Tentukan nilai x yang memenuhi:

a. $\sin 2x = \cos x$

b. $\cos x = \cos 2x$

c. $\tan 2x = \sqrt{2} \cos 2x$

Untuk $x \in [0°, 360°]$.

Alternatif Penyelesaian

a. Dengan mencermati kembali grafik $y = \sin 2x$ dan $y = \cos x$, ditemukan nilai x yang memenuhi persamaan $\sin 2x = \cos x$, yaitu pada saat $x = 30°$.

- ♦ Coba temukan nilai x yang lain yang memenuhi kesamaan tersebut.

b. Dengan menggunakan Tabel 8.2, dapat ditentukan nilai x yang memenuhi persamaan $\cos x = \cos 2x$. Nilai $x = 0°$dan $x = 120°$ memenuhi persamaan tersebut.

- ♦ Menurut kamu, masih adakah nilai x yang memenuhi persamaan tersebut? Jika ada, tentukan; jika tidak ada berikan alasannya.

c. Adanya $\sqrt{2}$ pada ruas kanan pada persamaan $\tan 2x = \sqrt{2} \cos 2x$ merupakan petunjuk untuk menemukan nilai x yang memenuhi, yaitu pada saat $x = 22{,}5°$.

- ♦ Temukan nilai x lainnya yang memenuhi persamaan tersebut! Bandingkan hasil kerjamu dengan temanmu.

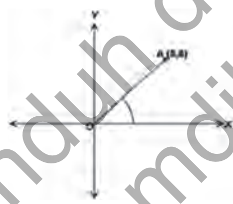
Pastikan siswa mampu memahami perbedaan grafik fungsi $y = \tan x$ dan $y = \tan ax$ dengan mengajukan pertanyaan, misalnya:
Berapa nilai fungsi = $\tan x$ dan $y = \tan ax$, pada saat $x = 135^0$?.
Ajukan pertanyaan-pertanyaan siswa untuk menggiring mereka mampu menemukan nilai fungsi yang mana paling cepat bertambah.

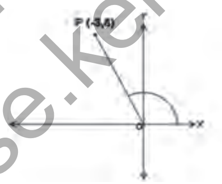
Ajak siswa mencoba menemukan nilai x lain yang memenuhi persamaan $\sin 2x = \cos x$, melalui mencoba nilai-nilai x.
Ajak siswa berpikir dari nilai yang terkecil, $x = 0$.
Untuk persamaan $\cos x = \cos 2x$, pastikan siswa paham akan maknanya, yaitu mencari nilai yang membuat kesamaan bernilai sama.
Ajak siswa untuk mencoba nilai x yang lain hingga siswa mampu menyimpulkan tidak ada nilai x yang lain untuk memenuhi persamaan tersebut.

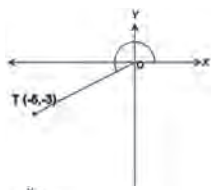
Berikan kesempatan ke siswa untuk mencoba bekerja mandiri untuk menentukan nilai x lain yang memenuhi persamaan tan2x=√2 cos2x.
Ajak siswa mempresentasikan hasil kerjanya ke depan kelas.

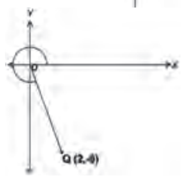
Uji Kompetensi 8.3

1. Perhatikan setiap gambar di bawah ini, tentukanlah nilai sinus, cosinus, tangen, secan, cosec, dan cotangen setiap sudut yang dinyatakan.

   a. 

   b. 

   c. 

   d. 

2. Tentukanlah nilai sinus, cosinus dan tangen untuk setiap titik yang disajikan berikut:
   a. $P(5,12)$
   b. $Q(-5.2,7.2)$
   c. $R(-5,-2)$
   d. $T(3.5,-7.75)$

3. Periksalah kebenaran setiap pernya-taan berikut. Berikan alasanmu.
   a. sec x dan sin x selalu memiliki nilai tanda yang sama di keempat kuadran.
   b. Di kuadran I, nilai sinus selalu lebih besar daripada nilai cosinus.
   c. Untuk $30° < x < 90°$, dan $120° < y < 150°$, maka nilai $2.\sin x < \cos 2y$

4. Di bawah ini disajikan tabel yang menjelaskan tanda nilai beberapa perbandingan trigonometri.

sin α > 0	cos α > 0
sin α < 0	cos α < 0
tan α < 0	sin α > 0

   Tentukanlah letak sudut α untuk setiap kondisi tanda nilai perban-dingan.

5 Diberikan $\tan \alpha = -\frac{8}{15}$ dengan $\sin \alpha > 0$, tentukanlah:
   a. cos α
   b. sec α
   c. (sin α).(cos α)
   d. $\dfrac{\text{cosec } \alpha}{\text{cotan } \alpha}$

6. Diketahui $\pi/2 \le \beta \le 3\pi/2$, dan nilai cotan β tidak terdefinisi.
   Tentukanlah :
   a. sin β
   b cos β
   c. $\dfrac{\sin \beta}{\tan \beta + 1}$

d. $\dfrac{2\sec\beta}{\tan\beta-1}$

7. Sederhanakanlah bentuk persamaan berikut ini.
   a. $\cos x.\text{cosec}\ x.\tan x$
   b. $\cos x.\text{cotan}\ x+\sin x$

8. Diketahui β berada di kuadran III, dan $\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, tentukanlah:

   a. $\dfrac{\sec\beta-\tan^2\beta}{\tan\beta}+\sec\beta$
   b. $\dfrac{\sec^2\beta+\tan^2\beta}{2\sin^2\beta+2\cos^2\beta}$

9. Jika $\alpha=2040^o$, hitunglah nilai:
   a. $\dfrac{\sin\alpha}{(\cos\alpha)^2}$
   b. $\dfrac{\tan\alpha}{\cos\alpha+\sin\left(\dfrac{\alpha}{4}\right)}$
   c. $2\sin\alpha-\cos(2\alpha)$
   d. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sqrt{3}$

10. Sederhanakanlah bentuk ekspresi berikut.
   a. $\dfrac{\sin A}{1+\cos A}+\dfrac{\sin A}{1-\cos A}$
   b. $(\sin B+\cos B)^2+(\sin B-\cos B)^2$
   c. $(\text{cosec}\ A-\text{cotan}\ A).(1+\cos A)$

10. Jika diketahui $Y_1=a\sin bx$, dan $Y_2=a\cos bx$, $x\in[0°,360°]$, $a,b\in R$. Tentukanlah nilai maksimum dan minimum kedua fungsi, dan gambarkanlah gambar kedua fungsi.

11. Lukislah grafik fungsi:

    a. $y = 2 \cos 2x$

    b. $y = –3\sin 3x$

    c. $y = \cos (x\text{-}30^o)$

    d. $y = –2\sin (x + 60^o)$

12. Hitunglah nilai maksimum dan nilai minimum untuk semua fungsi di bawah ini:

    a. $y = 3 \cos 2x – 2$

    b. $y = 5 \sin x + \cos 2x$

    c. $y = \dfrac{4}{\sin 3x}$

    d. $y = \dfrac{7}{\sin x - \cos x}$

13. Dengan menggunakan Tabel 8.2 atau grafik trigonometri, tentukanlah nilai x yang memenuhi kesamaan berikut ini:

    a. $\sqrt{2} \sin 2x = \tan 2x$

    b. $\cos x + \sin x = 1$

    c. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Projek

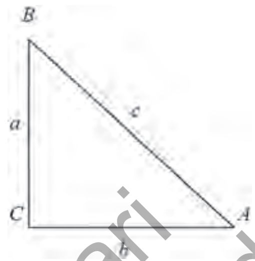
Himpunlah informasi penerapan grafika fungsi trigonometri dalam bidang fisika dan teknik elektro serta permasalahan di sekitarmu. Buatlah analisis sifat-sifat grafik sinus, cosinus, dan tangen dalam permasalahan tersebut. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

Beri penjelasan ke siswa melalui tugas projek, siswa dapat belajar bagaimana merancang strategi, membangun kerja sama team work dalam menyelesaikan suatu masalah kompleks.
Yakinkan siswa tetap bisa menanyakan setiap kesulitan yang mereka temukan pada saat melakukan projek. Tugas projek diberikan sebagai kelompok untuk menganalisis sifat-sifat grafik fungsi trigonometri.

Untuk mengakhiri bab ini, ajak siswa merenungkan kembali konsep trigonometri yang telah dipelajari. Bagian penutup ini merupakan rangkuman tentang informasi dan konsep trigonometri

D. PENUTUP

1. Pada segitiga siku-siku ABC berlaku jumlah kuadrat sisi siku-siku sama dengan kuadrat sisi miringnya atau secara simbolik ditulis $a^2 + b^2 = c^2$ dengan c merupakan panjang sisi miring dan a serta b panjang sisi-sisi yang lain dari segitiga siku-siku tersebut.



2. Pada gambar segitiga siku-siku ABC dengan sudut siku-siku di C, maka berlaku perbandingan trigonometri berikut.
   a. $\sin A = \dfrac{a}{c}$
   b. $\cos A = \dfrac{b}{c}$
   c. $\tan A = \dfrac{a}{b}$

3. Nilai perbandingan trigonometri pada tiap kuadran berlaku sebagai berikut.
   a. Pada kuadran I, semua nilai perbandingan trigonometri bernilai positif, termasuk kebalikan setiap perbandingan sudut tersebut.
   b. Pada kuadran II, hanya sin α dan cosec α yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.
   c. Pada kuadran III, hanya tan α dan cotan α yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.
   d. Pada kuadran IV, hanya cos α dan sec α yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.

4. Nilai perbandingan trigonometri pada kuadran I adalah sebagai berikut.

Sudut	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tidak terdefinisi

Catatan:

Bab 9

Geometri

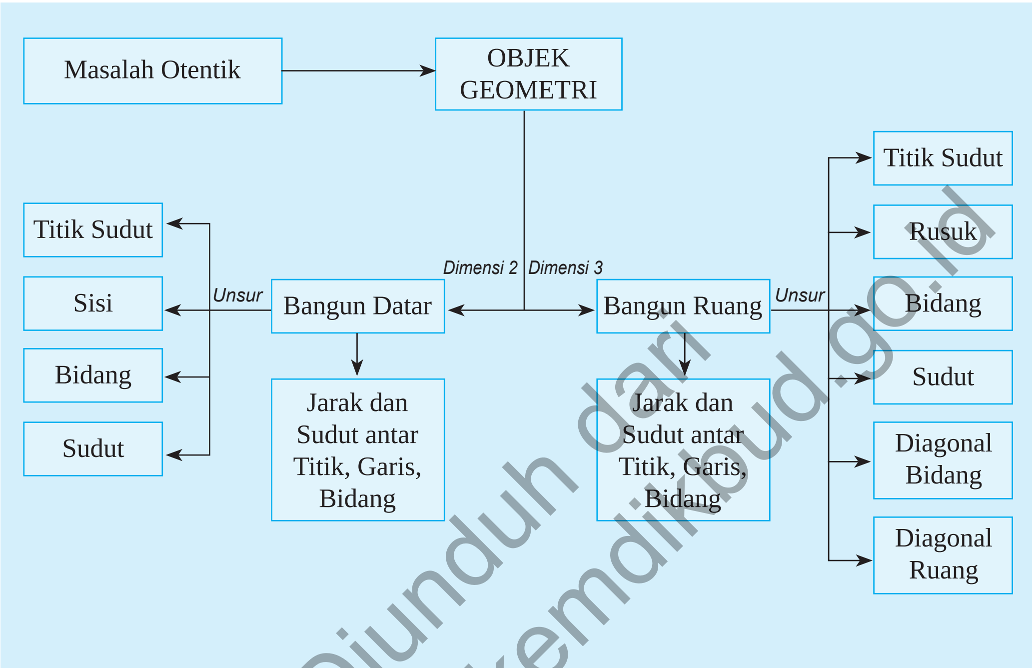
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percayadiri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2 Mendeskripsikan konsep jarak dan sudut antar titik, garis dan bidang melalui demonstrasi menggunakan alat peraga atau media lainnya. 3 Menggunakan berbagai prinsip bangun datar dan ruang serta dalam menyelesaikan masalah nyata berkaitan dengan jarak dan sudut antara titik, garis dan bidang.	Melalui pembelajaran materi geometri, siswa memperoleh pengalaman belajar: • menemukan konsep dan prinsip geometri melalui pemecahan masalah otentik; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur; • berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep dan prinsip-prinsip bangun datar dan ruang dalam geometri untuk memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Titik*
- *Garis*
- *Bidang*
- *Ruang*
- *Jarak*
- *Sudut*
- *Diagonal*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Ajak siswa untuk menyimak ilustrasi berikut! Berikan beberapa ilustrasi dengan cara mengamati ataupun membayangkan suatu peristiwa di sekitar untuk mengantarkan siswa memahami tentang kedudukan titik.

1. Menemukan Konsep Jarak Titik, Garis, dan Bidang

a. Kedudukan Titik

Gambar 9.1a Burung

Gambar 9.1b Titik pada garis

Perhatikan Gambar 9.1a dan Gambar 9.1b. Apa yang dapat kamu lihat? Misalkan kabel listrik adalah suatu garis dan burung adalah titik, maka dapat dikatakan bahwa tempat hinggap burung pada kabel listrik merupakan sebuah titik yang terletak pada suatu garis, yang dapat dilihat pada Gambar 9.1b.

Gambar berikut akan mencoba pemahaman kamu terhadap kedudukan titik dengan garis.

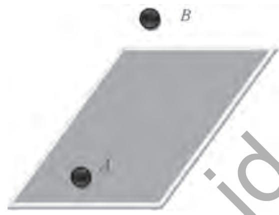
Gambar 9.2a Jembatan penyeberangan

Gambar 9.2a Garis dan titik

Jika dimisalkan jembatan penyeberangan merupakan suatu garis dan lokomotif kereta adalah suatu titik. Kita dapat melihat bahwa lokomotif tidak terletak atau melalui jembatan penyeberangan. Artinya jika dihubungkan dengan garis dan titik maka dapat dikatakan bahwa contoh di atas merupakan suatu titik yang tidak terletak pada garis.

Untuk lebih melengkapi pemahaman kedudukan titik terhadap garis, perhatikan Gambar 9.3a dan Gambar 9.3b.

Gambar 9.3a Bola di lapangan



Gambar 9.3b Dua titik *A* dan *B*

Gambar di atas merupakan ilustrasi contoh kedudukan titik terhadap bidang, dengan bola sebagai titik dan lapangan sebagai bidang. Sebuah titik dikatakan terletak pada sebuah bidang jika titik itu dapat dilalui bidang seperti terlihat pada titik *A* pada gambar dan sebuah titik dikatakan terletak di luar bidang jika titik itu tidak dapat dilalui bidang.

Perhatikan dua permasalahan di bawah ini!

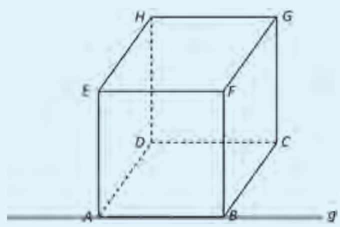
Ajak siswa untuk memahami masalah-masalah berikut. Minta siswa untuk menyelesaikannya sendiri. Jika ada hambatan beri bantuan berdasarkan konsep dan prinsip yang telah diketahui siswa sebelumnya.

Masalah-9.1

Sebuah kardus berbentuk kubus *ABCD.EFGH*. Perhatikanlah kubus tersebut. Segmen atau ruas garis *AB* sebagai wakil garis *g*.

Pertanyaan:

a. Tentukan titik sudut kubus yang terletak pada garis *g*!
b. Tentukan titik sudut kubus yang berada di luar garis *g*!



Gambar 9.4 Kubus *ABCD.EFGH* dan garis *g*

Alternatif Penyelesaian

Pandang kubus *ABCD.EFGH* dan garis g dari gambar di atas, dapat diperoleh:

a. Titik sudut kubus yang terletak pada garis *g* adalah titik *A* dan *B*,

b. Titik sudut kubus yang berada di luar garis g adalah titik *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, dan *H*.

Contoh 9.1

Perhatikan kubus *ABCD.EFGH* pada Gambar 9.5!

Terhadap bidang *DCGH*, tentukanlah:

a. titik sudut kubus apa saja yang terletak pada bidang *DCGH*!

b. titik sudut kubus apa saja yang berada di luar bidang *DCGH*!

Berikan Contoh 9.1 sebagai penerapan dari Definisi 9.1 mengenai letak titik terhadap bidang

Alternatif Penyelesaian

Pandang kubus *ABCD.EFGH*, pada bidang *DCGH* dapat diperoleh:

- Titik sudut yang berada di bidang *DCGH* adalah *D*, *C*, *G*, dan *H*.
- Titik sudut yang berada di luar bidang *DCGH* adalah *A*, *B*, *E*, dan *F*.

Definisi 9.1

1) Jika suatu titik dilalui garis, maka dikatakan titik terletak pada garis tersebut.
2) Jika suatu titik tidak dilalui garis, maka dikatakan titik tersebut berada di luar garis.
3) Jika suatu titik dilewati suatu bidang, maka dikatakan titik itu terletak pada bidang.
4) Jika titik tidak dilewati suatu bidang, maka titik itu berada di luar bidang.

Minta siswa untuk membuat Definisi 9.1 dengan kata-katanya sendiri sehingga terbentuk definisi yang baku. Jika siswa mengalami kesulitan berikan beberapa pertanyaan ataupun petunjuk sesuai dengan konsep dan prinsip yang telah dipelajari sebelumnya.

Ajukan pertanyaan kritis ini pada siswa. Pertanyaan ini bertujuan untuk mengetahui apakah siswa sudah memahami mengenai titik yang terletak pada garis maupun titik yang terletak pada bidang. Di samping ini disajikan alternatif dari pertanyaan tersebut.

Pertanyaan Kritis

Jika suatu titik dilalui oleh garis atau bidang, apakah titik tersebut memiliki jarak terhadap garis dan apakah titik memiliki jarak terhadap bidang?

Jawaban dari pertanyaan tersebut adalah suatu titik yang dilalui oleh garis atau bidang memiliki jarak nol terhadap garis atau bidang tersebut, karena titiknya terletak pada garis maupun bidang yang melalui titik itu.

b. Jarak antara Titik dan Titik

Berikan Masalah 9.2 kepada siswa. Minta siswa untuk memahami masalahnya dan mencoba untuk menyelesaikan masalah tersebut dengan caranya sendiri

Masalah-9.2

Rumah Andi, Bedu, dan Cintia berada dalam satu pedesaan. Rumah Andi dan Bedu dipisahkan oleh hutan sehingga harus menempuh mengelilingi hutan untuk sampai ke rumah mereka. Jarak antara rumah Bedu dan Andi adalah 4 km sedangkan jarak antara rumah Bedu dan Cintia 3 km. Dapatkah kamu menentukan jarak sesungguhnya antara rumah Andi dan Cintia?

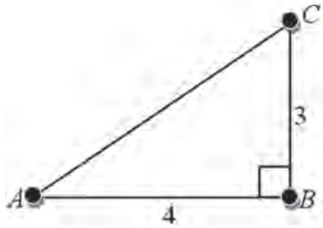
Gambar-9.6 Peta rumah

Alternatif penyelesaian masalah ini sebagian sudah diberikan di buku siswa, sebagian lagi dituntut Agar siswa dapat

Alternatif Penyelesaian

Misalkan rumah Andi, Bedu, dan Cintia diwakili oleh tiga titik yakni A, B, dan C.

Dengan membuat segitiga bantu yang siku-siku maka ilustrasi di atas dapat digambarkan menjadi:



Gambar 9.7 Segitiga siku-siku

Dengan memakai prinsip teorema Phytagoras, pada segitiga siku-siku *ACB*, maka dapat diperoleh panjang dari titik *A* dan *C*, yaitu:

$$AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2}$$

$$AC = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$$

$$AC = \sqrt{25}$$

$AC = 5$

Dari hasil di atas disimpulkan bahwa jarak antara titik *A* dan *C* adalah 5, maka jarak antara rumah Udin dan Siti adalah 5 km.

Masalah-9.3

Seorang satpam sedang mengawasi lalu lintas kendaraan dari atap suatu gedung apartemen yang tingginya 80 m mengarah ke lapangan parkir. Ia mengamati dua buah mobil yang sedang melaju berlainan arah. Terlihat mobil *A* sedang bergerak ke arah Utara dan mobil *B* bergerak ke arah Barat dengan sudut pandang masing-masing sebesar 50° dan 45°. Berapa jarak antara kedua mobil ketika sudah berhenti di setiap ujung arah?

menggunakan konsep dan prinsip yang sudah dipelajarinya untuk menyelesaikan masalah yang diberikan.

Penyelesaian masalah ini adalah dengan menggunakan prinsip teorema Phytagoras, karena permasalahan tersebut membentuk sebuah segitiga siku-siku. Jika siswa mengalami kesulitan berikan petunjuk sesuai dengan konsep dan prinsip yang sudah diketahui siswa.

Minta siswa untuk memahami Masalah 9.3 dan mencoba untuk menyelesaikannya dengan caranya sendiri.

Jika siswa mengalami kesulitan,berikan bantuan berupa beberapa pertanyaan tentang perbandingan trigonometri, lalu tanyakan kepada siswa, kira-kira dari beberapa perbandingan trigonometri yang ada, yang mana yang paling cocok untuk digunakan menyelesaikan permasalahan.

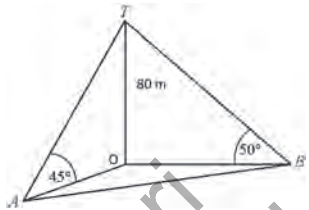
Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Misalkan: Mobil A = titik A, memiliki sudut pandang 50°
Mobil B = titik B, memiliki sudut pandang 45°.
Tinggi gedung = 80 m

Ditanya: Jarak antara kedua mobil sesudah berhenti?

Perhatikan ilustrasi masalah dalam gambar berikut.



Gambar 9.8 Posisi mobil dari gedung

Dari Gambar 9.8, kita memfokuskan perhatian terhadap segitiga *AOT* dan segitiga *BOT*. Perhatikan segitiga *TAO*, kemudian tentukan panjang *AO* dengan menggunakan perbandingan tangen (Definisi 8.4 tentang perbandingan trigonometri). Selanjutnya untuk menentukan *BO* gunakan juga perbandingan tangen. Jarak antara kedua mobil dapat diperoleh dengan menerapkan teorema Phytagoras.

$$\tan 45^\circ = \frac{OT}{AO} = \frac{80}{AO} \Leftrightarrow AO = \frac{OT}{\tan 45^\circ} = 80$$

Pada segitiga *TOB*,

$$\tan 50^\circ = \frac{OT}{BO} = \frac{80}{AO} \Leftrightarrow BO = \frac{OT}{\tan 50^\circ} = 67,22$$

Dalam hal ini guru juga harus menuntun siswa agar mampu menggunakan prinsip yang sudah dipelajari yaitu teorema Phytagoras dalam menyelesaikan permasalahan.

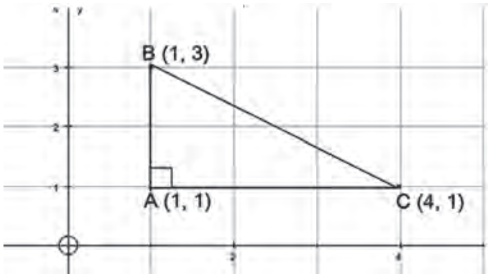
Masih dengan menggunakan teorema Phytagoras pada segitiga AOB, diperoleh

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(AO)^2 + (BO)^2} \\ &= \sqrt{(80)^2 + (67,22)^2} \\ &= \sqrt{10918,52} \\ &= 104,49 \end{aligned}$$

Maka diperoleh, jarak antara kedua mobil tersebut adalah 104,49 m.

Contoh 9.2

Perhatikan posisi titik titik berikut ini!



Gambar 9.9 Koordinat titik *A*, *B*, dan *C*

Jarak antara titik A (1,1) dan C (4,1) dapat ditentukan melalui formula,

$$AC = \sqrt{(4-1)^2 + (1-1)^2} = 3.$$

Dengan cara yang sama, kamu dapat menunjukkan panjang segmen garis AB dan BC, yaitu 2 dan $\sqrt{13}$.

Menentukan panjang AB

$$AB = \sqrt{(1-2)^2 + (1-3)^2}$$
$$= \sqrt{0+4} = 2$$

Menentukan panjang AC

$$BC = \sqrt{(1-4)^2 + (3-1)^2}$$
$$= \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Tentunya panjang ketiga segmen AB, BC, dan AC memenuhi teorema Phytagoras yaitu

$$\left(\sqrt{13}\right)^2 = (2)^2 + (3)^2$$
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Dalam hal ini guru juga harus menuntun siswa agar mampu menggunakan prinsip yang sudah dipelajari yaitu teorema Phytagoras dalam menyelesaikan permasalahan.

Minta siswa untuk menentukan panjang AB dan BC. Jika siswa mengalami kesulitan dalam menyelesaikan panjang AB dan BC, fasilitasi siswa untuk menyelesaikannya dengan berpedoman kepada penyelesaian BC. Di samping ini disajikan penyelesaian untuk menentukan panjang AB dan BC Guru meminta siswa untuk menghubungkan letak titik-titik tersebut dengan teorema Phytagoras, seperti yang disajikan di samping ini

Berdasarkan beberapa penyelesaian masalah dan berdasarkan beberapa contoh, jelaskan kepada siswa mengenai rumus jarak antar dua titik.

Ajak siswa untuk memahami letak titik pada garis. Diharapkan siswa sudah mengetahui kedudukan titik terhadap garis.

Jelaskan kepada siswa bahwa terdapat dua kemungkinan titik pada garis, yaitu titik terletak pada garis atau titik berada di luar garis. Titik dikatakan terletak pada garis, jika titik tersebut dilalui oleh garis. Dalam hal ini, jarak titik ke garis adalah nol.

Minta siswa untuk memahami Gambar 9.10, kita dapat melihat bahwa titik A dan B terletak pada garis g. Titik A dan titik B dikatakan sebagai titik yang segaris atau kolinear.

Minta siswa untuk mengamati Masalah 9.4. dengan diselesaikannya masalah ini diharapkan konsep jarak titik ke garis akan dipahami siswa.

Rumus 9.1

Titik A, B, dan C adalah titik-titik sudut segitiga ABC dan siku-siku di A, maka jarak antara titik B dan C adalah:

$$BC = \sqrt{(AB)^2 + (AC)^2}$$

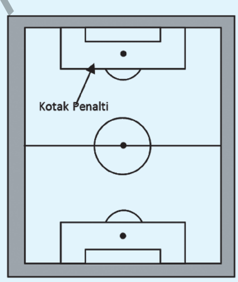
c. Jarak Titik ke Garis

Seperti diuraikan di awal bab ini, kamu pasti sudah mengetahui kedudukan titik terhadap garis. Terdapat dua kemungkinan titik pada garis, yaitu titik terletak pada garis atau titik berada di luar garis. Titik dikatakan terletak pada garis, jika titik tersebut dilalui oleh garis. Dalam hal ini, jarak titik ke garis adalah nol. Dari Gambar 9.10, kita dapat melihat bahwa titik A dan B terletak pada garis g. Titik A dan titik B dikatakan sebagai titik yang segaris atau *kolinear*.

Gambar 9.10 Titik terletak pada garis

Untuk selanjutnya mari kita cermati kemungkinan jarak titik yang tidak terletak pada suatu garis, dengan kata lain kita akan mengkaji jarak titik terhadap garis dengan kegiatan dan permasalahan berikut.

Masalah-9.4



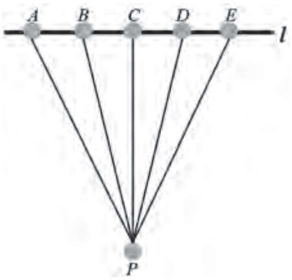
Gambar 9.11 Lapangan sepakbola

Bentuklah tim kelompokmu, kemudian pergilah ke lapangan sepakbola yang ada di sekolahmu. Ambil alat ukur sejenis meteran yang digunakan untuk mengukur titik penalti terhadap garis gawang. Ukurlah jarak antara titik penalti terhadap titik yang berada di garis gawang, lakukan berulang-ulang sehingga kamu menemukan jarak minimum antara titik penalti dengan garis gawang tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Jika dimisalkan titik penalti adalah titik P dan garis gawang merupakan garis lurus l. Tentukanlah beberapa titik yang akan diukur, misalkan titik-titik tersebut adalah A, B, C, D, dan E. Kemudian ambil alat ukur sehingga kamu peroleh jarak antara titik P dengan kelima titik tersebut. Isilah hasil pengukuran kamu pada tabel yang tersedia.

Minta siswa untuk melakukan kegiatan mengukur jarak titik penalty ke gawang.



Gambar 9.12 Jarak titik

Tabel 8.1 Jarak Titik Penalti

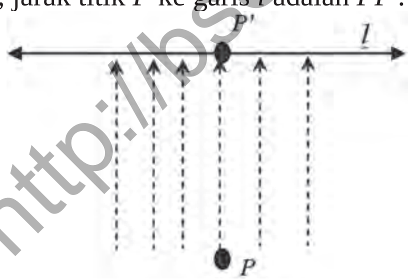
Titik	Jarak
P dan A	
P dan B	
P dan C	
P dan D	
P dan E	

Berdasarkan kegiatan yang dilakukan siswa, minta siswa mengisi tabel yang kosong di buku tulisnya, kemudian tanyakan kepada siswa mana ukuran terpendek dari pengukuran yang telah mereka lakukan.

Apakah panjang ruas garis PA, PB, PC, PD, PE, adalah sama? Menurutmu, bagaimana menentukan jarak dari titik P ke garis l? Apa yang dapat kamu simpulkan?

Sekarang, coba kamu bayangkan ada cahaya yang menyinari titik P tepat di atasnya. Tentu saja akan diperoleh bayangan titik P pada garis, yaitu P'. Untuk itu kita dapat mengatakan bahwa panjang PP' merupakan jarak titik P ke garis l . Sedangkan, P' merupakan projeksi titik P pada garis l. Jadi, jarak titik P ke garis l adalah PP'.

Harapan dari penyelesaian masalah ini adalah siswa dapat memahami bahwa jarak terpendek yang tegak lurus itu adalah merupakan jarak yang dari titik P ke garis l.



Gambar 9.13 Projeksi titik *P* pada garis *l*

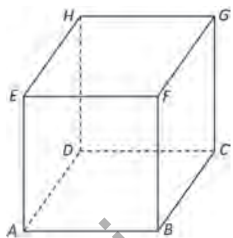
Berikan Contoh 9.3 sebagai contoh penerapan konsep jarak titik ke garis.

Contoh 9.3

Diketahui kubus *ABCD.EFGH*. Tentukan projeksi titik *A* pada garis

a. *CD*!

b. *BD*!

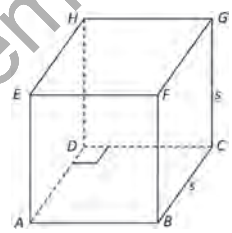


Gambar 9.14 Kubus *ABCDEFGH*

Alternatif Penyelesaian

a. Projeksi titik *A* pada garis *CD*

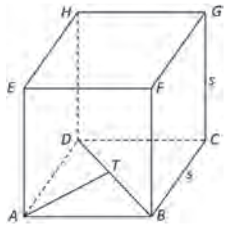
Jika dari titik *A* ditarik garis yang tegak lurus terhadap segmen garis *CD* maka diperoleh titik *D* sebagai hasil projeksinya ($AD \perp CD$).



Gambar 9.15 Projeksi titik *A* pada garis *CD*

b. Proyeksi titik *A* pada garis *BD*

Jika dari titik *A* ditarik garis yang tegak lurus terhadap segmen garis *BD* maka diperoleh titik *T* sebagai hasil proyeksinya ($AT \perp BD$).



Gambar 9.16 Proyeksi titik *A* pada garis *BD*

Contoh 9.4

Sebuah kubus *PQRS.TUVW*, panjang rusuknya 4 cm. Titik *X* terletak pada pusat kubus tersebut, seperti yang disajikan pada Gambar 9.17.

- ♦ Mintalah penjelasan dari gurumu tentang arti titik pusat kubus (bangun ruang).

Hitunglah:

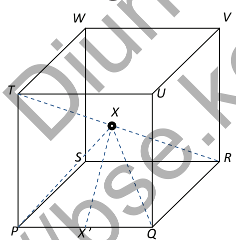
i. Jarak antara titik *R* dan *X*

ii. Jarak antara titik *X* dan garis *PQ*

Jelaskan pada siswa mengenai beberapa hal yang perlu diketahui di dalam contoh tersebut, lalu minta siswa untuk menghitung jarak antara

i. titik R dan X

ii. titik X dan garis PQ



Gambar-9.17: Kubus *PQRS. TUVW* dengan *X* titik tengah *TR*

Alternatif Penyelesaian

Diketahui panjang rusuk kubus a = 4 cm.

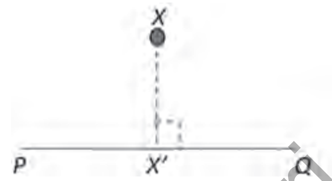
i. Karena *X* adalah titik tengah ruas garis *RT*, maka jarak $RX = \frac{1}{2}RT$. *RT* merupakan diagonal ruang kubus sehingga berdasarkan sifat kubus, panjang diagonal ruang kubus adala $a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ sehingga,

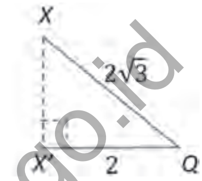
Berikut disajikan penyelesaian dari Contoh 9.4 diharapkan siswa mampu memahami penyelesaian contoh ini.

$$
\begin{aligned}
RX &= \frac{1}{2}RT \\
&= \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3} \\
&= 2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Diperoleh, jarak titik R ke X adalah $2\sqrt{3}$ cm.

ii. Perhatikan gambar berikut.





Jarak antara X dan PQ adalah panjang ruas garis XX'. Dengan menggunakan segitiga siku-siku $XX'Q$, kita akan menentukan panjang XX'.

$X'Q = \frac{1}{2}PQ = 2$, sementara $XQ = \frac{1}{2}QW = 2\sqrt{3}$ sehingga

$$
\begin{aligned}
XX' &= \sqrt{(XQ)^2 - (X'Q)^2} \\
&= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} \\
&= \sqrt{12 - 4} \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Jadi, jarak antara titik X ke PQ adalah $2\sqrt{2}$cm.

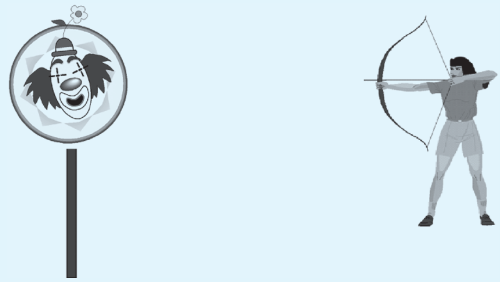
Jelaskan pada siswa bahwa materi yang akan dibahas selanjutnya adalah tentang jarak titik ke bidang. Ingatkan juga siswa tentang jarak titik kegaris yang sudah dibahas sebelumnya.

d. Jarak Titik Ke Bidang

Dalam satu bidang, kita dapat menemukan titik-titik dan membentuk garis. Mari kita cermati masalah berikut ini yang terkait dengan masalah jarak titik terhadap suatu bidang.

Masalah-9.5

Perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 9.18 Seorang pemanah sedang melatih kemampuan memanah

Edo, seorang atlet panahan, sedang mempersiapkan diri untuk mengikuti satu pertandingan besar tahun 2012. Pada satu sesi latihan di *sport center*, mesin pencatat kecepatan menunjukkan, kecepatan anak panah 40 m/det, dengan waktu 3 detik, tetapi belum tepat sasaran.

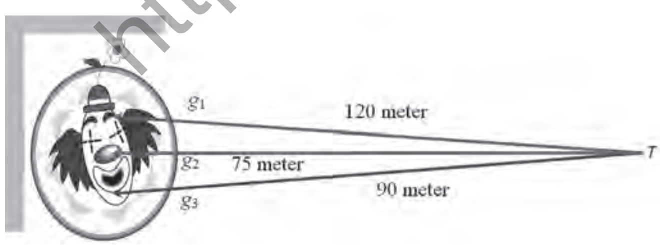
Oleh karena itu, Edo, mencoba mengganti jarak posisi tembak semula terhadap papan target sedemikian sehingga mampu menembak tepat sasaran, meskipun kecepatan dan waktu berubah sesuai dengan perubahan jarak.

Berapakah jarak minimal posisi Edo terhadap target?

Minta siswa untuk memahami Masalah 9.5 dan mencoba untuk menyelesaikan permasalahan yang diberikan

Alternatif Penyelesaian

Tentunya, lintasan yang dibentuk anak panah menuju papan target berupa garis lurus. Keadaan tersebut dapat kita ilustrasikan sebagai berikut.



Guru memberikan penjelasan kepada siswa bahwa penyelesaian masalah ini melibatkan sebuah rumus yang dipelajari di dalam mata pelajaran Fisika tentang jarak benda yang melibatkan kecepatan dan waktu. yaitu s = v.t

Kondisi awal, jarak antara posisi Edo terhadap papan target dapat diperoleh dari rumusan berikut.

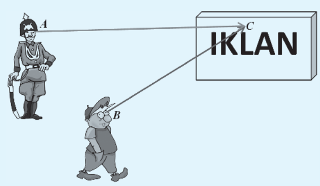
$$s = v.t \Leftrightarrow 3 \times 40 = 120 \text{ m.}$$

Dari dua hasil pergantian posisi, pada tembakan ketiga, dengan posisi 75 m, Edo berhasil menembak pusat sasaran pada papan target.
Posisi Edo, dapat kita sebut sebagai posisi titik T, dan papan target kita misalkan suatu bidang yang diletakkan dengan p satuan jarak dari titik T.
Cermati garis g_1, walaupun panjang garis tersebut adalah 120 meter, tidak berarti garis tersebut menjadi jarak titik T terhadap papan target. Sama halnya dengan garis g_3, tidak berarti jarak Edo terhadap papan target sebesar 90 meter. Tetapi panjang garis g_2, merupakan jarak titik T terhadap papan target.
Jadi, metode menghitung jarak antara satu objek ke suatu bidang harus membentuk lintasan garis lurus yang tegak lurus terhadap bidang.

Minta siswa untuk memahami Ilustrasi 1 berikut. Ilustrasi ini menjelaskan tentang konsep jarak.

Ilustrasi 1

Suatu perusahaan iklan, sedang merancang ukuran sebuah tulisan pada sebuah spanduk, yang akan dipasang sebuah perempatan jalan. Tulisan/ikon pada spanduk tersebut diatur sedemikian sehingga, setiap orang (yang tidak mengalami gangguan mata) dapat melihat dan membaca dengan jelas spanduk tersebut. Ilustrasi keadaan tersebut diberikan pada Gambar 9.19 berikut ini.

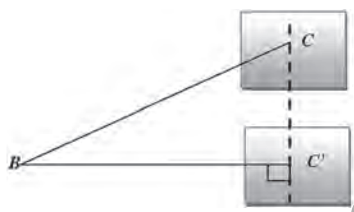


Gambar 9.19 Sudut pandang dua orang terhadap suatu spanduk

Pada Gambar 9.19, jarak titik A terhadap spanduk adalah panjang garis AC, karena garis AC tegak lurus terhadap bidang spanduk. Panjang garis BC bukanlah jarak sesungguhnya jarak si B terhadap spanduk. Untuk menentukan jarak si B terhadap bidang (spanduk), diilustrasikan pada gambar berikut.

Titik C' merupakan projeksi titik C pada bidang yang sama (spanduk). Jadi jarak sebenarnya titik B terhadap spanduk sama dengan jarak titik B terhadap titik C'.

Diharapkan dengan diikutinya penjelasan tentang ilustrasi 1 siswa memahami mengenai pengertian jarak yang sebenarnya

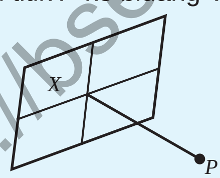


Gambar 9.20 Jarak titik *B* ke titik *C*

Jelasnya untuk keadaan ini, teorema Phytagoras berperan untuk menyelesaikan masalah jarak.

Definisi 9.2

Misalkan X adalah suatu bidang datar dan titik P merupakan sebuah titik yang berada di luar bidang X. Jarak titik P terhadap bidang X merupakan panjang garis tegak lurus dari titik P ke bidang X.



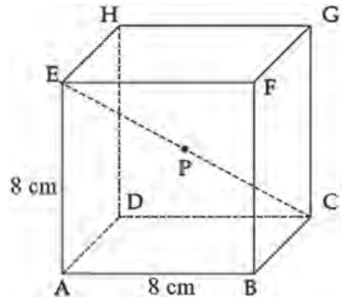
Guru meminta siswa untuk mendefinisikan tentang jarak, jika siswa mengalami kesulitan bantu siswa untuk mendefinsikan jarak.

Contoh 9.5

Perhatikan kubus di samping.

Kubus $ABCD.EFGH$, memiliki panjang rusuk 8 cm. Titik P merupakan titik tengah EC.

Minta siswa untuk memahami Contoh 9.5. contoh ini bertujuan untuk menguatkan konsep tentang jarak antara titik ke titik serta jarak antara titik ke garis. Diharapkan dengan *dipahaminya penyelesaian contoh ini maka siswa akan memahami mengenai konsep jarak tersebut.*



Gambar 9.21 Kubus *ABCD.EFGH* titik *P* titik tengah *EC*

Hitunglah

a) Jarak antara titik B ke P!

b) Jarak antara titik P ke BC!

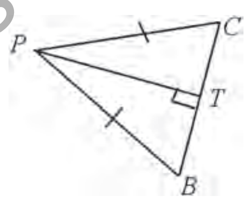
Alternatif Penyelesaian

Cermati gambar kubus di atas. Tentunya, dengan mudah kamu dapat menentukan bahwa panjang $AC = 8\sqrt{2}$ cm , dan panjang diagonal ruang $CE = 8\sqrt{3}$ cm.

a) Karena P merupakan titik tengah EC, maka panjang segmen garis $BP = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} CE = 4\sqrt{3}$ cm.

b) Jarak titik P terhadap BC, berarti kita akan menghitung jarak titik terhadap garis. Lebih jelas kondisi tersebut, cermati segitiga sama kaki BPC pada Gambar 9.22

Minta siswa untuk menentukan ulang jarak titik P terhadap garis BC, dengan menggunakan cara lain. Pastikan hasil kerja yang diperoleh siswa sama dengan hasil pekerjaan di samping.



$PB = PC = 4\sqrt{3}$
$BC = 8$ cm

Gambar 9.22 Segitiga sama kaki *BPC*

Dari Gambar 9.22 di atas berlaku:

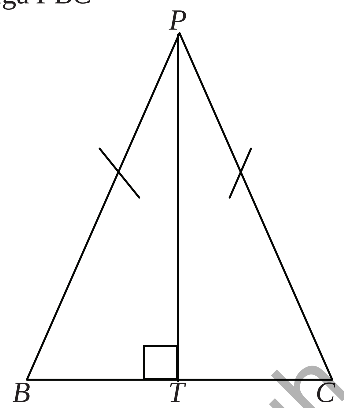
$PT^2 = PB^2 - BT^2$

$PT^2 = \left(5\sqrt{3}\right)^2 - (4)^2 = 32$

$PT = 4\sqrt{2}$ cm

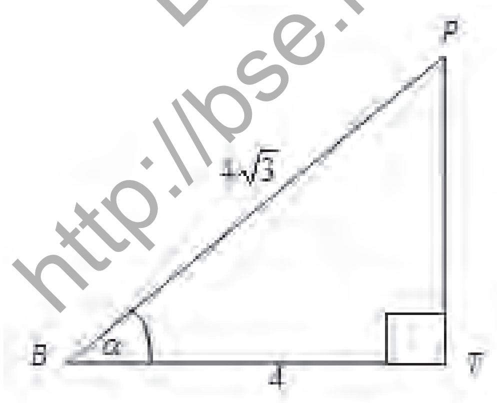
Cara lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan jarak titik P ke garis BC adalah dengan menggunakan konsep perbandingan trigonometri (yang telah dibahas pada Definisi 8.1)

Penyelesaian:
Pandang segitiga PBC



karena segitiga PBC merupakan segitiga sama kaki, maka segitiga tersebut dapat dibagi menjadi dua segitiga siku-siku yaitu segitiga PTB dan segitiga PTC.

pandang segitiga PTB diperoleh



Berikut ini diberikan alternatif penyelesaian untuk menentukan jarak titik P ke garis BC dengan menggunakan konsep perbandingan trigonometri yang telah dipelajari di Bab 8. Minta siswa untuk menyelesaikannya sendiri, jika siswa mengalami kesulitan, beri bantuan berupa pertanyaan tentang Definisi 8.1 yang telah dipelajari dengan mengaitkannya dengan permasalahan yang dihadapi.

$$\cos\alpha = \frac{4}{4\sqrt{3}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\alpha = \arccos\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

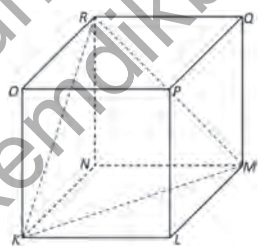
$$\sin\alpha = \frac{PT}{4\sqrt{3}}$$

$$PT = 4\sqrt{2}$$

Contoh 9.6

Minta siswa untuk memahami Contoh 9.6. contoh ini merupakan contoh penggunaan konsep jarak titik ke bidang.

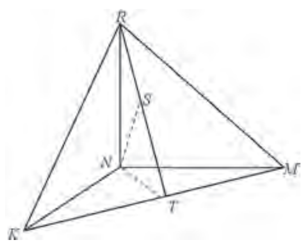
Sebuah kubus *KLMN.OPQR* memiliki panjang rusuk 6 cm. Perhatikan segitiga *KMR*, tentukanlah jarak titik *N* ke bidang *KMR*



Gambar 9.23 Kubus *KLMN.OPQR*

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan kita menyelesaikan persoalan di atas, ada baiknya kita mendeskripsikan sebagai berikut.



$$KM = 6\sqrt{2}\text{ cm}$$
$$RT = 3\sqrt{6}\text{ cm}$$
$$NT = 3\sqrt{2}\text{ cm}$$

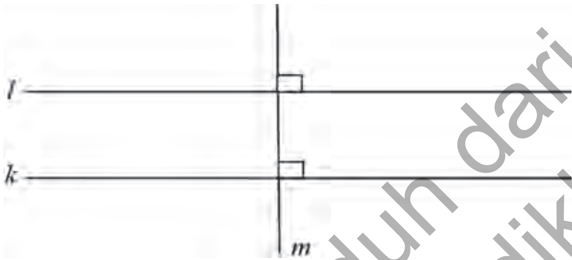
Sekarang, cermati bahwa segitiga *NTR* menjadi bidang penghubung menentukan panjang titik *N* ke bidang *KMR*, yaitu *NS*. Dengan menggunakan perbandingan panjang rusuk segitiga, maka berlaku:

$$NT.NR = RT.NS \Leftrightarrow 3\sqrt{2}.6 = 3\sqrt{6}.NS, \text{ sehingga}$$

$$\text{diperoleh: } NS = 2\sqrt{3} \text{ cm.}$$

e. Jarak antara Dua Garis dan Dua Bidang yang Sejajar

Mari kita cermati gambar berikut ini.

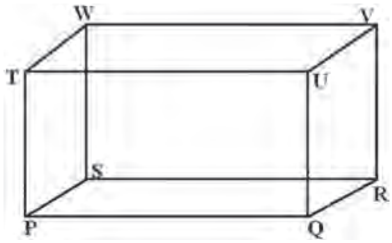


Gambar 9.24 Dua garis sejajar, *k* dan *l* dipotong secara tegak lurus oleh garis *m*

Garis *k* dan *l* dikatakan sejajar jika jarak antara kedua garis tersebut selalu sama (konstan), dan jika kedua garis tidak berhimpit, maka kedua garis tidak pernah berpotongan meskipun kedua garis diperpanjang. Sekarang kita akan memperhatikan rusuk-rusuk yang sejajar dalam suatu bangun ruang.

Misalnya, Balok *PQRS.TUVW* pada Gambar 9.25, semua rusuk pasangan rusuk yang sejajar pasti sama panjang. Misalnya, rusuk *PQ* sejajar dengan *RS*, yang terletak pada bidang *PQRS*.

Guru meminta siswa untuk mencermati Gambar 9.24 diharapkan dengan mencermati gambar tersebut dan adanya penjelasan dari guru akan diperoleh pengertian yang benar tentang jarak dua garis sejajar dan jarak dua bidang sejajar.



Gambar 9.25 Balok *PQRS.TUVW*

Lebih lanjut, bidang *PSTW* sejajar dengan bidang *QRVU*, dan jarak antara kedua bidang tersebut adalah panjang rusuk yang menghubungkan kedua bidang.

Rusuk *PQ* memotong rusuk *QU* dan *QR* secara tegak lurus, maka sudut segitiga *PQR* adalah 90°.

Uji Kompetensi 9.1

Minta siswa untuk menyelesaikan soal-soal uji kompetensi sebagai ukuran kemampuan siswa tentang konsep jarak titik ke titik, titik ke garis, dan titik ke bidang.

1 Diketahui kubus *PQRS.TUVW* dengan panjang rusuk 5 cm. Titik *A* adalah titik tengah RT. Hitunglah jarak antara
   a. titik *V* dan titik *A*!
   b. titik *P* dan *A*!
   c. titik *A* dan garis *SQ*!
   d. titik *Q* dan garis *RW*!
   e. titik *P* dan garis *RT*!

2. Diketahui balok *ABCD.EFGH* dengan *AB* = 4 cm, *BC* = 8 cm, dan *BF* = 10 cm. Hitunglah jarak antara
   a. titik *B* dan bidang *ACGE*!
   b. titik *G* dan bidang *CDEF*!

3. Garis *AB* dan *CD* sejajar dan berjarak 4 satuan. misalkan *AD* memotong *BC* di titik *P* di antara kedua garis. Jika *AB* = 4 satuan luas dan *CD* =12 satuan, berapa jauh titik *P* dari garis *CD*?

4. Diberikan persegi panjang *PQRS*. titik *Q* terletak di dalam *PQRS* se-demikian rupa sehingga *OP* = 3 cm, *OQ* = 12 cm. panjang *OR* adalah …

5. Tentukan jarak antara titik R dengan bidang *PWU* pada kubus *PQRS.TUVW*! Panjang rusuk kubus 12 cm.

6. Balok *ABCD.PQRS* memiliki rusuk alas $AB = 4$ cm, $BC = 3\sqrt{2}$ cm, dan rusuk tegak $AP = 2\sqrt{6}$ cm. Tentukan
   a. jarak antara *QR* dan *AD*!
   b. jarak antara *AB* dan *RS*!

7. Pada balok *ABCD EFGH*, *X* merupakan jarak *C* ke *BD* dan α merupakan sudut antara bidang *BDG* ke bidang *ABCD*. Tentukanlah jarak *C* terhadap bidang *BDG*!

8. Diberikan sebuah Bangun bidang empat beraturan *T.PQR* dengan panjang rusuk 4 cm dan titik *A* merupakan titik tengah TC, dan titik *B* merupakan titik tengah *PQ*. Tentukan panjang *AB*!

9. Diberikan sebuah kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk 6 cm. *T* merupakan titik tengah *BC*. Tentukanlah jarak titik *T* ke garis *AH*!

10. Diberikan sebuah kubus *PQRS.TUVW* dengan panjang rusuknya 4 cm. tentukan panjang proyeksi *QV* pada bidang *PRVT*!

Projek

Himpunlah permasalahan teknik bangunan, ekonomi, dan masalah nyata di sekitarmu yang melibatkan titik, garis, bangun datar dan bangun ruang. Selidikilah sifat-sifat geometri di dalam permasalahan tersebut dan ujilah kebenarannya. Buatlah laporan hasil kerja kelompokmu dan sajikan di depan kelas.

Mintalah siswa menyelesaikan tugas projek dalam satuan waktu tertentu agar siswa memahami tentang konsep geometri yang digunakan dalam kehidupan sehari-hari.

2. Menemukan Konsep Sudut pada Bangun Ruang

Minta siswa untuk memahami beberapa masalah yang terkait dalam mengkonstruk konsep sudut pada bangun ruang.selanjutnya minta siswa untuk menyelesaikan dengan caranya sendiri.

Jika kita memperhatikan sudut yang dibentuk oleh rusuk-rusuk pada kubus dan balok, semua sudut yang terbentuk adalah sebesar 90°, atau sudut siku-siku. Selanjutnya, pada subbab ini, kita akan mengkaji sudut yang terbentuk pada bangun lain misalnya limas atau kerucut.

Mari kita cermati masalah di bawah ini.

Masalah-9.6


Gambar 9.26 Gambar Candi Borobudur

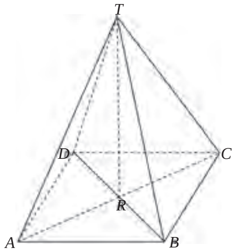
Candi Borobudur merupakan salah satu aset budaya Indonesia yang berharga dan terkenal. Mungkin, tujuan parawisata ini bukanlah sesuatu hal yang baru bagi kamu. Tetapi, tahukah kamu ukuran candi tersebut? Ternyata, luas bangunan candi adalah 123 m × 123 m dengan tinggi bangunan 34,5 m dan memiliki 1460 relief, 504 Arca Buddha, serta 72 stupa. Candi Borobudur memiliki 10 tingkat (melambangkan sepuluh tingkatan *Bodhisattva* yang harus dilalui untuk mencapai kesempurnaan menjadi Buddha) terdiri dari 6 tingkat berbentuk bujur sangkar, 3 tingkat berbentuk bundar melingkar, dan sebuah stupa utama sebagai puncaknya. Tentukan besar sudut yang dibentuk sisi miring dari dasar ke puncak candi.

Alternatif Penyelesaian

Penyelesaian masalah ini melibatkan prinsip teorema Phytagoras dan Definisi 8.1 tentang perbandingan trigonometri khususnya perbandingan cosinus dan tangen.

Jika kita mengamati kerangkanya, candi tersebut berbentuk limas persegi, seperti yang diilustrasikan berikut ini.

Karena alas Candi Borobudur berbentuk persegi, maka panjang $AB = BC = CD = AD = 123$ m, dan tinggi candi, yaitu 34,5 m atau $TR = 34,5$ m.



Gambar 9.27 Limas *T.ABCD*

Garis tinggi TR memotong diagonal AC dan DB secara tegak lurus. Oleh karena itu, pada segitiga TAR berlaku

$TR^2 + AR^2 = TA^2$, dengan $AR = \dfrac{123\sqrt{2}}{2}$ m dan $TR = 34{,}5$ m, sehingga diperoleh:

$$TA^2 = \left(\frac{123\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (34{,}5)^2$$

$$TA^2 = 11346.75 + 1190{,}25 = 12537$$

$$TA = \sqrt{12537} = 111{,}968 \approx 112 \text{ m.}$$

Karena bidang $ABCD$ merupakan persegi, berlaku bahwa $TA = TB = TC = TD = 112$ m.

Selanjutnya, untuk menentukan besar sudut yang dibentuk oleh TA terhadap bidang alas, mari kita perhatikan segitiga TAR. Dengan menggunakan perbandingan cosinus, berlaku

$$\cos A = \frac{AR}{TA} = \frac{61{,}5\sqrt{2}}{112} = 0{,}77.$$

Dengan menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, nilai arccos $A = 39{,}5°$.

Jelasnya besar sudut TAR, TBR, TCR , dan TDR adalah sama besar, yaitu 39,5°.

Jadi, sudut kemiringan yang dibentuk sisi miring dari dasar candi ke puncak candi adalah sebesar 39,5°.

Sedangkan besar sudut yang terbentuk di puncak candi, dapat kita tentukan dengan menentukan besar sudut ATR pada segitiga siku-siku TAR. Dengan menggunakan perbandingan tangen, dinyatakan

$$\tan \angle ATR = \frac{AR}{TR} = \frac{61,5\sqrt{2}}{34,5} = 2,52.$$

Nilai arctan $\angle ATR = 68{,}35°$.
Jelasnya, besar $\angle BTR = \angle CTR = \angle DTR \approx 68{,}35°$.
Jadi besar sudut dipuncak candi merupakan $\angle ATC$ atau besar $\angle BTD$, yaitu sebesar $2.(\angle ATR) = 136{,}7°$.

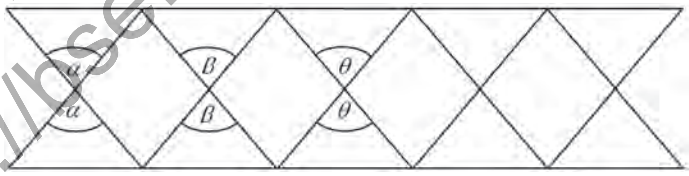
Minta siswa untuk mengamati gambar jembatan yang kerangkanya terbuat dari besi

Perhatikan Ilustrasi berikut!

Gambar di bawah menunjukkan kondisi sebuah jembatan dengan kerangka besi.

Gambar 9.28 Jembatan dengan tiang penyangga besi

Susunan besi-besi pada jembatan membentuk sudut-sudut. Jika keadaan tersebut, ditungkan dalam kajian geometris, sudut-sudut terbentuk diilustrasikan sebagai berikut.



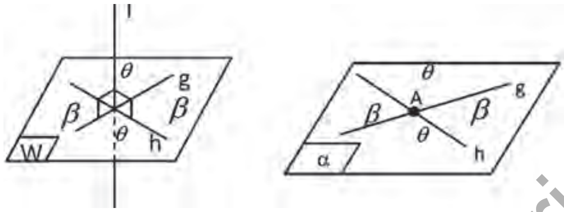
Gambar 9.29 Ilustrasi beberapa dua garis berpotong menghasilkan sudut yang sama besar

Berdasarkan hasil pengamatan yang telah dilakukan diharapkan siswa memahami bahwa sudut yang bertolak belakang sama besarnya

Pada satu bidang, hasil perpotongan dua garis, menghasilkan dua sudut yang masing-masing besarnya sama. Hubungan kedua sudut yang sama besar ini disebut dua sudut yang bertolak belakang.

Secara umum, dapat kita tuliskan sifat-sifat sudut yang dihasilkan dua garis dalam bidang sebagai berikut.

Sifat dua garis dalam satu bidang yang sama
Misalkan garis *k* dan garis *l* berpotongan pada bidang yang sama, maka pasangan sudut yang dihasilkan (ada dua pasang) besarnya sama.



Contoh 9.7

Tentukanlah besar sudut yang dibentuk diagonal bidang *ABCD* pada suatu kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk *s* cm.

Guru menjelaskan mengenai Contoh 9.7 sebagai contoh penerapan konsep sudut yang bertolak belakang. Dalam penyelesaiannya juga melibatkan konsep tentang perbandingan trigonometri.

Alternatif Penyelesaian

Cermati segitiga *BTC*, dengan menggunakan perbandingan sinus (Definisi 8.4)bahwa:

$$\sin B = \frac{TS}{TB} = \frac{\frac{1}{2}s}{\frac{s}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Maka arcsin $B = 45°$, artinya besar sudut $B = 45°$. Karena $TB = TC$, maka besar sudut $C = 45°$. Akibatnya, besar sudut $BTC = 90°$.

Meskipun terdapat 4 segitiga yang terbentuk pada bidang alas kubus *ABCD.EFGH*, kondisinya berlaku sama untuk setiap sudut yang terkait titik perpotongan diagonal bidang *ABCD*.

a. Sudut antara Dua Garis dalam Ruang

Minta siswa untuk memisalkan tiang bendera dan tali merupakan sebuah garis. Gambar 9.30 dapat disketsa kembali dengan lebih sederhana. Minta siswa untuk memperhatikan Gambar 9.31.

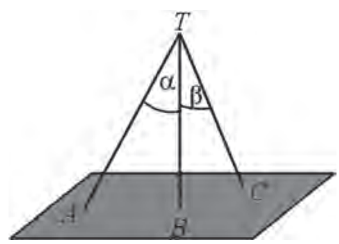
Ilustrasi 2

Satu tim pramuka membuat tiang bendera dari tiga tongkat dan tali pandu. Tiang bendera tersebut disambung dan diikat menjadi sebuah tiang. Tiang tersebut berdiri tegak dengan bantuan tali yang diikat pada tongkat dan ditarik dengan kuat ke pasak yang sudah ditancapkan ke tanah ketiga arah. Perhatikan Gambar 9.30.

Gambar 9.30 Tiang bendera

Mari kita misalkan tiang bendera dan tali tersebut adalah sebuah garis. Gambar di atas dapat kita sketsa kembali dengan lebih sederhana. Perhatikan Gambar 9.31.

Selanjutnya minta siswa untuk menggambarkan sketsa dari ilustasi tersebut sehingga terbentuk Gambar 9.31.



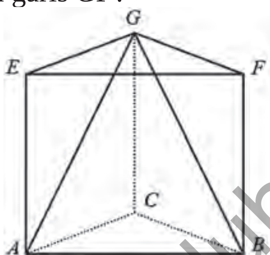
Gambar 9.31 Sudut antar 2 garis

TB adalah tiang bendera dengan *TC* dan *TA* adalah tali pandu. Dari Gambar 9.31, jelas kita lihat bahwa sudut yang dibentuk oleh *TB* dan *TA* adalah α dan sudut yang dibentuk oleh *TB* dan *TC* adalah β.

Contoh 9.8

Sebuah prisma segitiga *ABC.EFG* dengan alas berupa segitiga sama sisi *ABC* dengan sisi 6 cm dan panjang rusuk tegak 10 cm. Tentukanlah besar sudut yang dibentuk:

a. Garis *AG* dan garis *BG*!
b. Garis *EG* dan garis *GF*!



Gambar 9.32 Prisma segitiga *ABC.EFG*

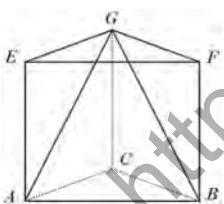
Minta siswa untuk memahami Contoh 9.8. contoh ini merupakan penerapan tentang konsep sudut antara dua garis dalam ruang.

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Gambar 9.31

$AB = BC = AC = 6$ cm

$AE = BF = CG = 10$ cm



Perhatikan segitiga *AEG* siku-siku di *E* sehingga dengan teorema Phytagoras:

$$AG = \sqrt{AE^2 + EG^2}$$

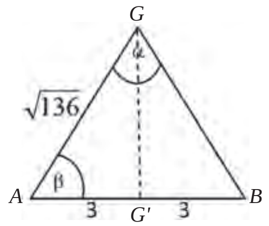
$$AG = \sqrt{100 + 36}$$

$$AG = \sqrt{136}$$

Penyelesaian masalah ini melibatkan prinsip teorema Phytagoras dan konsep perbandingan trigonometri, untuk itu jika siswa mengalami kesulitan ingatkan kembali siswa mengenai prinsip dan konsep tersebut melalui pertanyaan-pertanyaan yang membimbing sehingga prinsip dan konsep itu dapat diingat kembali oleh siswa.

Perhatikan segitiga sama kaki *AGB*.

Dengan perbandingan nilai cosinus, diperoleh:



$$\cos \beta = \frac{AG'}{AG} = \frac{3}{\sqrt{136}}$$
$$= 0{,}257247878$$
$$\beta = \arccos 0{,}257247878$$
$$\approx 75{,}09°$$

Karena ΔABG adalah segitiga sama kaki, maka nilai α adalah sebagai berikut.

$\angle AGB = \alpha = 180 - 2\angle GAB$
$= 180 - 2\beta$
$= 180 - 2(75{,}09)$
$= 180 - 150{,}18$
$\approx 29{,}82$

Berarti besar sudut α adalah 29,82°.

Sebagai latihanmu kerjakanlah butir (b).

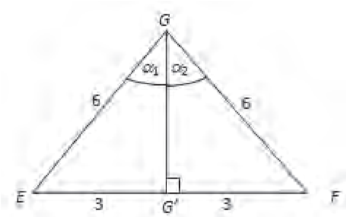
Berikut disajikan penyelesaian untuk bagian b. penyelesaian ini terdiri atas dua yaitu alternatif I penyelesaiannya dengan melibatkan prinsip bahwa besar tiap-tiap sudut segitiga sama sisi adalah 300. Alternatif II penyelesaiannya menggunakan konsep perbandingan trigonometri (Definisi 8.1) khususnya mengenai sinus.

Untuk menyelesaikan Garis EG dan garis GF!

Alternatif Penyelesaian I

Karena sudu segitiga sama sisi memiliki sudut yang sama besar dan jumlah sudut segitiga adalah 1800 maka besar sudut α adalah 60°.

Alternatif Penyelesaian II



$$\sin \alpha_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \arcsin \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = 30^0$$

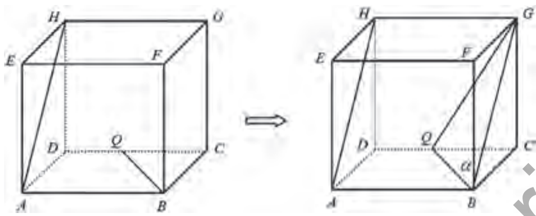
$$\sin \alpha_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \alpha_2 = \arcsin \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \alpha_2 = 30^0$$

Contoh 9.9

Perhatikan gambar! Pada balok *ABCD.EFGH*, titik *Q* di tengah *CD*. Jika panjang *AB* = 12 cm, *BC* = 8 cm dan *CG* = 8 cm. Berapakah besar sudut antara garis *AH* dan *BQ*?

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan gambar!



Gambar 9.33 Kubus *ABCD.EFGH*

Untuk mendapatkan sudut yang dibentuk oleh garis *AH* dan *BQ*, kita perlu menggeser garis *AH* sepanjang rusuk *EF* sehingga garis *AH* dapat diwakili garis *BG*. Sudut yang dibentuk adalah α.

Perhatikan segitiga *BCQ*, siku-siku di *C*; *BC* = 8; *CQ* = 6 sehingga dengan teorema Phytagoras diperoleh.

$$BQ = \sqrt{BC^2 + CQ^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

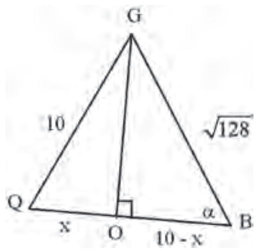
Perhatikan segitiga *BFG*, siku-siku di *F*; *BF* = 8; *FG* = 8 sehingga dengan teorema Phytagoras diperoleh.

$$BG = \sqrt{BF^2 + FG^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128}$$

Perhatikan segitiga *QCG*, siku-siku di *C*; *CG* = 8; *CQ* = 6 sehingga dengan teorema Phytagoras diperoleh.

$$QG = \sqrt{QC^2 + CG^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

Perhatikan segitiga *QBG* dengan α adalah sudut garis *QB* dan *BG*.
Dengan teorema phytagoras pada segitiga siku-siku *QOG* dan *BOG*,



$$\sqrt{QG^2 - QO^2} = \sqrt{BG^2 - BO^2}$$
$$\sqrt{100 - x^2} = \sqrt{128 - (10 - x)^2}$$
$$100 - x^2 = 128 - (10 - x)^2$$
$$100 - x^2 = 128 - 100 + 20x - x^2$$
$$100 = 28 + 20x$$
$$72 = 20x \text{ atau } x = 3{,}6$$

Perhatikan segitiga *BOG* siku-siku di *O*, sehingga:

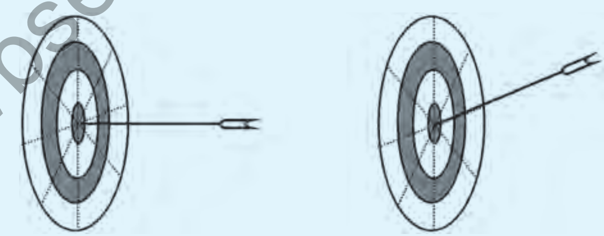
$$\cos\alpha = \frac{10 - x}{\sqrt{128}} = \frac{6{,}4}{\sqrt{128}} \approx 0{,}57 \text{ atau } \alpha = \text{arccos } (0{,}57) = 55{,}55^{\circ}.$$

Minta siswa untuk memahami ilustrasi berikut!

b. Sudut antara Garis dan Bidang pada Bangun Ruang

Ilustrasi 3

Dua orang pemanah sedang latihan memanah di sebuah lapangan. Kedua pemanah tersebut berhasil memanah tepat pada sasaran. Masing-masing anak panah menancap tepat di pusat sebuah bidang sasaran seperti pada Gambar 9.34 berikut!



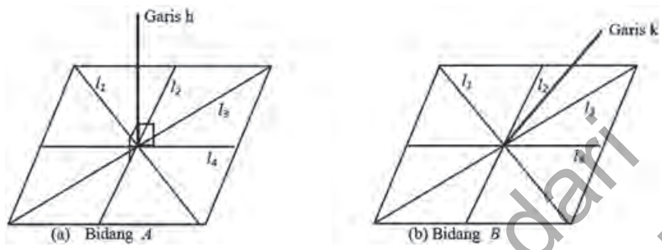
Gambar 9.34 Anak panah

Tanyakan kepada siswa, bagaimana pengamatannya terhadap ilustrasi tersebut? Harapan jawabannya yaitu siswa mengatakan kedua anak panah menancap tepat pada sasaran yaitu pada pusat bidang.

Kemudian berikan pertanyaan lagi agar siswa memperhatikan posisi kedua anak panah tersebut terhadap bidang. Diharapkan siswa memahami bahwa posisi kedua anak panah tersebut tentu sangat berbeda.

Bagaimana pengamatanmu? Tentu, kita mengatakan kedua anak panah menancap tepat pada sasaran. yaitu pada pusat bidang. Tetapi, coba kamu perhatikan posisi kedua anak panah tersebut terhadap bidang. Posisi kedua anak panah tersebut tentu sangat berbeda. Mari kita misalkan anak panah tersebut adalah sebuah garis dan papan target anak panah adalah sebuah bidang (sebut bidang A dan B serta garis h dan k) sehingga kita ilustrasikan kembali posisi anak panah tersebut seperti gambar berikut.

Berikan penjelasan kepada siswa dengan memisalkan anak panah tersebut adalah sebuah garis dan papan target anak panah adalah sebuah bidang (sebut bidang A dan B serta garis h dan k) sehingga diilustrasikan kembali posisi anak panah tersebut seperti gambar berikut.



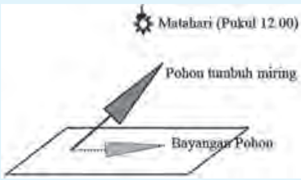
Gambar 9.35 Perpotongan garis dengan bidang di satu titik

Dengan demikian, anak panah yang menancap pada bidang adalah sebuah ilustrasi bahwa sebuah garis dapat memotong sebuah bidang di satu titik. Perhatikan Gambar 9.35 (a), garis h selalu tegak lurus terhadap semua garis yang ada pada bidang, sehingga garis h disebut tegak lurus terhadap bidang. Garis yang tegak lurus pada bidang, kita sebut membentuk sudut 90° terhadap bidang. Perhatikan Gambar 9.35 (b). Garis k tidak tegak lurus terhadap bidang atau garis k tidak membentuk sudut 90° terhadap bidang tetapi membentuk sudut yang lain dengan bidang. Dapatkah kamu menentukan besar sudut yang tersebut? Mari kita pelajari ilustrasi berikut.

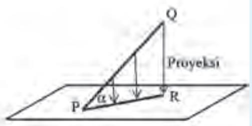
Minta siswa untuk memahami ilustrasi 4 berikut. Ilustrasi ini menceritakan tentang projeksi garis terhadap bidang

Ilustrasi 4

Perhatikan gambar!



Gambar 9.36 Bayangan pohon miring



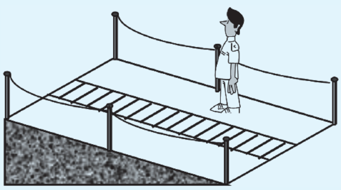
Gambar 9.37 Proyeksi *PQ* ke bidang

Sebuah pohon tumbuh miring di sebuah lapangan. Pada siang hari pada pukul 12.00, matahari akan bersinar tepat di atas pohon tersebut sehingga bayangan pohon tersebut merupakan projeksi orthogonal pada lapangan. Misalkan garis *PQ* adalah pohon sehingga projeksi *PQ* adalah *PR* seperti gambar. Dengan demikian, sudut yang dibentuk oleh *PQ* dengan bidang adalah sudut yang dibentuk oleh garis *PQ* dengan proyeksinya pada bidang tersebut yaitu sudut *QPR*. Pada Gambar 9.37 disebut sudut α.

Minta siswa untuk memahami Masalah 9.8. Minta siswa mengamati hal tersebut sehingga siswa dapat menentukan sudut yang dibentuk oleh badan seseorang dengan bidang miring

Masalah-9.7

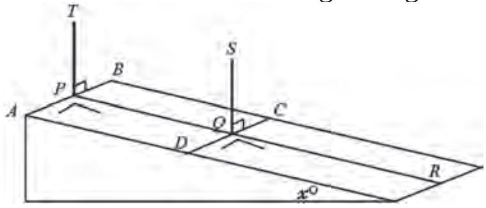
Perhatikan tangga berikut. Seorang bapak sedang berdiri di tangga dengan kemiringan x^0. Dapatkah kamu tentukan sudut yang dibentuk oleh badan bapak tersebut dengan bidang miring?



Gambar 9.38 Bidang miring

Alternatif Penyelesaian

Mari kita sederhanakan sketsa bidang miring tersebut.



Gambar 9.39 Sketsa sederhana bidang miring 1

Sebelum memperhatikan penyelesaian masalah ini, minta siswa dengan caranya sendiri mensketsa gambar dari permasalahan 9.7

Misalkan *PT* atau *QS* adalah tinggi badan bapak tersebut. Kita ambil garis *AB* sehingga *PT* tegak lurus dengan *AB* dan garis *DC* sehingga *QS* tegak lurus dengan *DC*.

Perhatikan juga bahwa garis *PR* terletak pada bidang sehingga *PR* tegak lurus dengan *PT* ataupun pada *QS*. Dengan demikian garis *PR* akan mewakili bidang miring tersebut. Sudut yang dibentuk badan bapak tersebut dengan permukaan bidang miring akan diwakili oleh sudut yang dibentuk oleh garis *PT* dengan garis *PR*. Kita sederhanakan kembali sketsa di atas.

Jika siswa mengalami kesulitan berikan informasi bahwa penyelesaian ini juga melibatkan tentang prinsip sudut berpelurus, dimana sudut berpelurus besarnya adalah 180^0.

Gambar 9.40 Sketsa sederhana bidang miring

Perhatikan segitiga *PUR* dengan siku-siku di *U* atau sudut *U* adalah 90°.

$\angle UPR + \angle PUR + \angle PRU = 180°$

$\angle UPR + 90° + x° = 180°$

$\angle UPR = 90° – x°$

Perhatikan bahwa sudut *TPR* adalah pelurus dengan sudut *UPR* sehingga:

$\angle TPR + \angle UPR = 180°$

$\angle TPR + 90° – x° = 180°$

$\angle TPR = 90° + x°$

Dengan demikian, sudut yang dibentuk oleh badan bapak tersebut dengan permukaan bidang miring adalah 90° + x°.

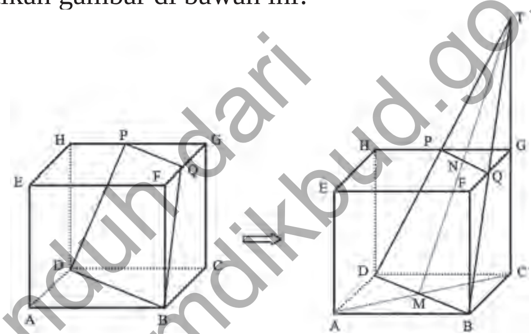
Contoh 9.10

Berikan Contoh 9.10 kepada siswa. Minta siswa memahami contoh tersebut dan jika memungkinkan untuk menyelesaikannya terlebih dahulu tanpa melihat penyelesaiannya

Pada kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk 12 cm. Titik P di tengah rusuk GH dan titik Q di tengah FG. Tentukanlah sudut antara garis CG dengan bidang $BDPQ$.

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan gambar di bawah ini!



Gambar 9.41 Kubus *ABCD.EFGH*

Jika siswa mengalami kesulitan berikan beberapa petunjuk berupa konsep dan prinsip yang dipakai untuk menyelesaikan contoh ini. Beberapa pertanyaan yang mungkin diajukan adalah, "masih ingatkah kamu tentang kesebangunan?", lalu berikan bantuan secara terbatas sehingga siswa memahami bahwa konsep perbandingan digunakan untuk menyelesaikan masalah. Selain itu juga prin-

Jika kita perpanjang garis BQ, CG, dan DP maka ketiga garis akan berpotongan di satu titik T. Perhatikan segitiga sama kaki TBD. TM adalah garis tinggi.

Kamu tentu masih ingat konsep kesebangunan bukan. Perhatikan kesebangunan antara segitiga TBC dengan segitiga TQG, yaitu:

$$\frac{TG}{TC} = \frac{GQ}{CB} \text{ atau } \frac{TG}{TG+GC} = \frac{GQ}{CB} \Leftrightarrow \frac{TG}{TG+12} = \frac{6}{12}$$

$$\Leftrightarrow 2TG = TG + 12$$

$$\Leftrightarrow TG = 12$$

sip teorema Phytagoras digunakan untuk menyelesaikan contoh ini. Penyelesaian selanjutnya adalah dengan menggunakan Definisi 8.1 tentang perbandingan trigonometri yaitu tangen.

Perhatikan segitiga *ABC*, siku-siku di *B*

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} \quad \text{atau} \quad AC = \sqrt{12^2 + 12^2}$$

$$AC = \sqrt{12^2 \times 2}$$

$$AC = 12\sqrt{2}$$

$$\text{sehingga } CM = \frac{AC}{2} = 6\sqrt{2}$$

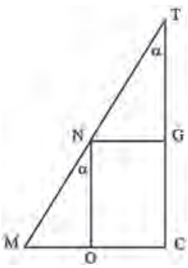
Perhatikan segitiga *TCM*, siku-siku di *C*

$$TM = \sqrt{TC^2 + CM^2} \quad \text{atau} \quad TM = \sqrt{(24)^2 + (6\sqrt{2})^2}$$

$$TM = \sqrt{576 + 72}$$

$$TM = \sqrt{648}$$

Tanyakan pada siswa apakah mereka bisa mencari nilai α dengan menggunakan perbandingan trigonometri (Definisi 8.1) yang lain yaitu sinus dan cosinus



Perhatikan segitiga *TBD* berpotongan dengan garis *TC* di titik *T* sehingga sudut yang dibentuk *TBD* dan garis *TC* adalah α. Kemudian perhatikan segitiga *TCM*,

$$\tan\ \alpha = \frac{MO}{ON} = \frac{CM}{TC} \tan\alpha = \frac{6\sqrt{2}}{24} = \frac{1}{4}\sqrt{2}\ .$$

Dengan menggunakan kalkulator maka

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right) = 19{,}5^\circ$$

Penyelesaian dengan menggunakan sinus

Berikut ini merupakan penyelesaian untuk mencari besar sudut α dengan perbandingan trigonometri sinus dan cosinus

$$\sin\alpha = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{648}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{6\sqrt{2}}{18\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{1}{2} = 19{,}5^0$$

Penyelesaian dengan menggunakan cosinus

$$\cos\alpha = \frac{24}{18\sqrt{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \arccos\frac{1}{3}\sqrt{2} = 19{,}5^0$$

Selain dicari dengan tan, coba kamu cari dengan sin dan cos, apakah hasilnya sama?

c. Sudut antara Dua Bidang pada Bangun Ruang

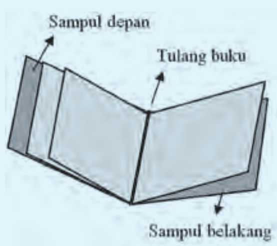
Pada sub-bab ini, kita akan mencoba menemukan konsep sudut antara dua bidang pada bangun ruang. Marilah kita mengamati dan mempelajari ilustrasi berikut.

Minta siswa untuk memahami ilustrasi berikut!

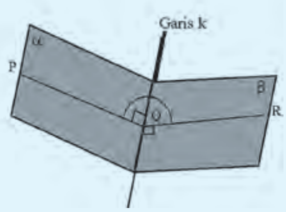
Ilustrasi 5

Perhatikan gambar buku berikut. Sebuah buku terdiri dari beberapa halaman terbuka seperti Gambar 9.42. Kumpulan tersebut sering disebut dengan berkas. Halaman per halaman merupakan bentuk dari sebuah bidang. Misalkan saja, kita ambil sampul buku depan dengan sampul belakang. Kita sebut sampul buku depan adalah bidang α dan sampul buku belakang adalah bidang β. Tentu saja anda sudah mengerti bahwa buku memiliki tulang buku, dan tulang buku tersebut dimisalkan dengan sebuah garis k.

Perhatikan gambar.



Gambar 9.42 Buku

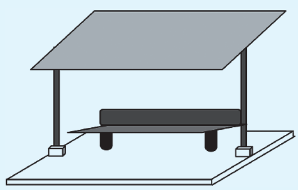


Gambar 9.43 Berkas atau buku

Berdasarkan gambar di atas, kedua sampul buku berpotongan di tulang buku atau bidang α dan bidang β berpotongan di garis k. Perhatikan bahwa garis PQ tegak lurus dengan garis k dan garis RQ tegak lurus juga dengan garis k. Dengan demikian, sudut yang dibentuk oleh bidang α dan bidang β adalah sudut yang dibentuk oleh garis PQ dan RQ.

Guru menjelaskan ilustrasi 3 tersebut tentang sudut yan dibentuk oleh dua bidang.

Masalah-9.8



Gambar 9.44 Halte

Sebuah halte berbentuk seperti Gambar 9.44. Jika atap halte dibuat tidak sejajar dengan lantai maka dapatkah anda tentukan sudut yang dibentuk oleh atap dan lantai halte tersebut.

Minta siswa untuk memahami Masalah 9.8, kemudian minta siswa untuk menyelesaikan masalah tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Mari kita sederhanakan sketsa gambar tersebut.

Gambar 9.45 Sketsa sederhana halte

Untuk menyelesaikan masalah tersebut, minta siswa untuk mensketsa permasalahan menjadi sebuah bangun yang kedua bidangnya saling berpotongan di sebuah garis

Pengamatan kita terfokus pada bidang atap dan lantai. Kita sebut saja bidang lantai adalah bidang α dan bidang β. Karena bidang atap tidak dibangun sejajar maka sudah pasti bahwa kedua bidang pasti berpotongan dan membentuk sudut walaupun secara visual, kedua bidang tidak bersentuhan. Untuk mendapatkan garis perpotongan kedua bidang maka kita dapat memperpanjang rusuk-rusuk kedua bidang. Perhatikan gambar di sebelah kanan anda.
Rusuk AE diperpanjang menjadi AP
Rusuk BF diperpanjang menjadi BP

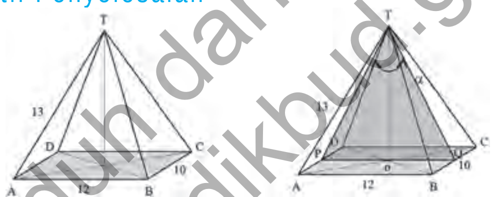
Rusuk DH diperpanjang menjadi DQ
Rusuk CG diperpanjang menjadi CQ
Dari gambar dapat kita lihat, garis PQ adalah perpotongan kedua bidang. Garis ST tegak lurus dengan PQ dan garis UT juga tegak lurus dengan PQ. Dengan demikian, sudut antara bidang α dan bidang β adalah φ.

Berikan Contoh 9.11 sebagai penerapan tentang sudut yang terbentuk oleh dua bidang yang saling berpotongan.

Contoh 9.11

Sebuah limas $T.ABCD$, dengan panjang $TA = 13$, $AB = 12$, $CD = 10$. Jika α adalah sudut yang dibentuk oleh bidang TAD dengan bidang TBC, tentukanlah besar α.

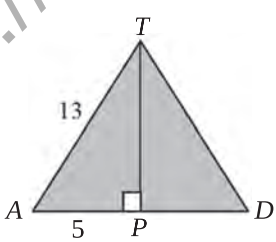
Alternatif Penyelesaian



Gambar 9.46 Limas *T.ABCD*

Penyelesaian contoh ini melibatkan beberapa konsep dan prinsip yang sudah pernah dipelajari sebelumnya yaitu teorema Phytagoras dan perbandingan trigonometri.

Bidang TAD dan bidang TBC berpotongan pada titik T. Garis tinggi TAD adalah TP dan garis tinggi TBC adalah TQ sehingga sudut yang dibentuk oleh bidang TAD dan bidang TBC diwakili oleh garis tinggi TP dan TQ sehingga sudut yang dibentuk oleh kedua bidang adalah sudut α.
Kemudian, kita akan mencari besar sudut α sebagai berikut.
Perhatikan segitiga TAD.



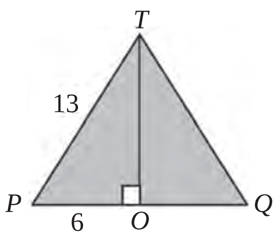
Dengan menggunakan teorema Phytagoras, maka:

$$TP = \sqrt{TA^2 - AP^2}$$

$$TP = \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$TP = \sqrt{144} = 12$$

Perhatikan segitiga TPQ.



Dengan menggunakan perbandingan sinus, maka:

$$\sin\beta = \frac{PO}{TP} = \frac{6}{12}$$

$$\sin\beta = \frac{1}{2} \text{ atau } \beta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$$

Dengan demikian sudut $\alpha = 2\beta$ atau $\alpha = 60°$.

Uji Kompetensi 9.2

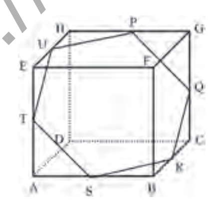
Minta siswa untuk menyelesaikan soal-soal Uji Kompetensi 9.2 sebagai tolok ukur kemampuan siswa dalam penguasaan konsep sudut pada bangun ruang

1 Sebuah kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk *p* cm. Tentukanlah sudut antar bidang *ACH* dengan bidang *ACF*.

2. Pada kubus *ABCD.EFGH*. Jika *AP* adalah perpanjangan rusuk *AB* sehingga *AB* : *BP* = 2 : 1 dan *FQ* adalah perpanjangan *FG* sehingga *FP* : *FG* = 3 : 2 maka tentukanlah jarak antara titik *P* dan *Q*.

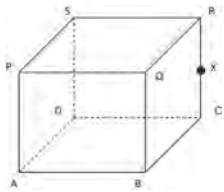
3. Pada kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk *a* cm. Tentukanlah jarak bidang *ACH* dengan bidang *BEG*.

4. Perhatikan gambar berikut.



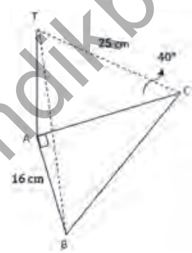
Tentukanlah besar sudut yang dibentuk oleh bidang *PQRSTU* dengan alas *ABCD*. (Rusuk kubus *p* cm, untuk *p* bilangan real positif).

5. Sebuah kubus dengan panjang rusuk 12 cm. Titik X berada di tengah rusuk CR. Hitunglah:



a. Panjang AX
b. Besar sudut antara AX dan bidang alas
c. Besar sudut PXA
d. Besar sudut antara BS dan bidang alas

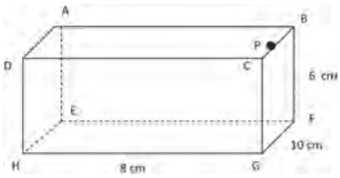
6. Segitiga ABC adalah segitiga yang terletak pada sebuah bidang datar, dengan sudut BAC = 90° dan panjang AB =16 cm. Titik T terletak tepat di atas titik A. Sudut yang terbentuk antara TC dan AC adalah 40°, panjang TC adalah 25 cm.



Hitunglah:
a. Sudut yang terbentuk antara TB dan AB
b. Panjang AT
c. Panjang BC

7. Sebuah balok $ABCD.EFGH$ memi-liki panjang rusuk-rusuk AB = 6 cm, AD = 8 cm, BD = 10 cm, dan DH = 24 cm. Hitunglah
a. Panjang HB
b. Besar sudut BDC
c. Besar sudut antara HB dan bidang $CDHG$
d. Besar sudut antara HB dan bidang $ABCD$

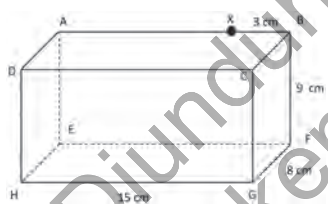
8. Perhatikan gambar balok berikut



Hitunglah :

a. Panjang *HP* jika *P* adalah tengah-tengah *BC*
b. Besar sudut antara *HP* dan *EFGH*
c. Besar sudut antara *HP* dan *FG*
d. Besar sudut antara *DF* dan bidang *EFGH*

9. Gambar di bawah ini merupakan balok dengan alas *EFGH*, dengan panjang *HG* = 15 cm, *GF* = 8 cm dan *BF* = 9 cm. Titik *X* berada pada rusuk *AB* yang berjarak 3 cm dari titik *B*. Hitunglah besar sudut *HXG* dan *ABFE*.



10. Sebuah limas berdiri setinggi 26 cm di atas bidang datar dengan alas berbentuk bidang segi enam beraturan yang memiliki panjang rusuk 12 cm. Hitunglah
a. Panjang rusuk dari piramid
b. Besarnya sudut antara rusuk piramid dengan alas.

11. Jika diketahui balok *ABCD.EFGH* dengan *AB* = $\sqrt{3}$, *BC* = 1 dan *BF* = 5. Tentukanlah besar sudut yang dibentuk bidang *ADHE* dan bidang BDHF.

12. Pada limas beraturan *T.ABCD*, *TA* = *TB* = *TC* = *TD* = $\sqrt{3}$ dm dan *ABCD* adalah persegi dengan sisi dm. Tentukanlah besar sudut antara bidang *TAB* dan bidang *TCD*.

13. Seorang pengamat mengamati dua buah perahu dari menara merkusuar. Perahu A bergerak ke arah Barat dengan sudut depresi 35° dan perahu B bergerak ke arah Utara dengan sudut depresi 40°. Jika tinggi merkusuar adalah 85 m dari permukaan laut, tentukan jarak antara kedua perahu tersebut.

14. Seorang lelaki berdiri di titik B, yang berada di Timur menara OT dengan sudut elevasi 40°. Kemudian ia berjalan 70 m ke arah Utara dan menemukan bahwa sudut elevasi dari posisi yang baru ini, C adalah 25°. Hitunglah panjang OB dan tinggi menara tersebut.

Tugas projek diberikan sebagai tugas individu untuk menginformasikan kepada siswa bahwa belajar tentang Geometri sangat diperlukan dalam perkembangan ilmu dan dalam menyelesaikan permasalahan kehidupan.

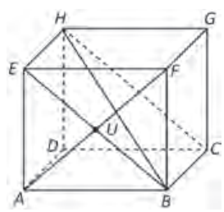
Projek

Perhatikan berbagai objek yang kamu temui di sekelilingmu. Pilihlah minimal tiga objek dan rancang masalah yang pemecahannya menerapkan sifat dan rumus jarak titik ke garis atau jarak titik ke bidang. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

Bagian penutup ini merupakan rangkuman tentang informasi dan konsep persamaan dan pertidaksamaan linear

D. PENUTUP

Pada kubus $ABCD.EFGH$, berlaku.



1. Titik E terletak pada garis AE, EF, dan EH.
2. Garis EF terletak pada bidang $ABFE$ dan $EFGH$.
3. Titik E terletak pada bidang $ABFE$, $AEHD$, $EFGH$ yang memuat garis AE, EF, dan EH.

4. Garis *EF* dan garis *CD* adalah dua garis yang sejajar.
5. Garis *AF* dan garis *BE* adalah dua garis yang bersilangan.
6. Garis *EF* dan *CG* adalah dua garis yang saling tegak lurus.
7. Garis *EF* sejajar dengan salah satu garis pada bidang *CDHG*, maka garis *EF* sejajar dengan bidang *CDGH*.
8. Garis *EF* tegak lurus dengan salah satu garis pada bidang *BCGF*, maka garis *EF* tegak lurus dengan bidang *BCGF*.
9. Bidang *ADHE* berpotongan dengan bidang *BCHE*.
10. Bidang *ABFE* berpotongan tegak lurus dengan bidang *ABCD*.
11. Bidang *ABFE* sejajar dengan bidang *CDHG*.
12. Garis *AF* merupakan diagonal bidang *ABFE*
13. Garis *BH* merupakan diagonal ruang kubus *ABCD*, *EFGH*.
14. Bidang *BCHE* merupakan bidang diagonal.
15. $\angle AUE = \angle BUF$ dan $\angle AUB = \angle EUF$.
16. Jarak antara dua titik adalah panjang ruas garis terpendek yang menghubungkan dua titik tersebut.
17. Jarak antara sebuah titik ke sebuah garis adalah jarak titik ke proyeksinya pada garis.
18. Jarak antara sebuah titik ke sebuah bidang adalah jarak titik ke proyeksinya pada bidang.
19. Jarak antara dua garis sejajar adalah jarak salah satu titik di salah satu garis ke garis yang lain.
20. Jarak dua garis bersilangan adalah panjang ruas garis yang tegak lurus pada kedua garis tersebut.
21. Jarak antara dua bidang yang sejajar adalah jarak dari salah satu titik pada bidang yang satu ke bidang yang lain.

22. Sudut antar garis adalah sudut yang terbentuk akibat perpotongan dua garis pada satu titik.
23. Sudut antara garis dengan bidang adalah sudut antara garis tersebut dengan projeksinya pada bidang.
24. Sudut antar bidang adalah sudut yang terbentuk akibat perpotngan dua bidang pada satu garis.

Kita telah mempelajari materi geometri tentang jarak dan sudut antara titik, garis dan bidang serta penerapannya dalam pemecahan masalah nyata. Selanjutnya kita akan membahas materi tentang limit fungsi. Dalam bahasan ini kita akan mempelajari sifat-sifat limit fungsi aljabar yang selanjutnya akan diuraikan dalam pemecahan masalah dan penyelesaian beberapa masalah dengan menggunakan beberapa sifat limit fungsi yang dipelajari.

Bab 10

Limit Fungsi

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar

Setelah mengikuti pembelajaran limit fungsi, siswa mampu:

1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya.
2. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah.
3. Mampu mentransformasi diri dalam berperilaku jujur, tangguh menghadapi masalah, kritis, dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika.
4. Menunjukkan sikap bertanggung-jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan.
5. Mendeskripsikan konsep limit fungsi aljabar dengan menggunakan konteks nyata dan menerapkannya.
6. Merumuskan aturan dan sifat limit fungsi aljabar melalui pengamatan contoh-contoh.
7. Memilih strategi yang efektif dan menyajikan model matematika dalam memecahkan masalah nyata tentang limit fungsi aljabar.

Pengalaman Belajar

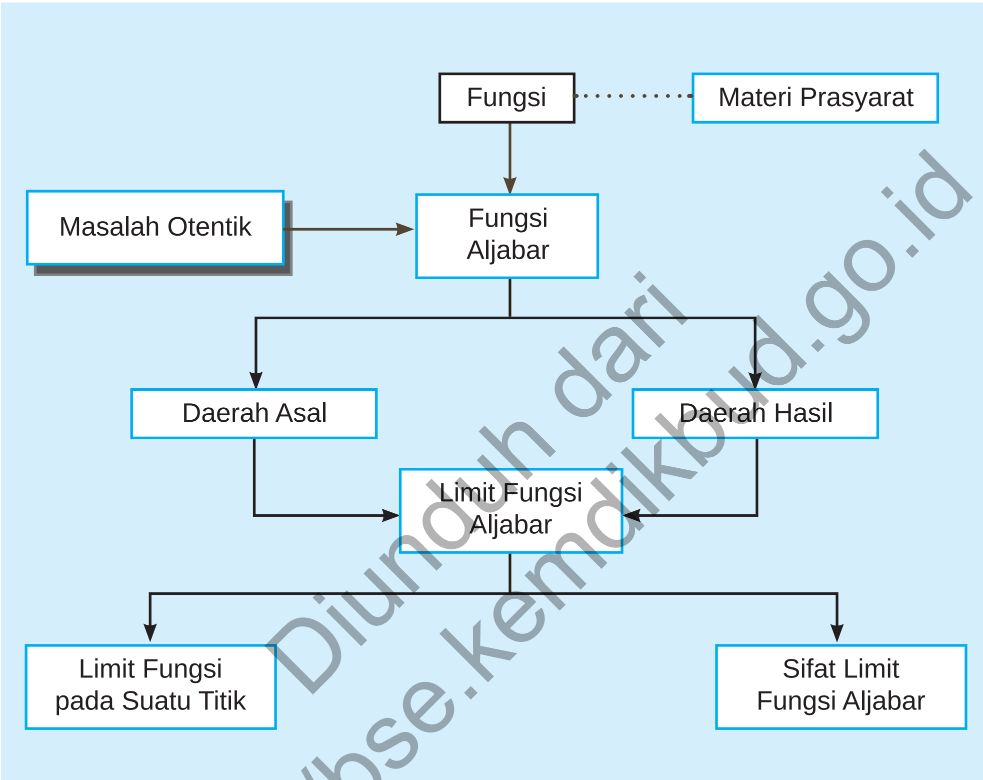
Melalui pembelajaran materi limit fungsi, siswa memperoleh pengalaman belajar:

- berpikir kreatif dan kritis dalam mengamati berbagai permasalahan nyata yang berkaitan dengan limit fungsi.
- kerjasama yang solid dalam tim untuk menemukan solusi permasalahan terkait limit fungsi.
- menerapkan konsep limit fungsi dalam kehidupan sehari-hari.
- Memodelkan permasalahan nyata yang dijumpai dalam kehidupan sehari - hari.

Istilah Penting

- *Limit fungsi*
- *Pendekatan (kiri dan kanan)*
- *Bentuk tentu dan tak tentu*
- *Perkalian sekawan*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Beri motivasi kepada siswa akan pentingnya penerapan konsep limit fungsi di kehidupan sehari–hari. Beri contoh aplikasi limit fungsi di kehidupan nyata, kemudian minta siswa mencari contoh aplikasi lainnya dan minta siswa berkomentar tentang aplikasi yang dia temukan.

Dalam kehidupan sehari-hari, berbagai permasalahan yang kita hadapi dapat melahirkan berbagai konsep matematika. Berdasarkan konsep umum matematika yang diperoleh dari permasalahan tersebut, kita mampu menyelesaikan kembali permasalahan yang serupa. Sebagai contoh, kita melakukan pengamatan terhadap respon tubuh yang sedang alergi terhadap suatu zat dengan tingkat dosis obat antibiotik. Dari data yang kita peroleh, kita dapat memodelkan batas dosis pemakaian antibiotik tersebut. Dengan demikian, masalah alergi yang serupa dapat diatasi bila kembali terjadi. Percobaan yang kita lakukan adalah sebuah konsep pendekatan terhadap solusi permasalahan tersebut. Jadi, konsep dapat kita peroleh dengan mengamati, menganalisis data dan menarik kesimpulan. Perhatikan dan amatilah contoh ilustrasi berikut.

Ilustrasi

Arahkan siswa untuk melihat Gambar: 10.1 dan memberikan waktu untuk mengamati gambar tersebut. Bantu mereka untuk berani memberikan komentar kenapa obyek pada gambar seakan-akan mengecil? Arahkan mereka mengingat kembali teori perbandingan atau kesebangunan.

Gambar 10.1 Jalan tol

Seorang satpam berdiri mengawasi mobil yang masuk lewat pintu jalan tol. Ia berdiri sambil memandang mobil yang melintas masuk jalan tersebut. Kemudian dia memandang terus mobil sampai melintas di kejauhan jalan tol. Dia melihat objek seakan-akan semakin mengecil seiring dengan bertambah jauhnya mobil melintas. Akhirnya dia sama sekali tidak dapat melihat objek tersebut.

- Coba kamu perhatikan Gambar 10.1. Kita melihat bahwa bukan hanya ukuran mobil di kejauhan yang seakan-akan semakin kecil, tetapi lebar jalan raya tersebut juga seakan-akan semakin sempit. Kemudian coba kamu analisis kembali gambar tersebut, secara visual, apakah perbandingan ukuran lebar jalan dengan ukuran mobil tersebut tetap? Berikan komentarmu!

Jika kita analisis lebih lanjut, untuk pendekatan berapa meterkah jauhnya mobil melintas agar penjaga pintu masuk jalan tol sudah tidak dapat melihatnya lagi? Berdiskusilah dengan teman-temanmu!

1. Menemukan Konsep Limit Fungsi

Kita akan mencoba mencari pengertian atau konsep pendekatan suatu titik ke titik yang lain dengan mengamati dan memecahkan masalah.

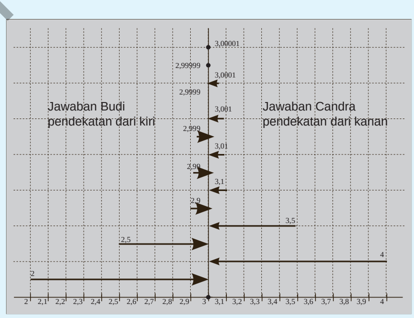
Minta siswa untuk memahami Masalah 10.1 dalam menemukan konsep limit. Arahkan siswa untuk memahami konsep pendekatan (dari kiri dan kanan). Pilih dua orang siswa untuk melakukan peragaan percakapan di samping untuk pendekatan bilangan lainnya.

Masalah-10.1

Tiga anak (sebut nama mereka: Ani, Budi dan Candra) sedang bermain tebak angka. Ani memberikan pertanyaan dan kedua temannya akan berlomba memberikan jawaban yang terbaik. Perhatikanlah percakapan mereka berikut.

Ani : Sebutkanlah bilangan real yang paling dekat ke 3?

Budi : 2
Candra : 4
Budi : 2,5
Candra : 3,5
Budi : 2,9
Candra : 3,1
Budi : 2,99
Candra : 3,01
Budi : 2,999
Candra : 3,001
Budi : 2,9999
Candra : 3,0001



Gambar 10.2 Ilustrasi limit sebagai pendekatan nilai

Minta siswa mengamati pendekatan nilai – nilai tersebut pada sketsa di samping. Minta salah satu siswa untuk memberi komentar.

Kedua teman Ani berlomba memberikan jawaban bilangan terdekat ke 3, seperti pada Gambar 10.2. Pada awalnya Budi dan Candra mengambil bilangan yang terdekat ke 3 dari kiri dan kanan sehingga mereka menjawab 2 dan 4. Ternyata masih ada bilangan real lain yang terdekat

Dengan pemahaman pendekatan nilai di atas, arahkan siswa untuk memahami penger-

ke 3, sehingga Budi harus memberi bilangan yang lebih dekat lagi ke 3 dari kiri, maka Budi menyebut 2,5. Hal ini membuat Candra ikut bersaing untuk mencari bilangan lain, sehingga ia menjawab 3,5. Demikianlah mereka terus-menerus memberikan jawaban sebanyak mungkin sampai akhirnya mereka menyerah untuk mendapatkan bilangan-bilangan terdekat ke 3.

tian pendekatan kiri dan pendekatan kanan secara simbolik, yaitu $x \to 3^-$, $x \to 3^+$ dan $x \to 3$

Berdasarkan pemahaman kasus ini, ternyata ketidakmampuan teman-teman Ani untuk menyebutkan semua bilangan tersebut telah membuktikan bahwa begitu banyak bilangan real di antara bilangan real lainnya. Jika dimisalkan x sebagai variabel yang dapat menggantikan jawaban-jawaban Budi maka x akan disebut bilangan yang mendekati 3 dari kiri (secara matematika, dituliskan $x \to 3^-$) dan jika x sebagai variabel yang menggantikan jawaban-jawaban Candra maka x akan disebut bilangan yang mendekati 3 dari kanan (secara matematika, dituliskan $x \to 3^+$). Secara umum, kedua jawaban mereka disebut mendekati 3 atau $x \to 3$.

Masalah-10.2

Gambar a Gambar b Gambar c

Gambar 10.3 Jembatan layang

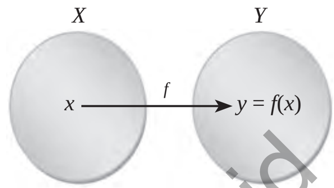
Sebuah jembatan layang dibangun pada sebuah kota untuk mengatasi masalah kemacetan jalan raya. Setelah pondasi yang kokoh dibangun (Gambar 10.3a), beberapa badan jembatan yang telah dibentuk dengan ukuran tertentu diangkat dan disambungkan satu sama lain pada setiap pondasi yang telah

Minta siswa untuk memahami masalah tentang jembatan layang sebagai salah satu contoh pendekatan dalam memahami konsep limit. Minta siswa untuk mencari kasus nyata yang berkaitan dengan kasus pendekatan.

tersedia (Gambar 10.3*b*) sehingga terbentuk sebuah jembatan layang yang panjang (Gambar 10.3*c*). Tentu saja kedua blok badan jembatan yang terhubung mempunyai garis pemisah (Gambar 10.3*b*).

Arahkan siswa berdiskusi, apakah kedua badan jembatan tersebut mempunyai limit pada persambungan badan jembatan tersebut? Berikan ide-ide secara bebas dan terbuka. Manfaatkan jawaban siswa untuk melahirkan sebuah konsep dan pendefinisian tentang limit fungsi.

Jika setiap pondasi merupakan titik-titik pada himpunan X dan badan jembatan merupakan kurva yang dipenuhi oleh fungsi $y = f(x)$ maka hubungan antara pondasi dan badan jembatan merupakan sebuah pemetaan atau fungsi.



Gambar 10.4 Pemetaan

Ingat kembali pengertian sebuah fungsi pada bab V. Misalkan X dan Y ada-lah himpunan yang tidak kosong, $x \in X$, $y \in Y$, sebuah fungsi f memetakan setiap anggota himpunan X ke tepat satu anggota himpunan Y.

Pilih salah satu pondasi sebagai titik yang akan didekati. Lihat Gambar 10.3b. Kita anggap garis pemisah pada persambungan kedua badan jembatan sebagai ilustrasi $x \neq c$.

Minta siswa melakukan pengamatan ke gambar jembatan dan sketsa sederhana yang diperoleh. Arahkan mereka mengamati ketinggian badan jembatan pada persambungan atau tiang penyanggah. Berikan mereka waktu untuk berkomentar.

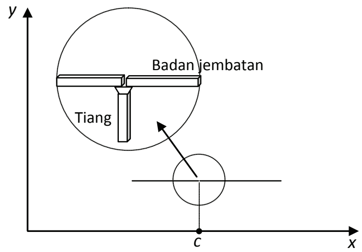
Diskusi

Menurut kamu, apakah kedua badan jembatan tersebut mempunyai limit pada persambungan tersebut? Berikanlah komentar kamu! Diskusikanlah komentar kamu tersebut dengan teman kelompok dan gurumu!

Alternatif Penyelesaian.

Arahkan siswa untuk kembali mengingat pendefinisian relasi dan fungsi pada bab sebelumnya. Minta siswa mensketsa

Lihat Gambar 10.3*d*. Agar jembatan dapat dilalui dengan mulus oleh kendaraan, maka ketinggian badan jembatan pada persambungan di tiang penyanggah harus sama, bukan? Jadi, ketinggian badan jembatan dari kiri dan kanan harus sama agar terdapat limit pada persambungan, sebaliknya tidak mempunyai limit. Demikian juga pengertiannya bila di sketsa secara analitik dalam bentuk titik atau garis.



Gambar 10.3*d* Sketsa sederhana jembatan layang dalam koordinat kartesius

ulang gambar jembatan tersebut dengan memisalkan tiang penyanggah terletak di sumbu x dan badan jembatan adalah sebuah garis (Lihat Gambar 10.3d)

Masalah-10.3

Perhatikan masalah berikut.

Gambar 10.5 Lebah

Seekor lebah diamati sedang hinggap di tanah. Pada suatu saat, lebah tersebut diamati terbang membentuk sebuah lintasan parabola. Setelah terbang selama 1 menit, lebah tersebut telah mencapai ketinggian maksimum sehingga ia terbang datar setinggi 5 meter selama 1 menit.

Pada menit berikutnya, lebah tersebut terbang menukik lurus ke tanah sampai mendarat kembali pada akhir menit ketiga.

Arahkan siswa terlebih dulu untuk memahami masalah berikut. Minta siswa mengamati pergerakan beberapa objek nyata dan membuat sketsa pergerakan objek tersebut.

- Coba kamu modelkan fungsi lintasan lebah tersebut!

  Petunjuk:
  – Model umum kurva parabola adalah $f(t) = at^2 + bt + c$, dengan a, b, c bilangan real. (ingat kembali pelajaran fungsi kuadrat pada Bab VII)
  – Model umum kurva linear adalah $f(t) = mt + n$ dengan m, n bilangan real. (ingat kembali pelajaran persamaan linear pada Bab II)

- Amatilah model yang kamu peroleh. Tunjukkanlah pola lintasan terbang lebah tersebut?

  Petunjuk:
  Pilihlah strategi numerik untuk menunjukkan pendekatan, kemudian bandingkan kembali jawaban kamu dengan strategi yang lain.

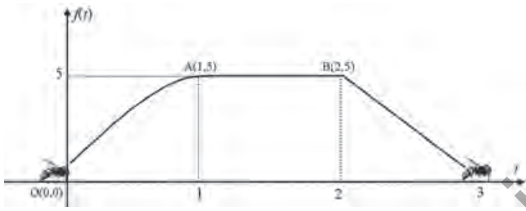
Ingatkan kembali siswa bagaimana cara menentukan fungsi linear dan fungsi kuadrat bila titik yang dilalui fungsi tersebut diketahui. Arahkan siswa untuk memodelkan masalah di samping.

♦ Cobalah kamu tunjukkan grafik lintasan terbang lebah tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Minta siswa mengamati grafik lintasan lebah tersebut. Beri kesempatan kepada siswa untuk berkomentar tentang bentuk lintasan tersebut. Tanya siswa, ada berapa bentuk lintasan lebah pada sketsa di samping. Pandu siswa untuk menemukan bentuk fungsi lintasan lebah (1) tersebut. Tanya siswa, kenapa fungsi lintasan tersebut seperti demikian? Berikan kesempatan pada siswa yang lain untuk memberikan pendapat.

Perhatikan gambar dari ilustrasi Masalah 10.3



Gambar 10.6 Ilustrasi gerakan lebah

Jadi, model fungsi lintasan lebah tersebut berdasarkan gambar di atas adalah:

$$f(t)=\begin{cases} at^2+bt+c & \text{jika } 0\le t<1 \\ 5 & \text{jika } 1\le t<2 \\ mt+n & \text{jika } 2\le t\le 3 \end{cases} \quad \text{.........................} \; (1)$$

dengan a, b, c, m, n bilangan real.

Dari ilustrasi, diperoleh data sebagai berikut.

- Misalkan posisi awal lebah pada saat hinggap di tanah adalah posisi pada waktu t = 0 dengan ketinggian 0, disebut titik awal O(0,0),
- Kemudian lebah terbang mencapai ketinggian maksimum 5 meter pada waktu t = 1 sampai t = 2, di titik A(1,5) dan B(2,5).
- Pada akhir waktu t = 2, lebah kembali terbang menukik sampai hinggap kembali di tanah dengan ketinggian 0, di titik C(3,0).

Berdasarkan data tersebut, kita akan menentukan fungsi lintasan lebah, dengan langkah-langkah berikut.

1. Substitusi titik O(0,0) ke fungsi kuadrat $f(t)= at^2 + bt + c$ diperoleh c = 0.
2. Substitusi titik A(1,5) ke fungsi kuadrat $f(t)= at^2 + bt + c$ diperoleh $a + b + c = 5$, karena $c = 0$, maka $a + b = 5$.
3. Karena fungsi kuadrat mencapai maksimum pada saat $t = 1$ maka $\dfrac{-b}{2a} = 1$ atau $b = -2a$.

4. Dengan mensubstitusi $b = -2a$ ke $a + b = 5$ maka diperoleh $a = -5$ dan $b = 10$.
5. Jadi, fungsi kuadrat tersebut adalah $f(t) = -5t^2 + 10t$.
6. Lebah tersebut terbang konstan pada ketinggian 5 maka fungsi lintasan tersebut adalah $f(t) = 5$.
7. Substitusi titik $B(2,5)$ ke fungsi linear $f(t) = mt + n$, diperoleh $5 = 2m + n$.
8. Substitusi titik $C(3,0)$ ke fungsi linear $f(t) = mt + n$, diperoleh $0 = 3m + n$ atau $n = -3m$.
9. Dengan mensubstitusi $n = -3m$ ke $5 = 2m + n$ maka diperoleh $m = -5$ dan $n = 15$.
10. Fungsi linear yang dimaksud adalah $f(t) = -5t + 15$.

Dengan demikian, model fungsi lintasan lebah tersebut adalah:

$$f(t) = \begin{cases} -5t^2 + 10t & \text{jika} \quad 0 \le t < 1 \\ 5 & \text{jika} \quad 1 \le t < 2 \\ -5t + 15 & \text{jika} \quad 2 \le t \le 3 \end{cases} \quad \text{.............................} \quad (2)$$

Pandu siswa untuk menemukan bentuk (2) kemudian berikan kesempatan bagi siswa untuk menggambar kembali grafik fungsi (2) tersebut di bidang koordinat kartesius.

Selanjutnya limit fungsi pada saat $t = 1$ dan $t = 2$ dapat dicermati pada tabel berikut.

Tabel 10.1 Nilai pendekatan $y = f(t)$ pada saat t mendekati 1

t	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999	...
$f(t)$	4,55	4,80	4,95	4,9995	5	...
1	...	1,001	1,01	1,1	1,2	1,3
5	...	5	5	5	5	5

Tabel 10.2 Nilai pendekatan $y = f(t)$ pada saat t mendekati 2

t	1,7	1,8	1,9	1,99	1,999	...
$f(t)$	5	5	5	5	5	...
5	...	2,001	2,01	2,1	2,2	2,3
5	...	4,995	4,95	4,5	4	3,5

Minta siswa mengamati nilai pada tabel di samping. Tanya siswa, dari mana di peroleh nilai f(t) pada setiap sel.

Arahkan siswa untuk mengamati setiap nilai yang mendekati 1 dari kiri dan kanan, atau mendekati 2 dari kiri dan kanan. Tanya siswa kenapa $\lim\limits_{t \to 1^-}(5t^2 + 10t) = 5$, *dan* $\lim\limits_{t \to 1^+} 5 = 5$ *Minta siswa untuk memberikan kesimpulan.*

Tanya siswa kenapa

$\lim\limits_{t \to 1^+} 5 = 5$ *dan*

$\lim\limits_{t \to 1^-}(5t^2 + 10t) = 5$

Dari pengamatan pada tabel, dapat kita lihat bahwa y akan mendekati 5 pada saat t mendekati 1 dan y akan mendekati 5 pada saat t mendekati 2.

Perhatikan strategi lainnya. Mari perhatikan nilai fungsi pada t mendekati 1 dari kiri dan kanan, sebagai berikut:

I. Untuk t mendekati 1

$\lim\limits_{t \to 1^-}(5t^2 + 10t) = 5$ (makna $t \to 1^-$ adalah nilai t yang mendekati 1 dari kiri)

$\lim\limits_{t \to 1^+} 5 = 5$ (makna $t \to 1^+$ adalah nilai t yang mendekati 1dari kanan)

Ternyata saat t mendekati 1 dari kiri , nilai fungsi $y = f(t) = -5t^2 + 10t$ mendekati 5. Demikian saat t mendekati 1 dari kanan, nilai fungsi $f(t) = 5$ mendekati 5. Kita menulisnya $\lim\limits_{t \to 1^-}(5t^2 + 10t) = 5 = \lim\limits_{t \to 1^+} 5$. Dengan demikian fungsi lintasan lebah mempunyai limit sebesar 5 pada saat t mendekati 1, baik dari kiri maupun kanan.

II. Untuk t mendekati 2

$\lim\limits_{t \to 2^-} 5 = 5$ (makna $t \to 2^-$ adalah nilai t yang mendekati 2 dari kiri)

$\lim\limits_{t \to 2^+} (-5t + 15)$ (makna $t \to 2^+$ adalah nilai t yang mendekati 2 dari kanan)

Ternyata saat t mendekati 2 dari kiri, nilai fungsi $f(t) = 5$ mendekati 5. Demikian juga saat t mendekati 2 dari kanan, nilai fungsi $y = f(t) = -5t + 15$ mendekati 5. Hal ini dapat dinyatakan $\lim\limits_{t \to 2^-} 5 = 5 = \lim\limits_{t \to 2^+}(-5t + 15)$. Dengan demikian fungsi lintasan lebah mempunyai limit sebesar 5 pada saat t mendekati 2, baik dari kiri maupun kanan.

Berdasarkan masalah dan contoh di atas, kita tetapkan pengertian limit fungsi, sebagai berikut.

Siswa diminta mendefinisikan limit fungsi. Jika siswa mendapatkan kesulitan, guru mengarahkan kembali ke konsep pendekatan kanan dan kiri dari sebuah fungsi. Arahkan siswa kembali memahami Definisi 10.1 dan melihat implementasi definisi pada Contoh 10.1. Minta siswa memberikan komentar tentang hubungan Definisi 10.1 dengan Contoh 10.1

Definisi 10.1

Misalkan f sebuah fungsi $f : R \to R$ dan misalkan L dan c bilangan real.

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $f(x)$ mendekati L untuk semua x mendekati c.

Catatan:
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ dibaca limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati c sama dengan L.

Kita menyatakan bahwa f mendekati L ketika x mendekati c yang terdefinisi pada selang/interval yang memuat c kecuali mungkin di c sendiri.

Seperti yang telah dijelaskan di awal bab ini, sebuah pengamatan pada permasalahan akan melahirkan pengertian dan konsep umum. Tetapi ada baiknya kita harus menguji kembali konsep tersebut. Mari kita amati kembali konsep limit fungsi tersebut dengan mengambil strategi numerik, dengan langkah-langkah pengamatan sebagai berikut.

1. Tentukanlah titik-titik x yang mendekati c dari kiri dan kanan!
2. Hitung nilai $f(x)$ untuk setiap nilai x yang diberikan?
3. Kemudian amatilah nilai-nilai $f(x)$ dari kiri dan kanan.
4. Ada atau tidakkah suatu nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati c tersebut?

Contoh 10.1

Misalkan fungsi $f(x) = x + 1$ untuk $x \in R$. Kita menentukan x mendekati 2, kemudian kita tentukan nilai y oleh fungsi $y = f(x)$ pada tabel berikut. Kemudian amatilah tabel berikut.

Tabel 10.3 Nilai fungsi $f(x) = x + 1$ pada saat x mendekati 2

x	1	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	…
y	2	2,5	2,7	2,9	2,99	2,999	…
2	…	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3
2	…	3,001	3,01	3,1	3,5	3,7	4

Apakah pengamatanmu? Perhatikanlah tabel tersebut. Kita dapat memberikan beberapa pengamatan sebagai berikut.

- ♦ Ada banyak bilangan real yang dapat ditentukan yang mendekati 2.
- ♦ Setiap titik x mempunyai peta di y oleh fungsi yang diberikan.
- ♦ Setiap peta x juga mendekati peta 2.
- ♦ Tampak bahwa pen-dekatan ada dari kiri dan kanan tabel.

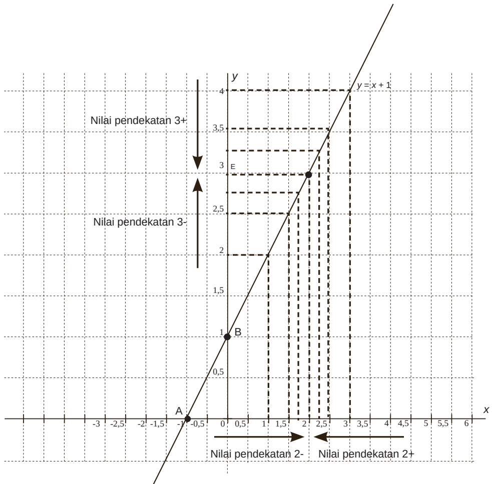
Menurut kamu, apa yang terjadi jika y hanya mendekati dari sebelah kiri atau kanan saja? Apakah ada fungsi yang demikian

Alternatif Penyelesaian

1. $f(x) = x^3$ (pendekatan ke $x = 0$ dari kiri sama dengan pendekatan dari kanan)
2. $f(x) = x^2$ untuk   (pendekatan ke $x = 0$ hanya dari kanan)
3. $f(x) = \frac{1}{x}$ (pendekatan ke $x = 0$ dari kiri tidak sama dengan pendekatan dari kanan)

Perhatikan sketsa berikut:

Berdasarkan definisi, fungsi mempunyai limit jika limit kiri sama dengan limit kanan, minta siswa untuk membuat contoh. Minta siswa untuk mendapatkan fungsi yang pendekatan kiri tidak sama dengan pendekatan kanan. Minta siswa untuk mendapatkan fungsi yang hanya mempunyai pendekatan kiri atau kanan saja.
(contoh ada di samping)
Arahkan siswa mengamati gambar di samping. Minta siswa memberi komentar akan tanda bulatan penuh pada saat $x = 2$. Minta siswa mengamati nilai pendekatan fungsi pada saat x mendekati 2 dari kanan dan kiri.
Minta salah satu siswa menjelaskan pendapatnya tentang Gambar 10.7, arahkan siswa yang lain untuk bertanya.



Gambar 10.7 Nilai pendekatan 2 dari kiri dan kanan pada fungsi $f(x) = x + 1$

Secara matematik, fungsi $f(x) = x + 1$ mendekati 3 pada saat x mendekati 2 dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\lim_{x \to 2} (x+1) = 3$$

Arahkan siswa kembali menghubungkan hasil limit di samping dengan Definisi 10.1

Jika kita perhatikan tabel dan gambar, nilai limit mendekati 3 pada saat x mendekati 2, kemudian $f(2) = 3$. Ini berarti, fungsi mempunyai limit di x mendekati 2 dan fungsi terdefinisi pada $x = 2$. Bagaimana dengan fungsi $f(x)$ yang tidak terdefinisi pada titik pendekatannya? Perhatikan contoh berikut ini!

Contoh 10.2

Jika fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ untuk $x \in R$, $x \neq 1$.

Misal $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$

untuk $x \neq 1$. Nilai-nilai pendekatan $f(x)$ untuk nilai-nilai x yang mendekati 1 dapat dilihat pada tabel berikut.

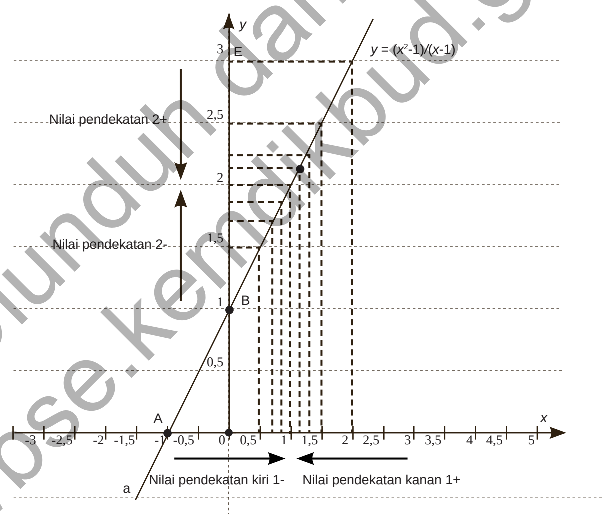
Minta siswa mengamati nilai pendekatan limit pada saat x mendekati 1 dari kiri dan kanan. Arahkan siswa untuk mencari nilai pendekatan fungsi dengan nilai x yang lebih dekat lagi dengan 1 dari kiri dan kanan.

Tabel 10.4 Nilai fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ mendekati 2, pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999	…
y	1	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	…
1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7	2
?	…	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3

Minta siswa mengamati dengan teliti, nilai pendekatan fungsi pada saat x mendekati 2. Minta siswa membandingkan pendekatan dari kiri dan kanan.

Berdasarkan nilai tabel di atas, dapat dilihat nilai $f(x)$ akan mendekati 2 pada saat x mendekati 1 dan fungsi tidak terdefinisi pada $x = 1$. Secara geometri dapat diperlihatkan sebagai berikut.



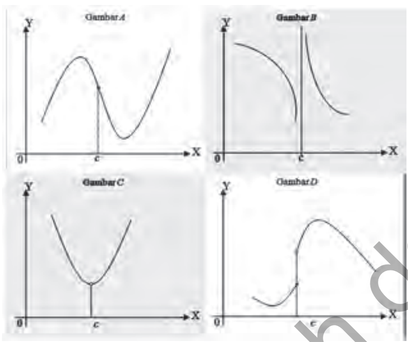
Gambar 10.8 Nilai pendekatan 1 dari kiri dan kanan pada fungsi $f(x)\ \dfrac{x^2-1}{x-1}$ dengan $x \neq 1$

Minta siswa membandingkan jawaban dari Tabel 10.4 dan Gambar 10.8 dengan proses limit dengan menggunakan faktorisasi. Berikan kesempatan pada siswa untuk memberikan komentar. Arahkan siswa untuk memperhatikan dan me-

Secara matematik, fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ dengan $x \neq 1$ akan mendekati 2 pada saat x mendekati 1 (kanan dan kiri) dituliskan sebagai berikut. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

Diskusi

Coba kamu diskusikan kasus berikut!
Ajaklah temanmu memperhatikan dan mengamati beberapa gambar berikut! Gambar manakah yang menunjukkan bentuk fungsi yang mempunyai limit pada saat x mendekati c? Jelaskanlah jawabanmu?



Gambar 10.9 Grafik fungsi $f(x)$ terkait nilai limit pada x mendekati c

Alternatif Penyelesaian

Jika kita amati titik pendekatan c pada sumbu x maka dapat kita lihat juga nilai pendekatan juga pada sumbu y atau pada kurva. Perhatikan gambar di atas.

1. Jika diamati nilai fungsi di $x = c$ maka fungsi terdefinisi pada Gambar A, tak terdefinisi pada Gambar B, tak terdefinisi pada Gambar C dan terdefinisi pada Gambar D.

2. Jika diamati limit kiri dan kanan fungsi di saat x mendekati c maka limit kiri sama dengan limit kanan pada Gambar A dan C, dan limit kiri tidak sama dengan limit kanan pada Gambar B dan D.

3. Jika diamati limit fungsi di saat x mendekati c maka fungsi mempunyai limit pada Gambar A dan C dan tidak mempunyai limit pada Gambar B dan D.

ngamati beberapa gambar tersebut. Arahkan kembali ke Definisi 10.1 Arahkan siswa untuk membentuk kelompok diskusi 2 atau 4 orang. Ingatkan kembali siswa tentang definisi limit fungsi di atas. Arahkan siswa untuk menghubungkan definisi limit tersebut dengan keempat gambar berikut dan berikan mereka kesempatan untuk memberikan komentar dan saling menanggapi. Guru harus memberikan kesimpulan akhir.

Minta siswa menganalisis nilai pendekatan fungsi dari kanan dan kiri pada x =1 pada Tabel 10.5 dan Gambar 10.10.

Contoh 10.3

Perhatikan fungsi berikut:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{jika} \quad x\le 1 \\ x+1 & \text{jika} \quad x>1 \end{cases}$$

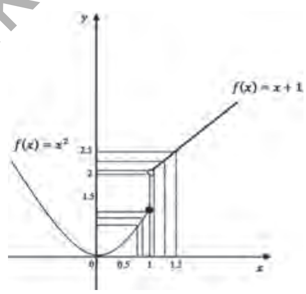
Jika $y = f(x)$ maka nilai-nilai pendekatan $f(x)$ untuk nilai-nilai x mendekati 1 dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 10.5 Nilai fungsi $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{jika} \quad x\le 1 \\ x+1 & \text{jika} \quad x>1 \end{cases}$ **mendekati 2, pada saat *x* mendekati 1**

x	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999	…
y	0	0,25	0,49	0,81	0,98	0,998	…
1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7	2
?	…	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3

Minta siswa memberikan pendapat tentang maksud bulatan kosong dan berisi pada Gambar 10.10 pada saat x = 1. Minta siswa mengkaitkan definisi limit fungsi dengan kesimpulan bahwa fungsi di samping tidak mempunyai limit? Tanyakan siswa, kenapa?

Berdasarkan tabel di atas, $f(x)$ akan mendekati 1 pada saat x mendekati 1 dari kiri sementara $f(x)$ mendekati 2 pada saat x mendekati 1 dari kanan. Hal ini mengakibatkan $f(x)$ tidak mempunyai limit pada saat x mendekati 1. Secara geometris dapat diperlihatkan sebagai berikut.



Gambar 10.10 Grafik fungsi $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{jika} \quad x\le 1 \\ x+1 & \text{jika} \quad x>1 \end{cases}$

Dengan demikian fungsi $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{jika} \quad x\le 1 \\ x+1 & \text{jika} \quad x>1 \end{cases}$ tidak memiliki limit pada saat x mendekati 1

Diskusi

Menurut kamu, mengapa fungsi di atas tidak memiliki limit di x = 1? Dapatkah kamu berikan contoh lain untuk fungsi yang tidak memiliki limit di titik tertentu?

Arahkan siswa mengkaitkan contoh ini ke definisi limit fungsi. Melalui pemahaman siswa tentang definisi limit fungsi, berikan mereka waktu membuat sebuah contoh dan mempresentasikan di depan kelas. Guru harus membantu dan mengarahkahkan siswa menarik kesimpulan akhir.

Alternatif Penyelesaian

Kembali kepada definisi eksistensi limit suatu fungsi maka:

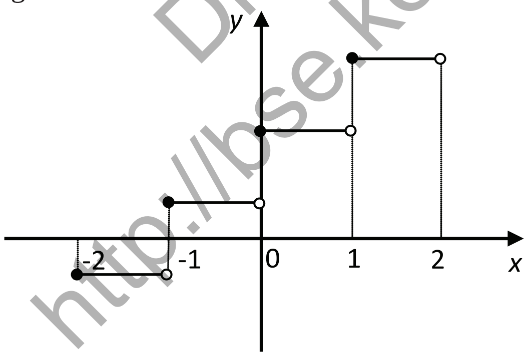
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$ dan $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$ sehingga

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. Dari definisi diperoleh kesimpulan bahwa $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ tidak ada.

Sebagai contoh:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & jika \quad -2 \le x < -1 \\ 1 & jika \quad -1 \le x < 0 \\ 3 & jika \quad 0 \le x < 1 \\ 5 & jika \quad 1 \le x < 2 \end{cases}$$

. Perhatikan nilai limit pada saat x mendekati -1, x mendekati 0, dan x mendekati 1 pada gambar.



Gambar 10.10a Grafik $f(x) = \begin{cases} -1 & jika \quad -2 \le x < -1 \\ 1 & jika \quad -1 \le x < 0 \\ 3 & jika \quad 0 \le x < 1 \\ 5 & jika \quad 1 \le x < 2 \end{cases}$

Arahkan siswa untuk menggambar fungsi tersebut! Berikan waktu kepada siswa untuk menjelaskan pendapatnya kemudian guru mengajak siswa mengambil kesimpulan.

2. Sifat-Sifat Limit Fungsi

Berdasarkan Contoh 10.1, Contoh 10.2 dan Contoh 10.3 di atas, secara induktif di peroleh sifat berikut

Sifat-10.1

Misalkan f suatu fungsi dengan $f: R \to R$ dan L, c bilangan real.

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$.

Kita akan merumuskan sifat – sifat limit fungsi aljabar melalui pengamatan pada beberapa contoh berikut. Kamu diminta untuk memperhatikan, mengamati dan menemukan sifat – sifat limit fungsi.

Minta siswa mengamati Tabel 10.6, 10.7, 10.8 dan menentukan limit masing – masing fungsi.

Contoh 10.4

a) Jika $f(x) = 2$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut. Diberikan beberapa nilai-nilai x yang mendekati 1.

Tabel 10.6 Nilai pendekatan $f(x) = 2$, pada saat x mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...
y	2	2	2	2	2	2	...
1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
?	...	2	2	2	2	2	2

Apa yang kamu peroleh dari Tabel 10.6?

Tanya siswa, kenapa limit kiri sama dengan limit kanan pada $\lim\limits_{x \to 1} 2 = 2$, $\lim\limits_{x \to 1} 4 = 4$, $\lim\limits_{x \to 1} k = k$

Kita dapat amati, jika x mendekati 1 dari kiri dan kanan maka nilai y akan mendekati 2. Secara matematika ditulis $\lim\limits_{x \to 1^-} 2 = 2 = \lim\limits_{x \to 1^+} 2$ atau $\lim\limits_{x \to 1} 2 = 2$ (berdasarkan Sifat 10.1)

b) Jika $f(x) = 4$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 ditunjukkan pada tabel berikut. Diberikan beberapa nilai x yang mendekati 1.

Tabel 10.7 Nilai pendekatan *f*(*x*) = 4, pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...
y	4	4	4	4	4	4	...
1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	
?	...	4	4	4	4	4	

Kita dapat amati, $\lim\limits_{x\to 1^-} 4 = 4 = \lim\limits_{x\to 1^+} 4$ atau $\lim\limits_{x\to 1} 4 = 4$ (berdasarkan Sifat 10.1).

c) Jika $f(x) = k$ dengan k bilangan real maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 ditunjukkan pada tabel berikut. Diberikan beberapa nilai x yang mendekati 1.

Tabel 10.8 Nilai pendekatan, *f(x)* = *k* pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...
y	*k*	*k*	*k*	*k*	*k*	*k*	...
1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	1,8
?	...	*k*	*k*	*k*	*k*	*k*	*k*

Kita dapat amati, jika x mendekati 1 dari kiri dan kanan maka nilai y akan mendekati k. Hal ini dapat kita tuliskan secara matematika, $\lim\limits_{x\to 1^-} k = k = \lim\limits_{x\to 1^+} k$ dengan $\lim\limits_{x\to 1} k = k$ atau (berdasarkan Sifat 10.1).

Minta dan bantu siswa menunjukkan limit pada contoh 10.4 dengan grafik

Secara umum, dapat disimpulkan sifat berikut:

Sifat-10.2

Misalkan $f(x) = k$ adalah fungsi konstan dan c bilangan real, maka $\lim\limits_{x\to c} k = k$.

Arahkan siswa memahami Sifat 10.2 dari pengamatan pada Tabel 10.6, 10.7, 10.8

Contoh 10.5

Minta siswa mengamati Tabel 10.9, 10.10 dan menentukan limit masing – masing fungsi.

Perhatikan limit fungsi $f(x) = x$ pada contoh 10.5a, 10.5b berikut dengan pendekatan x yang berbeda.

a. Jika $f(x) = x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ ada saat x mendekati 1 ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.9 Nilai pendekatan $f(x) = x$, pada saat x mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	…
y	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	…
1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
?	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2

Minta dan bantu siswa menunjukkan limit pada Contoh 10.5 dengan grafik.

Kita amati pergerakan nilai - nilai x dan $f(x)$ pada tabel. Perhatikan, jika x mendekati 1 dari kiri dan kanan maka nilai y akan mendekati 2. Hal ini dapat ditulis secara matematika dengan $\lim\limits_{x\to 1^-} x = 1 = \lim\limits_{x\to 1^+} x$ atau $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$ (berdasarkan Sifat 10.1).

Coba kamu tunjukkan kembali nilai limit fungsi tersebut dengan gambar?

b. Jika $f(x) = x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 2 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.10 Nilai pendekatan $f(x)$, pada saat x mendekati 2

x	1	1,2	1,5	1,9	1,99	1,999	…
y	1	1,2	1,5	1,9	1,99	1,999	…
2	…	2,001	2,01	2,1	2,5	2,8	3
?	…	2,001	2,01	2,1	2,5	2,8	3

Kita dapat amati $\lim\limits_{x\to 2^-} x = 2 = \lim\limits_{x\to 2^+} x$ atau $\lim\limits_{x\to 2} x = 2$ (berdasarkan sifat 10.1).

- Dapatkah kamu menunjukkan kembali nilai limit fungsi tersebut dengan gambar?

Arahkan siswa memahami Sifat 10.3 dari pengamatan pada Tabel 10.9, dan 10.10

Secara umum, dari contoh tersebut diperoleh sifat berikut:

Sifat-10.3

Misalkan $f(x) = x$, adalah adalah fungsi dan c bilangan real, maka $\lim\limits_{x\to c} x = c$

Contoh 10.6

a. Jika $f(x) = 2x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Minta siswa mengamati Tabel 10.11, 10.12 dan menentukan limit masing – masing fungsi.

Tabel 10.11 Nilai pendekatan *f(x)* = 2*x* pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...
y	0	0,4	1,0	1,8	1,98	1,998	...
1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
?	...	2,001	2,02	2,2	2	2	2

Kita dapat amati $\lim\limits_{x\to 1^-} 2x = 2 = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x$ atau $\lim\limits_{x\to 1} 2x = 2$

Jika diuraikan maka:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} 2x &= (2)\lim_{x\to 1}(x)\\ &= (2)(1) \qquad \text{(lihat } \textbf{Contoh 10.5a}\text{: } \lim_{x\to 1} x = 1\text{)}\\ &= 2\end{aligned}$$

b. Jika $f(x) = 4x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Minta dan bantu siswa menunjukkan limit fungsi pada Contoh 10.6 dengan grafik

Tabel 10.12 Nilai pendekatan *f(x)* = 4*x* pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	…
y	0	0,8	2,0	3,6	3,96	3,996	…
1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
?	…	4,004	4,04	4,4	6,0	7,2	8

Kita dapat amati $\lim\limits_{x\to 1^-} 4x = 4 = \lim\limits_{x\to 1^+} 4x$ atau $\lim\limits_{x\to 1} 4x = 4$

Jika diuraikan proses dengan kaitannya dengan $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$ maka:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} 4x &= (4)\lim_{x\to 1}(x)\\ &= (4)(1) \qquad \text{(lihat } \textbf{Contoh 10.5a}\text{: } \lim_{x\to 1} x = 1\text{)}\\ &= 4\end{aligned}$$

Secara umum, dari contoh tersebut diperolah sifat berikut:

Arahkan siswa memahami Sifat 10.4 dari pengamatan pada Tabel 10.11, dan 10.12

Sifat-10.4

Misalkan *f* adalah fungsi yang mempunyai limit bila *x* mendekati *c*, dengan *c* adalah bilangan real,

$\lim\limits_{x\to c}[kf(x)] = k[\lim\limits_{x\to c} f(x)]$

Minta siswa mengamati Tabel 10.13, 10.14 dan menentukan limit masing – masing fungsi.

Contoh 10.7

a. Jika $f(x) = x^2$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.13 Nilai pendekatan *f(x)* = x^2 pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	…
y	0	0,04	0,25	0,81	0,98	0,99	…
1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	3
?	…	1,00	1,02	2,21	2,25	2,50	3

Kita dapat amati $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2$ atau $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$

Jika di uraikan maka:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} x^2 &= \lim_{x \to 1} (x)(x) \\ &= (\lim_{x \to 1} x)(\lim_{x \to 1} x) \qquad \text{(lihat } \textbf{Contoh 10.5a}\text{: } \lim_{x \to 1} x = 1 \text{)} \\ &= (1)(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

b. Jika $f(x) = 2x^2$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.14 Nilai pendekatan *f(x)* = 2 *x*² pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	…
y	0	0,08	0,5	1,62	1,96	2,00	…
1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	3
?	…	2,00	2,04	2,42	2	2,50	3

Kita dapat amati $\lim\limits_{x \to 1^-} 2x^2 = 2 = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x^2$ atau $\lim\limits_{x \to 1} 2x^2 = 2$.

Bila diuraikan prosesnya dengan kaitannya terhadap $\lim\limits_{x \to 1} 2 = 2$ dan $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$. Perhatikan ke 3 uraian berikut.

Uraian 1	Uraian 2
$\lim\limits_{x \to 1} (2)(x)(x)$	$\lim\limits_{x \to 1} (2)(x^2)$
$= (\lim\limits_{x \to 1} 2)(\lim\limits_{x \to 1} x)(\lim\limits_{x \to 1} x)$	$= (\lim\limits_{x \to 1} 2)(\lim\limits_{x \to 1} x)$
$= 2 \times 1 \times 1$	$= 2 \times 1$
$= 2$	$= 2$
karena:	karena:
$\lim\limits_{x \to 1} 2 = 2$ (**Contoh 10.4a**)	$\lim\limits_{x \to 1} 2 = 2$ (**Contoh 10.4a**)
dan	dan
$\lim\limits_{x \to 1} x = 1$ (**Contoh 10.5a**)	$\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$ (**Contoh 10.7a**)

Minta dan bantu siswa menunjukkan limit fungsi pada Contoh 10.6 dengan grafik

Uraian 3

$\lim\limits_{x \to 1} (2x)(x)$

$= (\lim\limits_{x \to 1} 2x)(\lim\limits_{x \to 1} x)$

$= 2 \times 1$

$= 2$

karena:

$\lim\limits_{x \to 1} 2x = 2$ **(contoh 10.6a)**

dan

$\lim\limits_{x \to 1} x = 1$ **(contoh 10.5a)**

Berdasarkan contoh di atas, maka dapat diperoleh sifat berikut:

Arahkan siswa memahami Sifat 10.5 dari pengamatan pada Tabel 10.13, dan 10.14

Sifat-10.5

Misalkan f, g adalah dua fungsi yang mempunyai limit bila x mendekati c.

$$\lim_{x \to c} [f(x)g(x)] = [\lim_{x \to c} f(x)][\lim_{x \to c} g(x)]$$

Minta siswa mengamati Tabel 10.15, 10.16, 10.17, 10.18 dan menentukan limit masing – masing fungsi.

Contoh 10.8

a. Jika $f(x) = 2x^2 - x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.15 Nilai pendekatan $f(x) = 2x^2 - x$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	…
y	0	0	0,72	0,97	0,99	…
1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	2
?	…	1,00	1,03	1,32	3	6

Kita dapat amati $\lim\limits_{x \to 1^-} [2x^2 - x] = 1 = \lim\limits_{x \to 1^+} [2x^2 - x]$ atau $\lim\limits_{x \to 1} [2x^2 - x] = 1$.

Bila diuraikan proses dengan kaitannya pada $\lim\limits_{x \to 1} 2x^2 = 2$ dan $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$ maka,

$$\lim_{x\to1}\left[2x^2 - x\right] = \lim_{x\to1}\left[(2x^2)-(x)\right]$$
$$= \lim_{x\to1}(2x^2) - \lim_{x\to1}(x)$$
$$= (2)-(1)$$
$$= 1$$

(lihat **Contoh 10.7b**: $\lim_{x\to1} 2x^2 = 1$ dan **Contoh 10.5a**: $\lim_{x\to1} x = 2$)

b. Jika $f(x) = x^2 - 4x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.16 Nilai pendekatan $f(x) = x^2 - 4x$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	…
y	0	-1,7	-2,79	-2,79	-3,00	…
1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	2
?	…	-3,00	-3,00	-3,01	-3,19	-3,75

Kita dapat amati $\lim_{x\to1^-}\left[x^2 - 4x\right] = -3 = \lim_{x\to1^+}\left[x^2 - 4x\right]$ atau $\lim_{x\to1}\left[x^2 - 4x\right] = -3$.

Bila diuraikan proses dengan kaitannya pada $\lim_{x\to1} x^2 = 1$ dan $\lim_{x\to1} 4x = 4$ maka,

$$\lim_{x\to1}\left[x^2 - 4x\right] = \lim_{x\to1}\left[(x^2)-(4x)\right]$$
$$= \lim_{x\to1}(x^2) - \lim_{x\to1}(4x)$$
$$= (1)-(4)$$
$$= -3$$

(lihat **Contoh 10.7a**: $\lim_{x\to1} x^2 = 1$ dan **Contoh 10.5b**: $\lim_{x\to1} 4x = 4$)

c. Jika $f(x) = 2x^2 + x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.17 Nilai pendekatan $f(x) = 2x^2 + x$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	…
y	0	1	2,52	2,95	3	…

1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	2
?	…	3,01	3,05	3,52	6	10

Kita dapat amati $\lim\limits_{x \to 1^-} [2x^2 + x] = 3 = \lim\limits_{x \to 1^+} [2x^2 + x]$ atau $\lim\limits_{x \to 1} [2x^2 + x] = 3$.

Bila diuraikan proses dengan kaitannya pada $\lim\limits_{x \to 1} 2x^2 = 2$ dan $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$ maka,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1}\left[2x^2 + x\right] &= \lim_{x \to 1}\left[(2x^2) + (x)\right] \\ &= \lim_{x \to 1}(2x^2) + \lim_{x \to 1}(x) \\ &= (2) + (1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

(lihat **Contoh 10.7b**: $\lim\limits_{x \to 1} 2x^2 = 2$ dan **Contoh 10.5b**: $\lim\limits_{x \to 1} 4x = 4$)

d. Jika $f(x) = x^2 + 4x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.18 Nilai pendekatan $f(x) = x^2 + 4x$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	…
y	0	2,25	4,41	4,94	4,99	…
1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	2
?	…	5,01	5,06	5,61	8,25	12

Minta dan bantu siswa menunjukkan limit pada Contoh 10.6 dengan grafik

Kita dapat amati $\lim\limits_{x \to 1^-} [x^2 + 4x] = 5 = \lim\limits_{x \to 1^+} [x^2 + 4x]$ atau $\lim\limits_{x \to 1} [x^2 + 4x] = 5$.

Bila diuraikan proses dengan kaitannya pada $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$ dan $\lim\limits_{x \to 1} 4x = 4$ maka,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1}\left[x^2 + 4x\right] &= \lim_{x \to 1}\left[(x^2) + (4x)\right] \\ &= \lim_{x \to 1}(x^2) + \lim_{x \to 1}(4x) \\ &= (1) + (4) \\ &= 5 \end{aligned}$$

(lihat **Contoh 10.7a**: $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$ dan **Contoh 10.6b**: $\lim\limits_{x \to 1} 4x = 4$)

Berdasarkan contoh di atas maka dapat diperoleh sifat berikut:

Sifat-10.6

Misalkan *f*, *g* adalah dua fungsi yang mempunyai limit bila *x* mendekati *c*, dengan *c* adalah bilangan real,

$$\lim_{x\to c}\left[f(x) \pm g(x)\right] = [\lim_{x\to c} f(x)] \pm [\lim_{x\to c} g(x)]$$

Arahkan siswa memahami Sifat 10.6 dari pengamatan pada Tabel 10.15, 10.16, 10.17, 10.18

Contoh 10.9

a. Jika $f(x) = \dfrac{2}{2x^2 - x}$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Minta siswa mengamati Tabel 10.19, 10.20 dan menentukan limit masing – masing fungsi.

Tabel 10.19 Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{2}{2x^2 - x}$ pada saat x mendekati 1

x	0,1	0,7	0,9	0,99	0,999	…
y	–25	7,14	2,78	2,06	2,01	…
1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7
?	…	1,99	1,94	1,52	0,67	0,49

Kita dapat amati $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2}{2x^2 - x} = 2 = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{2x^2 - x}$ atau $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{2x^2 - x} = 2$

Bila diuraikan proses dengan kaitannya dengan $\lim\limits_{x\to 1} 2 = 2$ dan $\lim\limits_{x\to 1}[2x^2 - x]$ maka,

$$\lim_{x\to 1}\frac{2}{2x^2-x} = \frac{\lim_{x\to 1} 2}{\lim_{x\to 1}\left[2x^2-x\right]}$$ (lihat **Contoh 10.4a**: $\lim_{x\to 1} 2 = 2$ dan

$$= \frac{\lim_{x\to 1} 2}{\lim_{x\to 1}\left[2x^2-x\right]}$$ **Contoh 10.8a**: $\lim_{x\to 1} [2x^2 - x] = 1$)

$$= \frac{2}{1}$$

$$= 2$$

b. Jika $f(x) = \dfrac{x^2+4x}{2x^2+x}$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.20 Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{x^2+4x}{2x^2+x}$ pada saat x mendekati 1

x	0,1	0,7	0,9	0,99	0,999	…
y	3,42	1,96	1,75	1,67	1,67	…
1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7
?	…	1,67	1,66	1,59	1,38	1,30

Kita dapat amati $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+4x}{2x^2+x} = 1{,}67 = \lim_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+4x}{2x^2+x}$ atau $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x}{2x^2+x} = 1{,}67$

Bila diuraikan proses dengan kaitannya dengan $\lim_{x\to 1} [x^2 + 4x] = 5$ dan $\lim_{x\to 1} [2x^2 + x] = 3$ maka,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x}{2x^2+x} = \frac{\lim_{x\to 1}(x^2+4x)}{\lim_{x\to 1}(2x^2+x)}$$ (lihat **Contoh 10.8c**: $\lim_{x\to 1} [x^2 + 4x] = 5$ dan **Contoh 10.8d**: $\lim_{x\to 1} [2x^2 + x] = 3$

$$= \frac{5}{3}$$

$$= 1{,}67$$

Latihan 10.1

Latihan 10.1 telah di selesaikan. Arahkan siswa untuk mengerjakan latihan 10.1 dan pandu mereka menentukan nilai limit dengan memanfaatkan sifat.

Tunjukkan dengan pendekatan numerik,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 4}{2x} = \frac{(\lim\limits_{x \to 2} x)^2 + (\lim\limits_{x \to 2} 4)}{(\lim\limits_{x \to 2} 2)(\lim\limits_{x \to 2} x)}$$

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan tabel berikut.

x	1,99	1,999	…	2	…	2,001	2,01
2	2	2	…	4	…	2	2
4	4	4	…	2	…	4	4
$\frac{x^2+4}{2x}$	2	2	…	2	…	2	2

Dari tabel, diperoleh:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 4}{2x} = 2, \ \lim_{x \to 2} x = 2, \ \lim_{x \to 2} 2 = 2, \ \lim_{x \to 2} 4 = 4 \text{ dan}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 4}{2x} = \frac{(\lim\limits_{x \to 2} x)^2 + (\lim\limits_{x \to 2} 4)}{(\lim\limits_{x \to 2} 2)(\lim\limits_{x \to 2} x)} = \frac{(2)^2 + (4)}{(2)(2)} = 2$$

Berdasarkan contoh di atas maka dapat diperoleh sifat berikut:

Arahkan siswa memahami Sifat 10.7 dari pengamatan pada Tabel 10.19, dan 10.20

Sifat-10.7

Misalkan f, g adalah dua fungsi yang mempunyai limit bila x mendekati c, dengan c adalah bilangan real dan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$, maka

$$\lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$$

Minta siswa mengamati Tabel 10.21, 10.22 dan menentukan limit masing – masing fungsi.

Contoh 10.10

a. Jika $f(x) = 8x^3$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.21 Nilai pendekatan $f(x) = 8x^3$ pada saat x mendekati 1

x	0,1	0,7	0,9	0,99	0,999	…
y	0,01	2,74	5,83	7,76	7,98	…
1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7
?	…	8,02	8,24	10,65	27	39,30

Kita dapat amati $\lim\limits_{x\to 1^-} 8x^3 = 8 = \lim\limits_{x\to 1^+} 8x^3$ atau $\lim\limits_{x\to 1} 8x^3 = 8$.

Bila diuraikan proses dengan kaitannya dengan $\lim\limits_{x\to 1} 2x = 2$ maka,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} 8x^3 &= \lim_{x\to 1}(2x)^3 \\
&= \lim_{x\to 1}(2x)(2x)(2x) \\
&= (\lim_{x\to 1} 2x)(\lim_{x\to 1} 2x)(\lim_{x\to 1} 2x) \\
&= (\lim_{x\to 1} 2x)^3 \\
&= (2)^3 \\
&= 8
\end{aligned}$$

b. Jika $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.22 Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ pada saat x mendekati 1

x	0,1	0,7	0,9	0,99	0,999	…
y	400	8,16	4,94	4,08	4,01	…

1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7
?	…	3,99	3,92	3,31	1,78	1,38

Kita dapat amati $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{4}{x^2} = 4 = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4}{x^2}$ atau $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4}{x^2} = 4$. Bila diuraikan proses dengan kaitannya dengan $\lim\limits_{x\to1} 4 = 4$ dan $\lim\limits_{x\to1} x^2 = 1$ maka,

$$\lim_{x\to1}\frac{4}{x^2} = \lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x}\right)^2$$
$$= \lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{2}{x}\right)$$
$$= \left(\lim_{x\to1}\frac{2}{x}\right)\left(\lim_{x\to1}\frac{2}{x}\right)$$
$$= \left(\lim_{x\to1}\frac{2}{x}\right)^2$$
$$= 2^2$$
$$= 4$$

Minta dan bantu siswa menunjukkan limit pada Contoh 10.10 dengan grafik

Latihan 10.2

Tunjukkan dengan pendekatan numerik, $\lim\limits_{x\to2} x = \lim\limits_{x\to2}\left(\sqrt[3]{x}\right)^3$

x	1,5	1,9	1,99	1,999	...
$\sqrt[3]{x}$	1,14	1,24	1,26	1,26	...
$(\sqrt[3]{x})^3$	1,5	1,9	1,99	2	...
2	...	2,001	2,01	2,1	2,5
1,26	...	1,26	2,01	1,28	1,36
2	...	2	2,01	2,1	2,5

Siswa diminta melakukan beberapa percobaan melalui pengamatan proses numerik $y = x$ dan $\sqrt[3]{x}$. Gunakan Sifat 10.5

Minta siswa untuk melakukan percobaan dengan mengambil pendekatan bilangan negatif. Contoh apakah

$$\lim_{x\to-2} x = \lim_{x\to-2}\left(\sqrt[4]{x}\right)^4$$

Berikan kesempatan kepada siswa untuk memberikan komentar, apa yang terjadi?

Dari tabel, dapat dilihat pendekatan kiri dan kanan pada fungsi $y = x$ dan $y = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$ sehingga $\lim\limits_{x\to2} x = \lim\limits_{x\to2}\left(\sqrt[3]{x}\right)^3$

Arahkan siswa memahami Sifat 10.8 dari pengamatan pada Tabel 10.21, dan 10.22.

Sifat-10.8

Misalkan f adalah fungsi yang mempunyai limit bila x mendekati c, dengan c adalah bilangan real dan n adalah bilangan positif.

$$\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$$

Siswa diminta melakukan beberapa percobaan melalui pengamatan beberapa contoh dengan proses numerik

Latihan 10.3

Coba kamu lakukan percobaan untuk menunjukkan sifat $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$

Arahkan dan pandu siswa menemukan Sifat 10.9 berdasarkan Latihan 10.3 yang mereka kerjakan.

Sifat-10.9

Misalkan f adalah fungsi yang mempunyai limit bila x mendekati c, dengan c adalah bilangan real, dan n adalah bilangan bulat positif dan $\lim_{x \to c} f(x) \geq 0$

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$$

Latihan 10.4

Arahkan kembali siswa untuk menyelesaikan soal di samping dengan melengkapi tabel.(Soal di samping telah diselesaikan)

a. Tunjukkan dengan menggunakan pendekatan numerik nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{\sqrt{8-x^2}.\sqrt{3x^2-4x}}{\sqrt[3]{2x^2+3x-6}+\sqrt[3]{3x+2}}$ pada saat x mendekati 2 dengan melengkapi tabel di bawah ini.

Lengkapi tabel berikut!

Tabel 10.23: Nilai pendekatan $f(x)=\dfrac{\sqrt{8-x^2}.\sqrt{3x^2-4x}}{\sqrt[3]{2x^2+3x-6}+\sqrt[3]{3x+2}}$ **pada saat *x* mendekati 2**

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	...	2	...	2,0001	2,001	2,01
$8-x^2$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\sqrt{3x^2-4x}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\sqrt[3]{2x^2+3x-6}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\sqrt[3]{3x+2}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\sqrt{8-x^2}.\sqrt{3x^2-4x}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	...	2	...	2,0001	2,001	2,01
$\sqrt[3]{2x^2+3x-6}+\sqrt[3]{3x+2}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\dfrac{\sqrt{8-x^2}.\sqrt{3x^2-4x}}{\sqrt[3]{2x^2+3x-6}+\sqrt[3]{3x+2}}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

b. Tunjukkan dengan menggunakan sifat – sifat limit fungsi di atas, nilai pendekatan $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{8-x^2}.\sqrt{3x^2-4x}}{\sqrt[3]{2x^2+3x-6}+\sqrt[3]{3x+2}}$ pada saat x mendekati 2 dengan melengkapi tabel berikut dan memanfaatkan nilai pendekatannya.

Arahkan siswa menyelesaikan soal di samping dengan memanfaatkan nilai limit fungsi $y = x$, $y = 2$ dan $y = 3$. Soal tersebut telah diselesaikan. Arahkan siswa melengkapi tabel di bawah dan mendapatkan nilai limit masing – masing fungsi untuk menyelesaikan Latihan 10.4 (Soal telah diselesaikan)

Tabel 10.24: Nilai pendekatan fungsi *y* = *x*, *y* = 2, dan *y* = 3 pada saat *x* mendekati 1

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	...	2	...	2,0001	2,001	2,01	2,1
$y = x$	1,9	1,99	1,999	1,9999	...	2	...	2,0001	2,001	2,01	2,1
$y = 2$	2	2	2	2	...	2	...	2	2	2	2
$y = 3$	3	3	3	3	...	3	...	3	3	3	3

Dari tabel di atas diperoleh $\lim\limits_{x\to 2} x = 2$, $\lim\limits_{x\to 2} 2 = 2$, $\lim\limits_{x\to 2} 3 = 3$ sehingga dengan memanfaatkan sifat maka:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{8-x^2}.\sqrt{3x^2-4x}}{\sqrt[3]{2x^2+3x-6}+\sqrt[3]{3x+2}} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{8-x^2}.\sqrt{3x^2-4x})}{\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt[3]{2x^2+3x-6}+\sqrt[3]{3x+2})}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{8-x^2}.\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{3x^2-4x})}{\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{2x^2+3x-6}+\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{3x+2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(\lim\limits_{x\to 2}2)^3-(\lim\limits_{x\to 2}x)^2}.\sqrt{3(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-4(\lim\limits_{x\to 2}x)}}{\sqrt[3]{2(\lim\limits_{x\to 2}x)^2+3(\lim\limits_{x\to 2}x)-(\lim\limits_{x\to 2}2)(\lim\limits_{x\to 2}3)}+\sqrt[3]{3(\lim\limits_{x\to 2}x)+(\lim\limits_{x\to 2}2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(2)^3-(2)^2}.\sqrt{(3)(2)^2-(2)^2(2)}}{\sqrt[3]{(2)(2)^2+(3)(2)-2(3)}+\sqrt[3]{(3)(2)+(2)}}$$

$$= \frac{\sqrt{4}.\sqrt{4}}{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{8}}$$

$= 1$

Contoh 10.11

Sebuah bidang logam dipanaskan di bagian tengah dan memuai sehingga mengalami pertambahan luas sebagai fungsi waktu $f(t) = 0{,}25t^2 + 0{,}5t$ (cm)^2. Tentukan kecepatan perubahan pertambahan luas bidang tersebut pada saat t = 5 menit.

Minta siswa mengamati Tabel 10.25 dan minta siswa mendapatkan limit fungsi tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Kecepatan perubahan pertambahan luas adalah besar pertambahan luas dibandingkan dengan besar selisih waktu. Perhatikan tabel!

Tabel 10.25: Nilai pendekatan $f(x) = 0{,}25\, t^2 + 0{,}5t$ pada saat t mendekati 5

t	$\Delta t = t - 5$	$\Delta f = f(t) - f(5)$	$\Delta f/\Delta t$
1	–4	–8	2
2	–3	–6,75	2,25
3	–2	–5	2,5
4	–1	–2,75	2,75
4,5	–0,5	1,4375	2,875
4,9	–0,1	–0,2975	2,975
4,99	–0,01	–0,029975	2,9975
4,999	–0,001	–0,00299975	2,99975
4,9999	–0,0001	–0,000299997	2,999975
5	0,0000	0	?
5,0001	0,0001	0,000300002	3,000025
5,001	0,001	0,00300025	3,00025
5,01	0,01	0,030025	3,0025
5,1	0,1	0,3025	3,025
5,5	0,5	1,5625	3,125
6	1	3,253,25	3,25

Dengan melihat tabel di atas, pada saat t mendekati 5 maka Δt mendekati 0 dan $f(t)$ akan mendekati 3 (cm^2/menit).

Beri kesempatan bagi siswa untuk mengerjakan limit fungsi di samping. Beri kesempatan bagi siswa yang lain untuk memberi komentar. Jika siswa tidak dapat mengerjakannya, beri bantuan berupa pertanyaan atau mengingatkan konsep terkait yang sudah dimiliki siswa.

Alternatif Penyelesaian lainnya

$f(t) = 0,25t^2 + 0,5t$

$f(5) = 0,25(5)^2 + 0,5(5) = 8,75$

$$\lim_{t\to 5}\frac{f(t)-f(5)}{t-5} = \lim_{t\to 5}\frac{(0,25t^2+0,5t)-f(5)}{t-5}$$

$$= \lim_{t\to 5}\frac{0,25t^2+0,5t-8,75}{t-5}$$

$$= \lim_{t\to 5}\frac{0,5(0,5t^2+t-17,5)}{t-5}$$

$$= \lim_{t\to 5}\frac{0,5(0,5t+3,5)(t-5)}{t-5} \qquad \text{karena } t \neq 5$$

$$= \lim_{t\to 5} 0,5(0,5t+3,5)$$

$$= 0,5(0,5 \times 5 + 3,5)$$

$$= 3$$

(Soal telah diselesaikan) Berikan waktu pada siswa menggunakan manipulasi aljabar pada proses limit di atas terlebih dulu!

Jika $t - 5$ diganti menjadi T, maka proses limit di atas menjadi:

Jika $T = t - 5$ atau $t = T + 5$ maka pada saat t menuju 5 maka T menuju 0 sehingga:

$$\lim_{t\to 5}\frac{f(t)-f(5)}{t-5} = \lim_{T\to 0}\frac{f(T+5)-f(5)}{T}$$

$$= \lim_{T\to 0}\frac{0,25(T+5)^2+0,5(T+5)-8,75}{T}$$

$$= \lim_{T\to 0}\frac{0,25T^2+3T}{T} \qquad \text{karena T} \neq 0$$

$$= \lim_{T\to 0}(0,25T+3)$$

$$= 3$$

Arahkan siswa untuk memahami bentuk tentu dengan tak tentu dengan menunjukkan fungsi di samping. Minta

3. Menentukan Limit Fungsi

Pada bagian ini, kita akan menentukan limit dengan menggunakan pendekatan numerik, memanfaatkan faktorisasi dan perkalian sekawan. Coba kita pelajari permasalahan yang dihadapi oleh grup diskusi berikut.

siswa untuk membuat contoh fungsi dan membedakan apakah fungsi tersebut mempunyai bentuk tentu atau tak tentu pada nilai x tertentu.

Lina dan Wati adalah teman satu kelompok belajar di kelasnya. Suatu hari mereka mendapat tugas dari guru untuk menggambar beberapa grafik fungsi dengan mencari sebanyak mungkin titik-titik yang dilalui fungsi tersebut. Pada saat mereka menentukan beberapa nilai di daerah asalnya, mereka mendapatkan kesulitan untuk menentukan nilai pada fungsi-fungsi berikut.

1. Untuk $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$, mereka sulit mendapatkan nilai fungsi untuk $x = 1$ dan $x = -1$ karena jika disubstitusi nilai 1 atau –1 ke fungsi, nilai $f(1)$ dan $f(-1)$berbentuk $\dfrac{0}{0}$.
2. Untuk $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x+4}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$, mereka sulit mendapatkan nilai fungsi untuk $x = 0$ karena jika nilai 0 disubstitusi maka mereka memperoleh $f(0)$ berbentuk $\dfrac{1}{0} - \dfrac{1}{0}$.

Menurut kamu, apakah penyebab permasalahan mereka?

Jika kita pelajari lebih teliti, Lina dan Wati sedang menghadapi permasalahan bentuk tak tentu suatu limit. Coba kita tampilkan kembali sifat suatu limit. Misalkan f suatu fungsi dengan $f: R \to R$ dan L, c bilangan real, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$.

Nilai L yang kita maksud adalah bentuk tentu limit. Jadi, jika kita substitusikan nilai c ke fungsi $f(x)$ sehingga $f(c)$ adalah bentuk-bentuk tak tentu seperti $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^∞, dan lain-lain oleh karena itu, misi kita dalam limit fungsi adalah mencari bentuk tentu dari limit fungsi, dengan langkah-langkah berikut:

1. Substitusikan $x = c$ ke fungsi sehingga diperoleh $f(c) = L$ (L adalah nilai tentu).
2. Jika $f(c)$ bentuk tak tentu maka kita harus mencari bentuk tentu limit fungsi tersebut dengan memilih

strategi: mencari beberapa titik pendekatan (numerik), memfaktorkan, perkalian sekawan, dll.

Perhatikan beberapa contoh soal dan penyelesaian berikut.

Minta siswa untuk mengerjakan terlebih dahulu soal di samping.

Minta siswa membandingkan jawaban pada proses numerik dengan faktorisasi. Minta siswa menunjukkan proses limit secara geometris. Pandu siswa menggambar kurva fungsi tersebut

Contoh 10.12

Tentukanlah nilai $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

Alternatif Penyelesaian

Cara I (Numerik)

Jika $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ maka pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 2 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.26 Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ pada saat x mendekati 2

x	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	...	2	...	2,001	2,01	2,1	2,3	2,5
y	0,143	0,189	0,231	0,248	0,250	...	?	...	0,250	0,252	0,268	0,302	0,333

Dengan melihat tabel di atas, jika x mendekati 2, maka $y = f(x)$ akan mendekati 0,25.

Cara II (Faktorisasi)

Perhatikan bahwa $f(2)$ berbentuk $\dfrac{0}{0}$ sehingga $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ perlu kita ubah menjadi $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$ sehingga:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)}{(x+2)} \quad \text{karena } x \neq 2 \\
&= \frac{1}{4} \\
&= 0,25
\end{aligned}$$

Contoh 10.13

Tentukanlah nilai $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2x+5}}{x+2}$

Alternatif Penyelesaian

Cara I (Numerik)

Misalkan $y = \dfrac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2x+5}}{x+2}$ maka pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 2

ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.27 Nilai pendekatan

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2x+5}}{x+2}$ pada saat x mendekati –2

x	–2,3	–2,3	–2,1	–2,01	–2,001	…
y	2,594	–2,530	–2,501	–2,499	–2,5	…
-2	…	– 1,999	– 1,99	–1,9	–1,8	–1,7
?	…	–2,5	– 2,501	–2,528	2,599	– 2,763

Dengan melihat tabel di atas, jika nilai x mendekati –2 maka $y = f(x)$ akan mendekati –2,5

Cara II (Perkalian sekawan)

Ingat kembali bentuk sekawan dari bentuk akar pada pelajaran eksponen di Bab I, $\sqrt{x} - a$ sekawan dengan $\sqrt{x}$ + a,

Perhatikan bahwa $f(2)$ berbentuk $\dfrac{0}{0}$ sehingga $f(x)$ =

$\dfrac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2x+5}}{x+2}$ dapat kita ubah dengan mengalikan

bentuk sekawan dari $\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2x+5}\right)$ yaitu:

$$\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2x+5}}{x+2}$$

Minta siswa untuk mengerjakan terlebih dahulu soal di samping. Minta siswa membanding jawaban pada proses numerik dengan perkalian sekawan.

$$= \lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2x+5}}{x+2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2x+5}}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2x+5}}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x^2+x-1)-(2x+5)}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2x+5}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2x+5}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2x+5}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x-3)}{\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2x+5}\right)} \quad \text{karena } x \neq -2$$

$$= -\frac{5}{2}$$

$$= -2{,}5$$

Arahkan siswa membedakan bentuk tentu dan tak tentu dari limit fungsi. Tanya siswa contoh fungsi – fungsi yang mempunyai nilai limit berupa bentuk tentu atau bentuk tak tentu.

Contoh 10.14

Berikut kita akan menyelesaikan permasalahan yang dihadapi oleh Lina dan Wati dengan menentukan nlai limit fungsi tersebut pada pendekatan -1 dan 1 pada contoh ini.

Tentukanlah $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ dan $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$.

Perhatikan nilai fungsi pada absis 1 dan -1 mempunyai nilai yang berbentuk $\dfrac{0}{0}$. Nilai fungsi tersebut adalah bentuk tak tentu sehingga perlu dicari bentuk tentu limit fungsi tersebut pada saat x mendekati 1 dan -1. Perhatikan strategi/cara berikut!

Alternatif Penyelesaian

Cara I (Numerik)

Misalkan $y = f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$. Pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 1 dan –1 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.28 Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ pada saat *x* mendekati 1

x	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999	...
y	1,49	1,64	1,81	1,98	2,00	...
1	...	1,001	1,01	1,1	1,2	1,3
?	...	2,00	2,02	2,21	2,44	2,69

Tabel 10.29 Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ pada saat *x* mendekati –1

x	–1,3	–1,2	–1,1	–1,01	–1,001	...
y	2,69	2,44	2,21	2,02	2,00	...
-1	...	–0,999	–0,99	–0,9	–0,8	–0,7
?	...	2,00	1,98	1,81	1,64	1,49

Dengan melihat tabel-tabel di atas, jika nilai x mendekati 1 maka $y = f(x)$ akan mendekati 2 dan jika nilai x mendekati –1 maka $y = f(x)$ akan mendekati 2.

Cara II (Faktorisasi)

Perhatikan bahwa $f(1) = \dfrac{0}{0}$, $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ dapat diubah menjadi $f(x) = \dfrac{(x^2 + 1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$ sehingga:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + 1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \text{ karena } x \neq -1 \text{ dan } x \neq 1$$

Minta siswa membandingkan jawaban pada proses numerik dengan faktorisasi.

$$= \lim_{x \to 1} \left(x^2 + 1\right)$$

$$= \lim_{x \to 1} \left(1^2 + 1\right)$$

$$= 2$$

dan

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)\left(x-1\right)}{\left(x+1\right)\left(x-1\right)} \text{ karena } x \neq -1 \text{ dan}$$

$x \neq 1$

$$= \lim_{x \to -1} \left(x^2 + 1\right)$$

$$= \lim_{x \to -1} \left[\left(-1\right)^2 + 1\right]$$

$$= 2$$

Minta siswa untuk mengerjakan terlebih dahulu soal di samping. Minta siswa membanding jawaban pada proses numerik dengan perkalian sekawan.

Contoh 10.15

Tentukanlah $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$

Alternatif Penyelesaian

Cara I (Numerik)

Misalkan $y = \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$ maka pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 0 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.30 Nilai pendekatan

$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$ pada saat x mendekati 0

x	–0,3	–0,2	–0,1	–0,01	–0,001	...
y	–0,08	–0,08	–0,07	–0,07	–0,06	...
0	...	0,001	0,01	0,1	0,2	0,3
?	...	–0,06	–0,06	–0,06	–0,05	–0,04

Dengan melihat tabel di atas, jika nilai x semakin mendekati 0 maka $y = f(x)$ akan semakin mendekati –0,06.

Cara II (Perkalian sekawan)

Fungsi $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x+4}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$ mempunyai nilai tidak tentu di $x = 0$ sehingga fungsi perlu di ubah menjadi $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}$ 0, $x \neq 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x+4}}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{16}$$

(Soal di samping telah diselesaikan). Arahkan siswa untuk mengikuti langkah – langkah penyelesaian pada buku siswa.

Minta siswa untuk menyelesaikan sendiri di buku masing – masing atau meminta salah satu siswa menyelesaikan di depan kelas dan mempresentasikan proses penyelesaian yang di peroleh.

Contoh 10.16

Tentukanlah $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+7}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+9}}}{x^2-1}$

Alternatif Penyelesaian

Sederhanakan fungsi,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+9}-\sqrt{x^2+x+7}}{(x^2-1)\sqrt{x^2+x+7}\sqrt{x^2-x+9}}$$

Sederhanakan fungsi,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-x+9}-\sqrt{x^2+x+7}}{(x^2-1)\sqrt{x^2+x+7}\sqrt{x^2-x+9}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-x+9}+\sqrt{x^2+x+7}}{\sqrt{x^2-x+9}+\sqrt{x^2+x+7}}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-2(x-1)}{(x-1)(x+1)\sqrt{x^2+x+7}\sqrt{x^2-x+9}(\sqrt{x^2-x+9}+\sqrt{x^2+x+7})}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-2}{(x+1)\sqrt{x^2+x+7}\sqrt{x^2-x+9}(\sqrt{x^2-x+9}+\sqrt{x^2+x+7})}$$

$$=\frac{-2}{(2)\sqrt{9}\sqrt{9}(\sqrt{9}+\sqrt{9})}$$

$$=-\frac{1}{54}$$

Uji Kompetensi 10.1

Minta siswa menyelesaikan soal-soal pada Uji Kompetensi 10 sebagai tolok ukur kemampuan siswa dalam memahami konsep limit fungsi.

1. Buktikan dengan menggunakan pendekatan numerik bahwa
   a. $\lim_{x\to 2} 6x^3 = (\lim_{x\to 2} 6)(\lim_{x\to 2} x)(\lim_{x\to 2} x)(\lim_{x\to 2} x)$
   b. $\lim_{x\to 2} 6x^3 = (\lim_{x\to 2} 6)(\lim_{x\to 2} x)(\lim_{x\to 2} x^2)$
   c. $\lim_{x\to 2} 6x^3 = (\lim_{x\to 2} 2x)(\lim_{x\to 2} 3x^2)$
   d. $\lim_{x\to 2} 6x^3 = (\lim_{x\to 2} 3x)(\lim_{x\to 2} 2x^2)$
   e. $\lim_{x\to 2} 6x^3 = (\lim_{x\to 2} 6x)(\lim_{x\to 2} x^2)$
   f. $\lim_{x\to 2} 6x^3 = (\lim_{x\to 2} 6)(\lim_{x\to 2} x^3)$

2. Tunjukkan dengan gambar bahwa:
   a. $\lim_{x\to 2} 6 = 6$
   b. $\lim_{x\to 2} x = 2$
   c. $\lim_{x\to 2} 6x = 12$
   d. $\lim_{x\to 2} (6+x) = 8$
   e. $\lim_{x\to 2} (6-x) = 4$
   f. $\lim_{x\to 2} 6x = 12$
   g. $\lim_{x\to 2} 6x^2 = 24$
   h. $\lim_{x\to 2} \frac{6}{x} = 3$

3. Tunjukkan dengan gambar, nilai pendekatan dari fungsi – fungsi berikut:
   a. $\lim_{x\to 2} (x+2)$
   b. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$
   c. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$

d. Jika $f(x)=\begin{cases} x+2 & jika \quad x\le 1 \\ 4-x & jika \quad x\ge 1 \end{cases}$

maka tentukan $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

e. Jika $f(x)=\begin{cases} x+1 & jika \quad x<1 \\ x^2+1 & jika \quad x\ge 1 \end{cases}$

maka tentukan $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

4. Dengan menggunakan strategi, tentukan nilai limit fungsi berikut:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{2x-2}$

b. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4}$

c. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$

e. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+3}-2}$

5. Sketsa dan analisislah limit fungsi di $x = -1$ dan $x = 1$

a. $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{jika} & x\ge 1 \\ 2 & \text{jika} & -1\le x<1 \\ 1 & \text{jika} & x<-1 \end{cases}$

b. $f(x)=\begin{cases} 3x+1 & \text{jika} & x\ge 1 \\ 2x+2 & \text{jika} & -1<x<1 \\ x+1 & \text{jika} & x\le -1 \end{cases}$

c. $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{jika} & x\ge 1 \\ 3x & \text{jika} & -1\le x<1 \\ x^2 & \text{jika} & x<-1 \end{cases}$

d. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{jika} & x\ge 1 \\ 2-x & \text{jika} & -1\le x<1 \\ \sqrt{8-x} & \text{jika} & x<-1 \end{cases}$

e. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{jika} \quad x>1 \\ 2x+1 & \text{jika} \quad -1\le x\le 1 \\ \dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{jika} \quad -\dfrac{3}{2}\le x<-1 \end{cases}$

6. Sebuah garis $y - 2x - 3 = 0$ menyinggung kurva $y = x^2 + x + 2$.

   a. Coba kamu tunjukkan koordinat pendekatan kedua kurva (titik singgung). Gunakan strategi numerik untuk mendapatkannya!

   b. Carilah metode lain untuk mendapatkan titik singgung tersebut!

   c. Sketsalah permasalahan tersebut!

7. Tentukan nilai limit fungsi berikut dengan menggunakan dua metode penyelesaian atau lebih! Bandingkan jawaban yang kamu peroleh!

   a. Jika $f(x) = 3x^2$ maka tentukanlah $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{h}$

   b. Jika I(x) = $3x^2$ maka tentukanlah

   $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{h}$$

   c. Jika $f(x) = 3x^2$ maka tentukanlah

   $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x-4h)-f(x+2h)}{3h}$$

   d. Jika $f(x) = kx^2$ dengan k, p , q dan r adalah bilangan real maka tentukanlah

   $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+ph)-f(x+qh)}{rh}$$

8. Tentukanlah nilai limit fungsi

   $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}}$ dengan menggunakan numerik dan

   perkalian sekawan pada saat x mendekati 2.

9. Jika fungsi $f(x)$ memenuhi $f(x) - 2f(\frac{2013}{2} - x) = x$

maka tentukanlah $\lim\limits_{x \to 2013} \left(\dfrac{3f(x)}{x - 2013} \right)^{2013}$

10. Selesaikan soal-soal limit fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 6} - \sqrt[3]{x^2 + x + 6}}{x^3 - 1}$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2x+1)^5 - (3x+1)^4}{(4x+1)^3 - (5x+1)^2}$

c. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{(3x-2)^2 - (2x-1)^2}{x-1}}$

d. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\dfrac{3}{2x-1} - \dfrac{3}{3x-2}}{x^2 - 1}$

e. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3}{\sqrt{x^2 + x - 2}} - \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$

Minta siswa mengerjakan tugas projek dengan bentuk berkelompok atau pribadi. Beri waktu untuk mengerjakan, menulis laporan dan mempresentasikan di depan kelas

Projek

Himpun informasi penerapan limit fungsi dalam bidang teknik, masalah nyata, fisika, dan teknologi informasi. Rancanglah minimal dua masalah terkait informasi yang kamu peroleh dan buatlah pemecahannya. Buat laporan hasil kerja kelompokmu, dan sajikan di depan kelas.

Bagian penutup ini merupakan rangkuman tentang informasi dan konsep limit fungsi. Ingatkan siswa bahwa materi limit fungsi adalah materi prasyarat untuk differensial pada kelas XI.

D. PENUTUP

Setelah kita membahas materi limit ini, terdapat beberapa hal penting yang menjadi kesimpulan dari hasil penemuan berbagai konsep dan aturan tentang limit, disajikan sebagai berikut.

1. Penentuan limit suatu fungsi di suatu titik c, sangat bergantung pada kedudukan titik c dan daerah asal fungsi tersebut. Dalam pembahasan limit fungsi pada buku ini, yang menjadi daerah asal fungsi adalah himpunan bilangan real di mana fungsi tersebut terdefinisi.

2. Sebuah fungsi f dikatakan mempunyai limit di titik c jika dan hanya jika nilai fungsi untuk x dari kiri dan kanan menuju ke bilangan yang sama.

3. Suatu fungsi f mempunyai limit di titik c, apabila limit kiri sama dengan limit kanan fungsi di titik c.

4. Tidak semua fungsi mempunyai limit di titik c. Titik c tidak harus merupakan anggota daerah asal fungsi, tetapi c bilangan real.

5 Misalkan f sebuah fungsi yang terdefinisi pada himpunan bilangan real dan c dan L adalah bilangan real, nilai fungsi f mendekati L pada saat x mendekati c dapat kita tuliskan dengan:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

6. Misalkan f, g adalah dua fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c, dengan k dan c adalah bilangan real serta n adalah bilangan bulat positif.

   a. $\lim\limits_{x\to c} k = k$

   b. $\lim\limits_{x\to c} x = c$

   c. $\lim\limits_{x\to c}[kf(x)] = k\left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]$

   d. $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)+g(x)\right] = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right] + \left[\lim\limits_{x\to c} g(x)\right]$

   e. $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)-g(x)\right] = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right] - \left[\lim\limits_{x\to c} g(x)\right]$

   f. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\times g(x)] = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right] \times \left[\lim\limits_{x\to c} g(x)\right]$

   g. $\lim\limits_{x\to c}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \left[\dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}\right]$ bila $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$

h. $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x)\right]^n = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]^n$

i. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x \to c} f(x) \geq 0$

bila n bilangan bulat dan genap

7. Selanjutnya kita akan membahas tentang materi statistika. Materi prasyarat yang harus kamu kuasai adalah himpunan, fungsi, operasi hitung bilangan, dan pengukuran. Hal ini sangat berguna dalam penentuan nilai rata-rata, median, modus, quartil, standar deviasi, dan sebagainya. Pada jenjang yang lebih tinggi, kamu harus menguasai tentang fungsi, limit fungsi, dan fungsi yang kontinu sebagai prasyarat untuk mempelajari statistik. Semua apa yang kamu sudah pelajari sangat berguna untuk melanjutkan bahasan berikutnya dan seluruh konsep dan aturan-aturan matematika dibangun dari situasi nyata dan diterapkan dalam pemecahan masalah kehidupan.

Bab 11

STATISTIKA

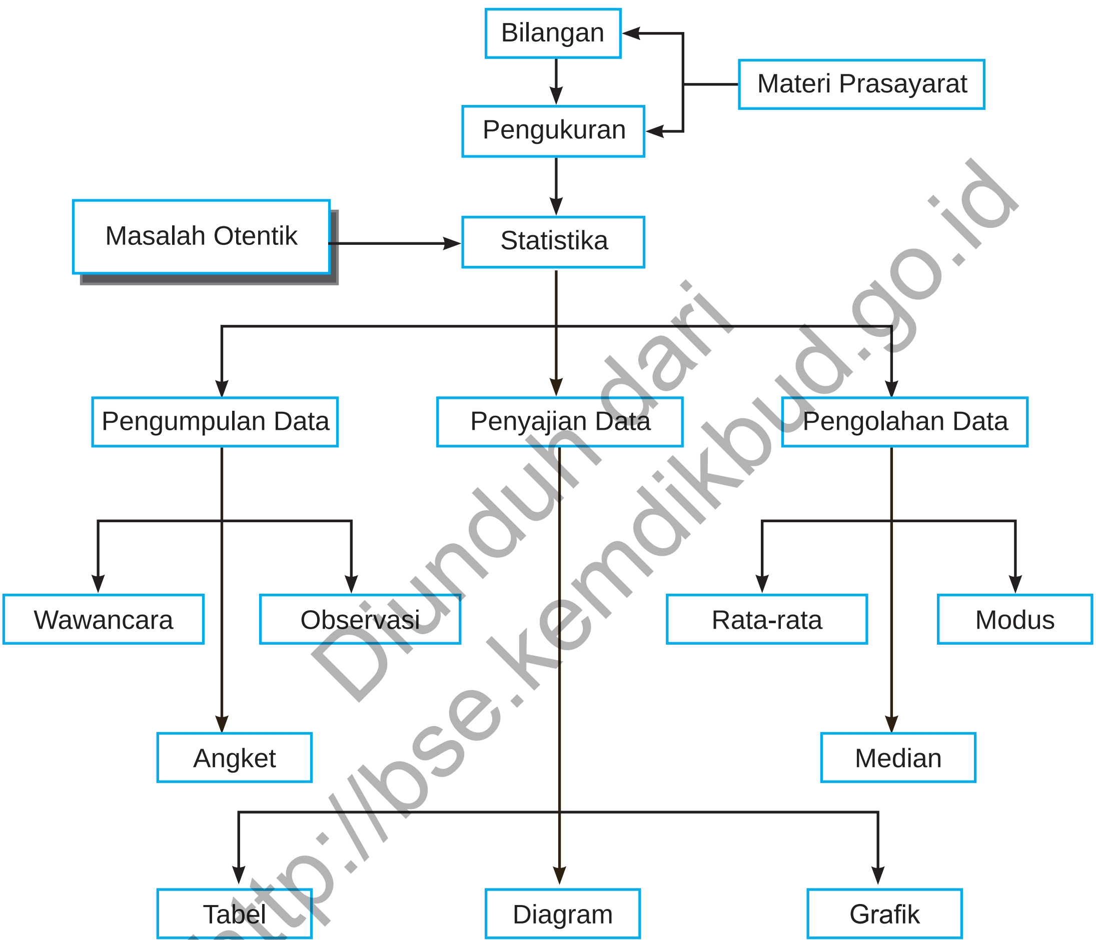
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Melalui proses pembelajaran statistika, siswa mampu: 1. Menunjukkan sikap bertanggung jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan. 2. Mendeskripsikan berbagai penyajian data dalam bentuk tabel atau diagram/plot yang sesuai untuk mengomunikasikan informasi dari suatu kumpulan data melalui analisis perbandingan berbagai variasi penyajian data. 3. Mendeskripsikan data dalam bentuk tabel atau diagram/plot tertentu yang sesuai dengan informasi yang ingin dikomunikasikan. 4. Menyajikan data nyata dalam bentuk tabel atau diagram/plot tertentu yang sesuai dengan informasi yang ingin dikomunikasikan.	Melalui pembelajaran materi statistika, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Melatih berpikir kritis dan kreatif. • Mengamati keteraturan data. • Berkolaborasi menyelesaikan masalah. • Berpikir independen untuk mengajukan ide secara bebas dan terbuka. • Mengamati aturan susunan objek.

Istilah Penting

- *Tabel*
- *Diagram*
- *Histogram*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Penyajian data merupakan salah satu elemen penting dalam mempelajari statistika. Penyajian data yang baik akan mempermudah kita untuk membaca dan untuk selanjutnya mengolah data tersebut. Bentuk penyajian data dapat berupa tabel atau diagram/plot. Untuk lebih memahami perhatikan masalah-masalah berikut.

1. Data Tunggal

Data tunggal merupakan data berkuantitas kecil dan suaatu statistik disebut sebagai data tunggal jika data tersebut hanya memuat satu variabel data yang ingin kita ketahui dari objek populasi. Beberapa contohnya adalah: data nilai ulangan siswa, data tinggi badan siswa dan tingkat keuntungan suatu usaha. Penyajian data yang akan dibahas pada bab ini berbentuk tabel dan diagram/plot. Untuk lebih memahami penyajian data dalam statistik perhatikan masalah dan kegiatan berikut.

Informasikan kepada siswa bahwa materi statistika sangat diperlukan dalam penyelesaian permasalahan kehidupan sehari-hari, misalnya untuk menghitung hasil panen, menghitung laba dari penjualan, menghitung populasi penduduk, menghitung kekayaan penduduk, menentukan besar pajak yang harus dibayar, dan yang paling sering didengar adalah untuk hitung cepat (quick count) hasil pemilihan umum.

a. Penyajian Data dalam Bentuk Tabel

Masalah-11.1

Siti ditugaskan guru untuk melakukan survei data terhadap keuntungan penjualan barang/jasa selama satu tahun melalui buku kas koperasi sekolah. Data yang diperoleh sebagai berikut (dalam satuan ribu rupiah) :
Keuntungan penjualan buku tulis, pensil, ballpoint, keping cd, tinta printer, makanan ringan, kertas HVS, kerta folio, minuman ringan dan air mineral, seragam

Ajukan Masalah 11.1, minta siswa mengamati masalah tersebut dan mendorong siswa mengajukan pertanyaan sekitar pemahaman masalah. Selanjutnya meminta siswa menyajikan data yang terdapat *dalam masalah tersebut ke dalam bentuk tabel dengan caranya sendiri. Diharapkan siswa menuliskan sesuai dengan penyelesaian yang ada di buku.*

Motivasi siswa dengan memberitahu kebermaknaan matematika dalam kehidupan nyata. Misalnya data pada Masalah 11.1 akan mudah dianalisis jika dibentuk ke dalam tabel.

sekolah, sergam olahraga, buku bacaan, majalah komik, dan foto copy secara berturut-turut adalah 400, 300, 550, 200, 325, 540, 350, 450, 750,, 900, 500, 600, 300, dan 525. Sajikan data tersebut dan tentukan lima jenis barang dengan keuntungan tertinggi!

Alternatif Penyelesaian

Jika data tersebut kita daftarkan tanpa menggunakan label barang maka kita dapat menggunakan tabulasi kolom diperoleh tabel yang disajikan sebagai berikut :

Tabel 11.1 Data Keuntungan Barang/Jasa Koperasi Sekolah

Jenis barang/Jasa	Jumlah Keuntungan (Satuan Ribu Rupiah)
Buku tulis	400
Pensil	300
Ballpoint	550
Keeping *CD*	200
Tinta Printer	325
Makanan Ringan	710
Kertas HVS	350
Kertas Folio	600
Minuman Ringan dan Air Mineral	750
Seragam Sekolah	900
Seragam Olah Raga	500
Buku Bacaan	600
Majalah/Komik	300
Fotocopy	525
Total	**7010**

Bagaimana jika tabel tersebut disajikan dalam bentuk baris? Persoalan yang lain juga muncul adalah bagaimana

jika data yang ada lebih banyak?
Dengan menggunakan bantuan pelabelan pada setiap jenis barang/jasa akan membantu dan lebih memudahkan kita dalam menyajikan data yang banyak serta dalam berbagai bentuk tabel, sehingga dengan data berlabel diperoleh tabel berikut ini (Satuan Ribu Rupiah) :

Tabel 11.2 Data Keuntungan Barang/Jasa Menggunakan Label

Jenis barang/ Jasa	Keuntungan
1	400
2	300
3	550
4	200
5	325
6	710
7	350

Jenis barang/ Jasa	Keuntungan
8	600
9	750
10	900
11	500
12	600
13	300
14	525

Dari penyajian tabel di atas diperoleh 5 jenis barang dengan keuntungan tertinggi, yakni:

Tabel 11.3 Data Barang/Jasa dengan Keuntungan tertinggi.

No.	Jenis barang/Jasa	Jumlah Keuntungan
1	Seragam sekolah	900
2	Minuman ringan dan air mineral	750
3	Makanan ringan	710
4	Buku bacaan	600
5	Kertas folio	600

Minta siswa memahami Masalah 11.2. Berdasarkan tabel yang diberikan minta siswa untuk membuat tabel baru berdasarkan frekuensi nilai yang diperoleh siswa.

Masalah-11.2

Setiap akhir semester guru melakukan evaluasi hasil belajar. Data hasil evaluasi ulangan siswa untuk mata pelajaran matematika disajikan dalam bentuk tabel berikut :

Tabel 11.4 Data Nilai Matematika Siswa

Nama	Niai	Nama	Nilai
Siti	80	Ratna	85
Zubaidah	75	Indah	80
Beni	80	Enita	85
Edo	85	Rojak	85
Udin	80	Hartono	75
Dayu	85	Hendra	85
Lani	85	Rizal	85
Wayan	90	Iwan	80
Bambang	80	Syamsul	85
Endang	80	Habibah	85
Marianto	85	Deni	80
Supardi	80	Mahfud	80
Paian	80	Depi	85
Hotma	85	Asni	85
Oldri	100	Reza	80
Ovano	95	Lexi	80

Bentuklah tabel di atas dalam bentuk tabel frekuensi dan tentukan jumlah siswa dengan nilai tertinggi dan terendah serta nilai berapa yang paling banyak diterima siswa tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Untuk data hasil ulangan Matematika disajikan dengan cara mengelompokkan data nilai siswa serta banyak siswa dengan nilai yang sama, diperoleh tabel frekuensi sebagai berikut:

Ajak siswa membandingkan Tabel 11.4 dengan Tabel 11.5. Minta siswa menjelaskan perbedaan kedua tabel.

Tabel 11.5 Tabel distribusi frekuensi

Nilai	Frekuensi
75	2
80	12
85	15
90	1
95	1
100	1

Maka dari tabel distribusi frekuensi di atas diperoleh:

- Nilai tertinggi adalah 100 sebanyak 1 orang siswa
- Nilai terendah adalah 75 sebanyak 2 orang siswa
- Nilai dengan siswa terbanyak adalah 85 sebanyak 15 orang siswa

Dari pembahasan di atas diperoleh banyak kegunaan penyajian data dalam bentuk tabel antara lain data terlihat rapi sehingga memudahkan dalam pengolahan data. Dalam statistik, tabel dibedakan dengan dua jenis yaitu tabel sederhana dan tabel distribusi frekuensi yang sering dipakai pada data berkelompok yang akan kamu pelajari di subbab berikutnya.

b. Penyajian dalam Bentuk Diagram

Terdapat beberapa cara dalam penyajian data berbentuk diagram antara lain: diagram garis, diagram lingkaran dan diagram batang. Untuk lebih memahami penyajian diagram perhatikan masalah-masalah berikut.

a. Diagram Garis

Minta siswa memahami Masalah 11.3, kemudian berdasarkan tabel yang diberikan minta siswa untuk menyajikan data tersebut dalam bentuk diagram garis. Tentu hal ini mengingatkan siswa menggambar persamaan sebuah garis dengan memperhatikan pasangan terurut dari tiap-tiap data yang diberikan.

Masalah-11.3

Ayah Beni bekerja di Amerika dan telah pulang ke Indonesia. Ia ingin menukarkan uang hasil tabungan selama bekerja agar dapat dipakai di tanah air untuk memenuhi kebutuhan mereka. Ia pun mengamati harga jual dan harga beli mata uang dolar Amerika selama beberapa hari. Berikut hasil pencatatan nilai tukar rupiah terhadap dolar yang diamati.

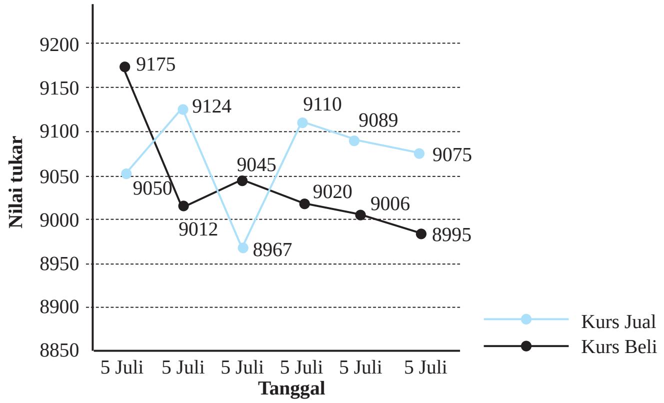
Tabel 11.6 Tabel Nilai Tukar Rupiah

Tanggal	5 Juli	6 Juli	7 Juli	8 Juli	9 Juli	10 Juli
Kurs jual	9.050	9.124	8.967	9.110	9.089	9.075
Kurs beli	9.175	9.012	9.045	9.020	9.006	8.985

Ubahlah tabel dalam bentuk diagram dan tentukan di tanggal berapakah nilai tukar rupiah tertinggi dan terendah! Hitung juga selisih rata-rata nilai kurs jual terhadap kurs beli.

Alternatif Penyelesaian

a. Pilihan untuk mengubah data di atas dalam bentuk diagram cukup banyak antara lain diagram garis, batang, lingkaran dan lain-lain. Pada pembahasan ini akan dipilih diagram garis, silahkan kamu mencoba menyajikan dalam bentuk diagram lainnya. Untuk menampilkan diagram garis kita akan memasangkan setiap datum nilai rupiah dan tanggal pada pada data kurs jual sehingga membentuk titik-titik kemudian hubungkan titik-titik tersebut sehingga membentuk garis-garis. Cara yang sama juga dilakukan untuk data kurs beli, sehingga diperoleh diagram berikut:



Gambar 11.1 Diagram Garis Kurs Rupiah Terhadap Dolar

Dari diagram di atas diperoleh data sebagai berikut :

- Harga kurs jual tertinggi Rp 9.124 berada di tanggal 6 juli dan terendah Rp 8.967 berada di tanggal 7 juli.
- Harga kurs beli tertinggi Rp 9.175 berada di tanggal 5 juli dan terendah Rp 8.985 berada di tanggal 10 juli.

b. Dengan menggunakan konsep rata-rata yang telah kamu pelajari di SMP dan pembulatan desimal diperoleh rata-rata nilai kurs jual dan beli, yakni :

- Rata-rata kurs jual

$$= \frac{9.050 + 9.124 + 8.967 + 9.110 + 9.089 + 9.075}{6}$$

$= 9.069$

- Rata-rata kurs beli

$$= \frac{9.175 + 9.012 + 9.045 + 9.020 + 9.006 + 8.985}{6}$$

$= 9.041$

Dari kedua rata-rata kurs di atas dapat diperoleh selisih rata-rata kurs, yaitu:

= Rata-rata kurs jual – Rata-rata kurs beli

= 9069 – 9041

= 29

Dari perhitungan di atas diperoleh selisih rata-rata nilai kurs adalah Rp 29.

Arahkan siswa untuk membentuk kelompok siswa untuk melakukan kegiatan 11.1

Kegiatan 11.1

Bentuklah kelompok belajarmu

- Catatlah suhu badan minimal 20 orang temanmu di sekolah.
- Buatlah tabel untuk mencatat data suhu badan temanmu tersebut.
- Gambarkanlah data tersebut kedalam bentuk diagram.
- Tentukanlah suhu badan tertinggi dan terendah!
- Bandingkan hasil kerja kelompokmu dengan kelompok yang yang lain, jelaskan perbedaan hasil yang diperoleh!

Sampai pembahasan ini apakah kamu telah melihat penyajian data dalam bentuk tabel dan diagram garis, dapatkah kamu mendeskripsikan perbedaan yang ada dalam membaca data yang ditampilkan melalui tabel terhadap diagram garis?

Melalui grafik di atas kita dapat dengan mudah membaca hasil data nilai tukar rupiah dibandingkan dengan menggunakan tabel. Misalnya, kita dapat dengan mudah menentukan kurs nilai rupiah tertinggi atau pun terendah dan pada saat kapan hal itu terjadi, dan suhu tubuh tertinggi dan terendah pada Kegiatan 11.1. Dari grafik di atas terlihat sumbu X merupakan variabel data pengamatan, sedangkan sumbu Y merupakan nilai data pengamatan dengan satuan tertentu. Pasangan variabel dan nilai pengamatan membentuk titik-titik dan dihubungkan sehingga membentuk diagram garis.

Dari masalah dan kegiatan di atas dapat kita nyatakan bahwa diagram garis adalah suatu penyajian data statistik dengan menggunakan gari-garis lurus yang terhubung dengan komponen-komponen pengamatan. Diagram garis biasanya digunakan untuk menggambarkan data tentang keadaan yang berkesinambungan. Biasanya data bersifat kontinu pada suatu ukuran satuan. Misalnya, kecepatan suatu mobil pada suatu perjalanan, nilai tukar rupiah, dan pertumbuhan jumlah penduduk suatu daerah.

b. Diagram Lingkaran

Masalah-11.4

Sebuah toko *handphone* mencatat penjualan produk *smartphone* yang dijual dalam kurun waktu sebulan. Gambarkan data penjualan *smartphone* dari tabel berikut ke dalam bentuk diagram lingkaran.

Tabel 11.7 Tabel Penjualan Telepon Selular

Jenis HP	Tipe I	Tipe II	Tipe III	Tipe IV	Tipe V	Tipe VI
Banyak Penjualan	35	25	20	40	10	50

Minta siswa untuk memahami Masalah 11.4 berdasarkan data yang disajikan dalam tabel. Arahkan siswa menyajikan data tersebut ke dalam diagram lingkaran. Satu hal yang perlu diingat dalam menggambar diagram lingkaran adalah mengubah data yang diberikan ke dalam persentase atau derajat.

Alternatif Penyelesaian

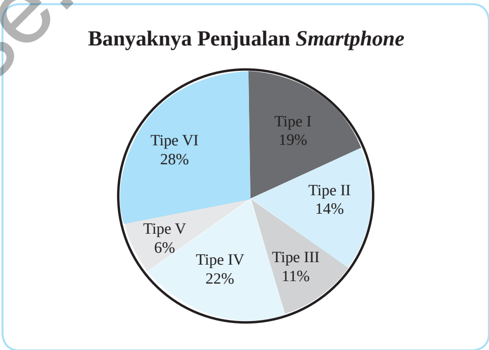
Dari data di atas diperoleh total penjualan *smartphone* adalah 180 unit.

Untuk menggambarkan diagram lingkaran biasanya digunakan dalam dua bentuk yakni bentuk derajat dan bentuk persentase.Dalam bentuk persentase kita menghitung terlebih dahulu besar persentase tiap bagian data penjualan *smartphone* terhadap seluruh penjualan yakni 100%. Sama halnya dengan sudut pusat lingkaran terlebih dahulu menghitung besar sudut tiap bagian data terhadap total sudut lingkaran yaitu 360°. Dengan pembulatan desimal maka besar persentase dan besar sudut lingkaran tiap bagian data penjualan *smartphone* adalah:

Tabel 11.8 Tabel Penjualan Telepon Selular

Tipe Handphone	Banyak Penjualan	Persentase	Sudut pusat lingkaran
Tipe I	35	$\frac{35}{180} \times 100\% = 19\%$	$\frac{35}{180} \times 360^o = 70^o$
Tipe II	25	$\frac{25}{180} \times 100\% = 14\%$	$\frac{25}{180} \times 360^o = 50^o$
Tipe III	20	$\frac{20}{180} \times 100\% = 11\%$	$\frac{20}{180} \times 360^o = 40^o$
Tipe IV	40	$\frac{40}{180} \times 100\% = 22\%$	$\frac{40}{180} \times 360^o = 80^o$
Tipe V	10	$\frac{10}{180} \times 100\% = 6\%$	$\frac{10}{180} \times 360^o = 20^o$
Tipe	50	$\frac{50}{180} \times 100\% = 28\%$	$\frac{50}{180} \times 360^o = 100^o$

Dengan memperoleh besaran persentase tiap bagian pada data penjualan *smartphone* tersebut maka bentuk diagram lingkaran dalam bentuk persentase adalah sebagai berikut.



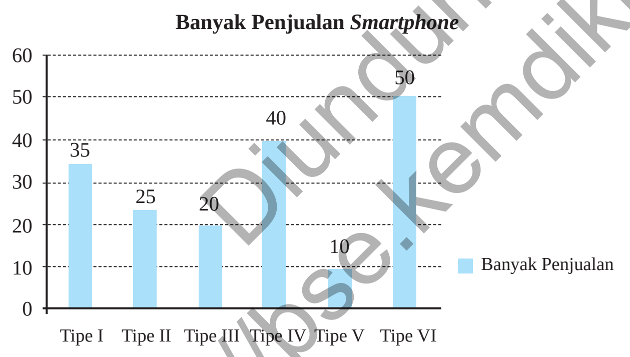
Gambar 11.2 Diagram Lingkaran Bentuk Persentase

Untuk diagram lingkaran dengan besaran sudut kamu selesaikan sebagai latihan.
Dengan demikian dapat dinyatakan bahwa diagram lingkaran adalah penyajian data statistik dengan menggunakan gambar yang berbentuk lingkaran yang pada bagian-bagian dari daerah lingkaran menunjukkan juring atau persentase dari keseluruhan.

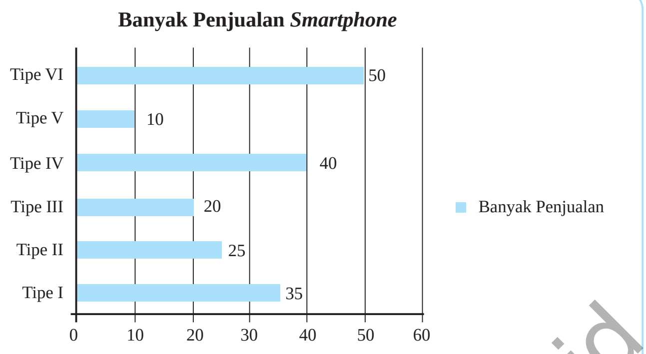
c. Diagram Batang

Perhatikan kembali Masalah 11.4, dari data tersebut kita juga dapat menggambarkan diagram batang. Prinsip penyajian diagram batang relatif sama dengan diagram garis. Setelah menghubungkan variabel pengamatan dengan nilai pengamatan dapat dibentuk grafik batang dengan lebar yang sama dan setinggi atau sejauh nilai data pengamatan. Dengan data penjualan *smartphone* di atas dapat disajikan diagram batang sebagai berikut.

Minta siswa memahami informasi yang diberikan dalam penjelasan tentang diagram batang.



Gambar 11.3 Diagram Batang Bentuk Vertikal



Gambar 11.4 Diagram Batang Bentuk Horizontal

Dari kedua diagram batang di atas dapat dinyatakan bahwa diagram batang merupakan diagram berbentuk persegi panjang yang lebarnya sama namun tinggi atau panjangnya sebanding dengan frekuensi data pada sumbu horizontal maupun vertikal. Dengan diagram garis gan diagram batang dapat membantu kita untuk dapat melihat nilai data yang tertinggi dan terendah.

Dari penyajian data di atas, jelaskanlah keunggulan dan kelemahan setiap penyajian data! Jelaskan pada saat kapankah penyajian data menggunakan tabel, diagram garis, diagram batang dan diagram lingkaran tepat digunakan?

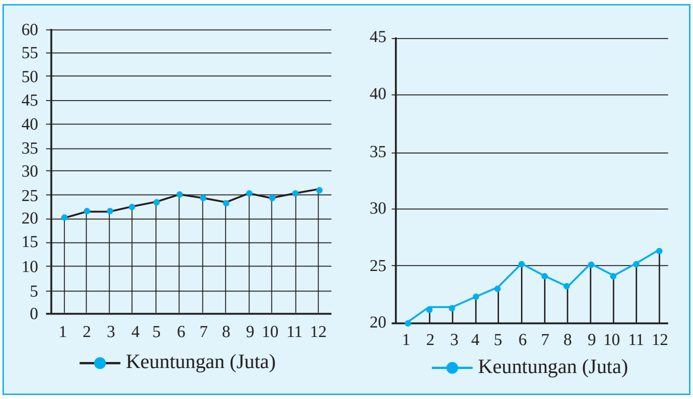
Tabel 11.9 Tabel Keuntungan Penjualan Sepeda Motor

Bulan	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kuntungan (Juta Rupiah)	20	21	21	22	23	25	24	23	25	24	25	26

Ajukan pertanyaan kritis di samping pada siswa. Beri kesempatan untuk menjawab

Pertanyaan kritis:

Tabel di atas adalah data keuntungan penjualan suatu showroom sepeda motor.
Diantara diagram di bawah ini, manakah diagram yang menunjukkan data pada Tabel 11.9 di atas? Jelaskan.



2. Data Kelompok

Coba kamu perhatikan kembali setiap data yang ada pada permasalahan di atas. Andaikan data tersebut bertambah banyaknya tentu dalam penyajian menjadi tidak efektif dan efesien. Oleh karena itu untuk dapat lebih menyederhanakan penyajian data dilakukan dengan mengelompokkan data dalam interval kelas tertentu. Untuk lebih dapat memahami perhatikan berapa masalah berikut.

a. Penyajian Data dalam Bentuk Tabel

Pada subbab di atas sedikit telah disinggung penyajian data berkelompok dengan menggunakan tabel distribusi frekuensi. Penggunaan tabel ini agar data yang cukup besar dapat efektif dan lebih efisien dalam penyajian maupun pengolahan data. Untuk lebih memahami perhatikan masalah berikut.

Masalah-11.5

Hasil Ujian semester mata pelajaran matematika terhadap 80 siswa dinyatakan sebagai berikut.

38	90	92	85	76	88	78	74	70	48
61	83	88	81	82	72	83	87	81	82
48	90	92	85	76	74	88	75	90	97
93	72	91	67	88	80	63	76	49	84
61	83	88	81	82	60	66	98	93	81
80	63	76	49	84	79	80	70	68	92
81	91	56	65	63	74	89	73	90	97
75	83	79	86	80	51	71	72	82	70

Selanjutnya orientasikan Masalah 11.5 pada siswa untuk diamati dan dianalisis berbagai informasi yang diketahui dan yang ditanyakan. Ajukan berbagai pertanyaan untuk menguji pemahaman siswa tentang tabel distribusi frekuensi.

Sajikanlah data di atas dalam bentuk tabel distribusi frekuensi.

Alternatif Penyelesaian

Untuk dapat memudahkan penggunaan data tersebut, susun data berdasarkan urutan terkecil hingga terbesar. Urutan data tersebut dinyatakan sebagai berikut.

38	48	48	49	51	56	60	61	61	63	63	63	65	66
67	68	70	70	70	70	71	72	72	72	73	74	74	74
75	75	76	76	76	76	78	79	79	80	80	80	80	81
81	81	81	81	82	82	82	82	83	83	83	83	84	84
84	84	85	85	86	87	88	88	88	88	88	89	90	90
90	90	91	91	92	92	92	93	93	97	97	98		

Setelah data diurutkan, dengan mudah kita temukan bahwa data terbesar adalah 98 dan data terkecil adalah 38. Selisih data terbesar dengan data terkecil disebut sebagai jangkauan data. Untuk data yang kita kaji, diperoleh:

Jangkauan Data = 98 – 38 = 60

Langkah kita selanjutnya adalah mendistribusikan data-data tersebut ke dalam kelas-kelas interval. Untuk membagi data menjadi beberapa kelas, kita menggunakan aturan Sturgess. Aturan tersebut dinyatakan bahwa jika data yang diamati banyaknya n dan banyak kelas adalah k, maka banyak kelas dirumuskan:

$$k = 1 + (3{,}3) \times \log n$$

Untuk data di atas diperoleh,

$$\begin{aligned}\text{banyak kelas} &= 1 + (3{,}3) \times \log 80 \\ &= 1 + (3{,}3) \times (1{,}903) \\ &= 7{,}28 \approx 7\end{aligned}$$

Jadi 80 data di atas akan dibagi menjadi 7 kelas interval.

Pertanyaan Kritis

1. Jelaskan mengapa angka pembulatan yang dipilih 7 bukan 8?
2. Jelaskan mengapa banyak kelas (*k*) harus bilangan bulat?

Sekarang kita tentukan berapa banyak data yang terdapat pada satu kelas interval. Banyak data dalam satu interval disebut panjang interval kelas yang dirumuskan:

$$\text{Panjang Kelas} = \frac{\text{Jangkauan}}{\text{Banyak kelas}}$$

Maka diperoleh:

$$\text{Panjang Kelas} = \frac{\text{Jangkauan}}{\text{Banyak kelas}} = \frac{60}{7} = 8{,}57 \approx 9$$

Selanjutnya, dengan adanya banyak kelas = 7 dan panjang kelas = 9 dapat kita gunakan untuk membentuk kelas interval yang dinyatakan sebagai berikut:

Kelas I : 38 – 46

Kelas II : 47 – 55

Kelas III : 56 – 64

Kelas IV : 65 – 73

Kelas V : 74 – 82

Kelas VI : 83 – 91

Kelas VII : 92 – 100

Hitung frekuensi anggota dari tiap kelas, dari hasil pengolahan data di atas dapat dibentuk ke dalam tabel sebagai berikut.

Ajukan pertanyaan di samping pada siswa. Ajak siswa mengingat kembali aturan pembulatan bilangan desimal di SMP, yaitu: desimal di bawah 0,5 di bulatkan ke bawah dan 0,5 ke atas dibulatkan ke atas. Jawaban yang diharapkan dari pertanyaan ini adalah:

(1) Hasil perhitungan nilai k pada Masalah 11.5 adalah k = 7,28. Desimalnya di bawah 0,5 sehingga di bulatkan menjadi 7.

(2) Banyak kelas (k) terdefinisi apabila banyaknya adalah bilangan cacah.

Tabel 11.10 Tabel Distribusi Frekuensi

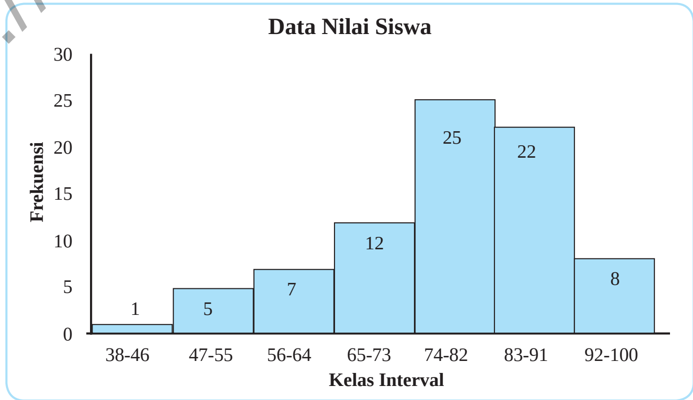
Kelas	Frekuensi
38 – 46	1
47 – 55	5
56 – 64	7
65 – 73	12
74 – 82	25
83 – 91	22
92 – 100	8
Jumlah	80

Perlu dicermati bahwa pembentukan interval kelas tersebut harus memuat semua data. Jika ada satu data yang tidak tercakup pada interval kelas, maka terdapat kesalahan dalam mendistribusikan data.

Minta siswa memahami informasi yang diberikan dalam penyajian data dalam bentuk diagram Histogram.

b. Penyajian dalam Bentuk Diagram (Histogram)

Data pada tabel distribusi frekuensi dapat disajikan dengan menggunakan histogram. Prinsip penyajiannya hampir sama dengan menyajikan diagram batang yaitu meggambarkan grafik batang yang sama lebar namun tidak terputus-putus. Variabel pengamatan berupa interval-interval kelas yang sama panjang dihubungkan dengan nilai pengamatan berupa frekuensi. Maka dengan tabel distribusi frekuensi di atas dapat disajikan histogram berikut ini.



Dari pembahasan di atas dapat dinyatakan bahwa *histogram* adalah jenis grafik batang yang digunakan untuk menampilkan data numerik yang telah disusun dalam interval yang sama.

Pertanyaan Kritis

Mengapa pada histogram grafik batang tidak terputus-putus, jelaskan.

Ajukan pertanyaan kritis di samping. Berikan kesempatan pada siswa untuk menjawab.

Uji Kompetensi 11.1

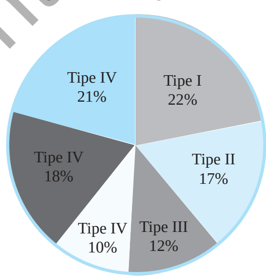
1. Banyak jam tidur yang ideal bagi anak sekolah adalah 10-11 jam per hari yang dibagi atas 8-9 jam di malam hari dan 2 jam di siang hari. Surveilah teman sekelasmu dan catatlah dalam bentuk tabel.
   a. Tentukan berapa banyak temanmu yang jam tidurnya berada di bawah dan di atas standar ideal!
   b. Tentukan berapa banyak temanmu yang tidur malam hari di bawah 9 jam!

2. Susunlah data berikut dalam bentuk tabel distribusi frekuensi :

   82, 41, 20, 90, 84, 48, 84, 76, 89, 78, 60, 43, 95, 74, 62, 88, 72, 64, 54, 83, 71, 41, 67, 81, 75, 98, 80, 25, 78, 64, 35, 52, 76, 55, 85, 92, 65, 81, 77, 80, 23, 60, 79, 32, , 36, 70, 57, 74, 79, 52.

Ajak siswa menyelesaikan soal-soal yang terdapat pada Uji Kompetensi 11.1 di samping. Soal-soal uji kompetensi ini bertujuan untuk mengetahui apakah siswa memahami berbagai penyajian data. Soal-soal ini juga dapat diberikan sebagai tugas di rumah.

3. **Banyak Penjualan Penjualan Handphone**

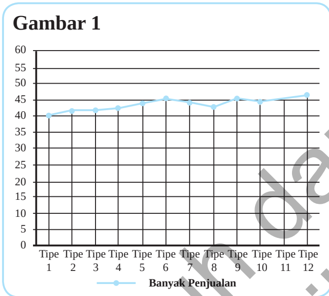


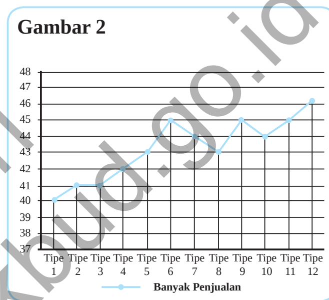
Perhatikan diagram lingkaran di atas!

a. Tentukan persentase penjualan handphone dari tipe IV dan tipe VI.

b. Tentukanlah banyak unit yang dari tiap-tiap tipe dengan mengasumsikan sendiri total unit penjualan handphone.

Untuk menjawab soal no 4 - 6 perhatikan kedua diagram berikut:





4. Jelaskan mengapa kedua diagram di atas dengan data yang sama dapat terlihat berbeda?

5. Jelaskan pada saat kapan Gambar 1 dapat digunakan?

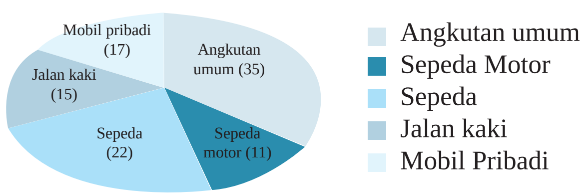
6. Jelaskan pada saat kapan Gambar 2 dapat digunakan?

7. Surveilah tinggi badan teman sekolahmu dan sajikan dalam bentuk ditribusi frekuensi!

8. Sajikan data pada soal no.7 dalam bentuk histogram

9. Hasil survey tentang cara beberapa siswa pergi ke sekolah ditunjukkan pada diagram lingkaran berikut.

Cara Siswa Pergi ke Sekolah



a. Berapa banyak siswa yang disurvei?

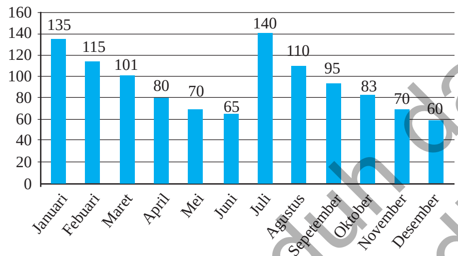
b. Sebutkan cara yang paling sedikit digunakan siswa untuk pergi ke sekolah!

c. Sebutkan cara yang paling banyak digunakan siswa untuk pergi ke sekolah?

d. Berapa persen siswa yang pergi ke sekolah dengan jalan kaki?

10. Banyak penjualan buku tulis sebuah toko setiap dalam satu tahun terakhir ditunjukkan oleh tabel berikut, (buku dalam satuan lusin).

Data Penjualan Buku Tulis



a. Berapa lusin buku yang mampu dijual toko tersebut dalam satu tahun terakhir?

b. Berapa rata-rata penjualan buku setiap bulan?

c. Amatilah penjualan pada semester I dan semester II tabel tersebut, apa yang dapat kamu simpulkan? Mengapa?

d. Berdasarkan data penjualan buku tersebut, terdapat pola penjualan yang dapat ditemukan. Temukanlah pola tersebut dan berikan pendapatmu mengapa bisa terjadi demikian.

Tugas projek diberikan agar siswa mampu untuk menunjukkan dan menggunakan konsep statistika yang telah dipelajari. Gunakan rubrik untuk menilai projek yang tersedia di akhir buku ini.

Projek

Himpunlah informasi berupa data statistik dalam bidang ekonomi, kependudukan, dan meteorologi yang menerapkan berbagai konsep dan aturan statistik dalam menganalisis data. Selesaikanlah masalah tersebut menerapkan aturan-aturan statistik yang sudah kamu pelajari. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Arahkan siswa membuat rangkuman dari berbagai hal yang sudah dipelajari. Penutup di samping berisi tentang kumpulan informasi-informasi penting yang telah dipelajari.

Berdasarkan materi yang telah kita uraikan di atas beberapa kesimpulan perlu kita rangkum guna mengingatkan kembali akan konsep yang nantinya sangat berguna bagi kamu sebagai berikut.

1. Penyajian data dalam bentuk grafik akan memudahkan kita untuk menganalisis data daripada hanya disajikan dalam bentuk informasi tertulis. Hal ini disebabkan karena melalui gambar atau grafik akan lebih cepat diketahui informasi yang ada daripada data disajikan dalam bentuk paragraph.
2. Penyajian data dalam bentuk grafik terdiri dari: penyajian data dengan tabel, diagram batang, diagram garis, diagram batang, dan histogram.
3. Penyajian data menggunakan tabel distribusi frekuensi dikenal aturan Sturgess. Aturan tersebut menyatakan bahwa jika data yang diamati banyaknya n dan banyak kelas adalah k maka banyak kelas dirumuskan: $k = 1 + (3{,}3 \times \log n)$.

Beberapa hal yang telah kita rangkum di atas adalah modal dasar bagi kamu dalam belajar statistika. Konsep-konsep dasar di atas harus kamu pahami dengan baik karena akan membantu dalam pemecahan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Bab 12

Peluang

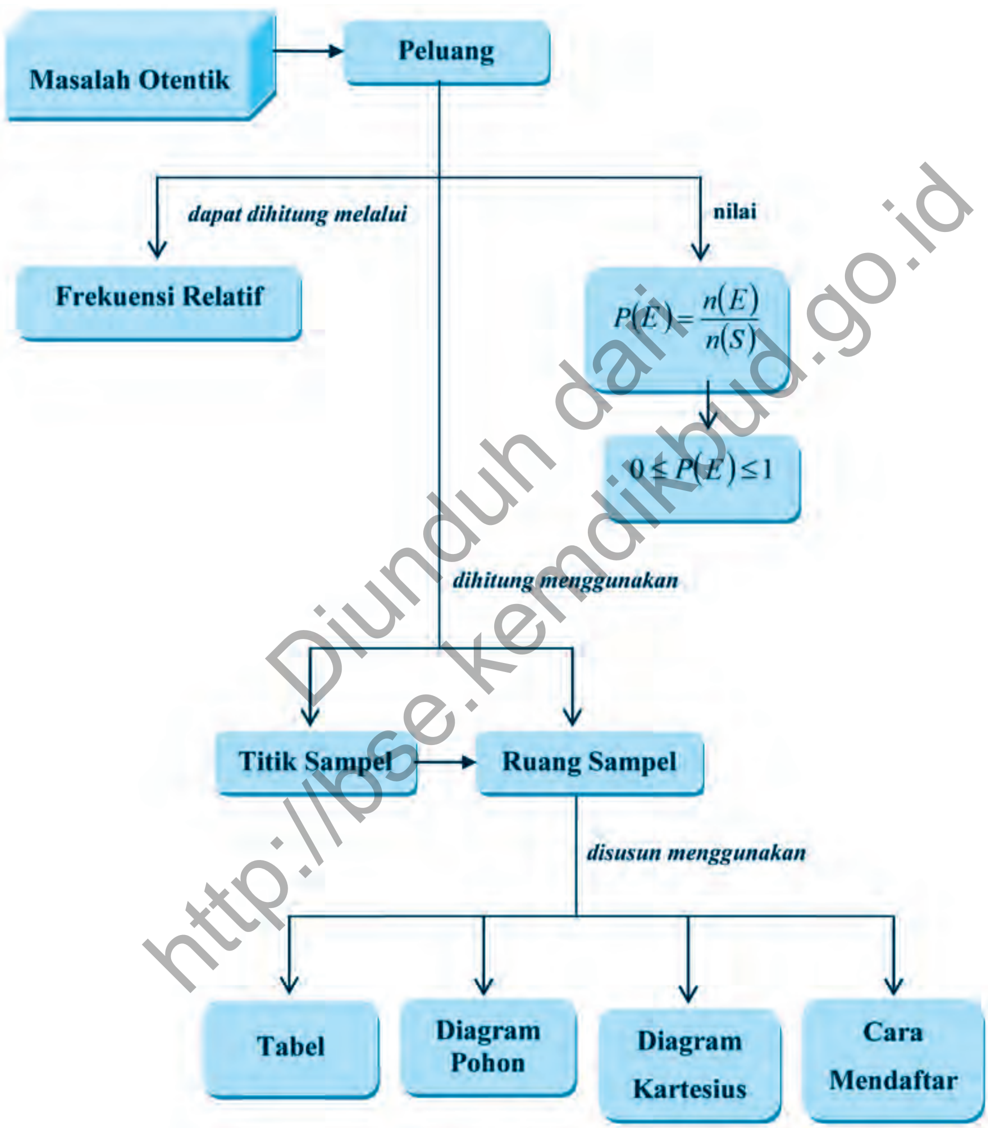
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran peluang siswa mampu: 1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Mampu mentransformasi diri dalam berperilaku jujur, tangguh menghadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika. 3. Mendeskripsikan konsep peluang suatu kejadian menggunakan berbagai objek nyata dalam suatu percobaan menggunakan frekuensi relatif. 4. Menyajikan hasil penerapan konsep peluang untuk menjelaskan berbagai objek nyata melalui percobaan menggunakan frekuensi relatif.	Melalui pembelajaran materi peluang, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Berdiskusi, bertanya dalam menemukan konsep dan prinsip peluang melalui pemecahan masalah autentik yang bersumber dari fakta dan lingkungan. • Berkolaborasi memecahkan masalah otentik dengan pola interaksi edukatif. • Berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki, memanipulasi, dan mengaplikasikan konsep dan prinsip-prinsip peluang dalam memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Frekuensi Relatif*
- *Titik Sampel*
- *Percobaan*
- *Kejadian*
- *Titik Sampel*
- *Ruang Sampel*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Pada bab ini, kita akan mempelajari konsep peluang yang sangat banyak diimplementasikan dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh, kasus memprediksi kejadian yang mungkin terjadi, kasus memilih di antara beberapa pilihan. Hal ini berkaitan erat dengan proses pengambilan suatu keputusan, kasus perkiraan cuaca, hipotesis terhadap suatu penyakit, dan lain-lain. Walaupun semua membicarakan kejadian yang mungkin akan terjadi, tetapi kita juga harus tahu ukuran kejadian tersebut, mungkin terjadi atau tidak terjadi sehingga kita dapat menerka atau menebak apa yang mungkin terjadi pada kasus tersebut. Semua kasus ini, mengantar kita ke konsep peluang. Berikut, akan kita pelajari konsep peluang dengan mengamati beberapa kasus, masalah atau percobaan. Kita akan memulai pelajaran ini dengan mempelajari kejadian, frekuensi relatif dan konsep peluang.

Perkenalkan kepada siswa topik kajian pada bab ini. Ingatkan bahwa siswa akan aktif dalam mengamati, mencoba, diskusi, presentasi dan tanya jawab pada proses belajar. Beri semangat atau motivasi kepada siswa dengan memberikan kegunaan materi ini dipelajari lewat contoh – contoh aplikasi. Dengan demikian, minta siswa menemukan contoh aplikasi lainnya dan mendiskusikannya bersama.

1. Kemungkinan Suatu Kejadian

Dalam melakukan percobaan sederhana, kita tentu harus menduga hasil yang mungkin terjadi, atau apa saja yang mungkin terjadi dari percobaan tersebut. Ingat, konsep ini akan mengantarmu ke kajian konsep peluang yang lebih dalam yaitu kaidah pencacahan tetapi materi kaidah pencacahan akan kamu pelajari di kelas XI. Jadi, kita hanya membahas sekilas masalah hasil kemungkinan yang dapat terjadi pada suatu percobaan pada sub-bab ini. Perhatikan masalah berikut.

Dalam percobaan, boleh saja banyak kemungkinan yang terjadi. Beri contoh, misalnya, jika cuaca mendung, apakah yang mungkin terjadi? Tentu, boleh hujan, boleh saja tidak hujan. Arahkan siswa ke konsep logika matematika (implikasi) Minta siswa membuat contoh kemungkinan suatu hal terjadi. Pandu siswa mendapatkan contoh.

Minta siswa untuk memahami masalah 12.1 dan menduga-duga kemungkinan jawaban dari kasus-kasus yang diberikan. Buat contoh lain dan minta siswa yang mendapatkan hasil yang mungkin terjadi. Diskusikan bersama – sama tentang hal yang mungkin terjadi pada kasus di Masalah 12.1

Masalah-12.1

Berikut beberapa kasus yang memunculkan suatu kejadian yang mungkin terjadi. Dapatkah kamu memberikan dugaan apa saja yang mungkin terjadi pada masing – masing kasus berikut?

a. Jika cuaca berubah – ubah, terkadang hujan, terkadang cuaca panas silih berganti maka dugaan apa yang anda miliki pada seorang anak yang bermain – main di lapangan pada cuaca ekstrim tersebut?

b. Sebuah dadu setimbang sisi 6 dengan penomoran 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 ditoss, dugaan apa yang mungkin terjadi?

c. Dua buah dadu setimbang sisi 6 dengan penomoran 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 ditoss, dugaan apa yang mungkin terjadi?

d. Di dalam sebuah kotak terdapat beberapa manik – manik dengan berwarna berbeda, yaitu merah, putih, kuning, hijau dan biru. Tidak ada manik – manik berjumlah tunggal untuk masing - masing warna. Seorang anak diminta mengambil 2 buah manik – manik sekaligus dengan acak. Dapatkah kamu tentukan pasangan warna manik – manik yang mungkin terjadi?

e. Di dalam sebuah kotak terdapat beberapa manik – manik dengan berwarna berbeda, yaitu merah, putih, kuning, hijau, dan biru. Tidak ada manik – manik berjumlah tunggal untuk masing - masing warna. Seorang anak diminta mengambil sebuah manik – manik sebanyak dua kali. Dapatkah kamu tentukan pasangan warna manik – manik yang mungkin terjadi?

Minta siswa berdiskusi tentang alternatif penyelesaian. Minta siswa memberikan komentar.

Alternatif Penyelesaian

a. Hasil yang mungkin terjadi adalah bahwa anak tersebut akan sakit (kesehatan menurun) atau anak tersebut sehat – sehat saja. Pada kasus ini, kita memiliki 2 hasil yang terjadi.

b. Bila dadu tersebut setimbang, maka kejadian yang mungkin terjadi adalah munculnya sisi dadu dengan nomor 1, 2, 3, 4, 5, atau 6. Dengan demikian, terdapat 6 hasil yang terjadi.

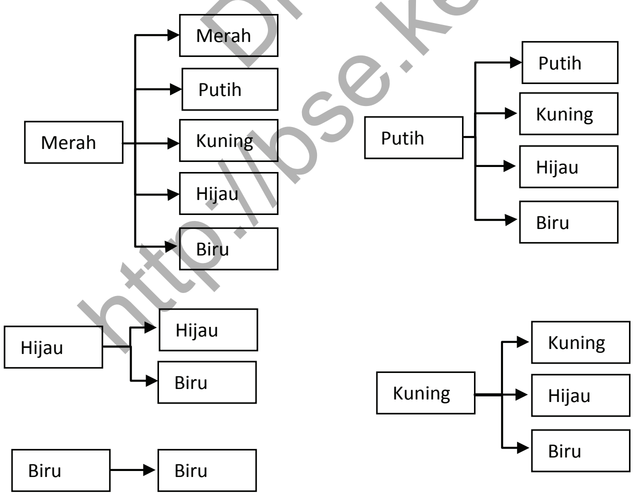
c. Jika dibuat sebuah tabel, maka diperoleh pasangan angka berikut:

Tabel 12.1 Pasangan mata dadu I dan mata dadu II

		Dadu I					
Dadu II		1	2	3	4	5	6
	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Dari banyak pasangan angka pada setiap sel dalam tabel maka terdapat 36 hasil yang mungkin terjadi.

d. Perhatikan pohon faktor berikut!



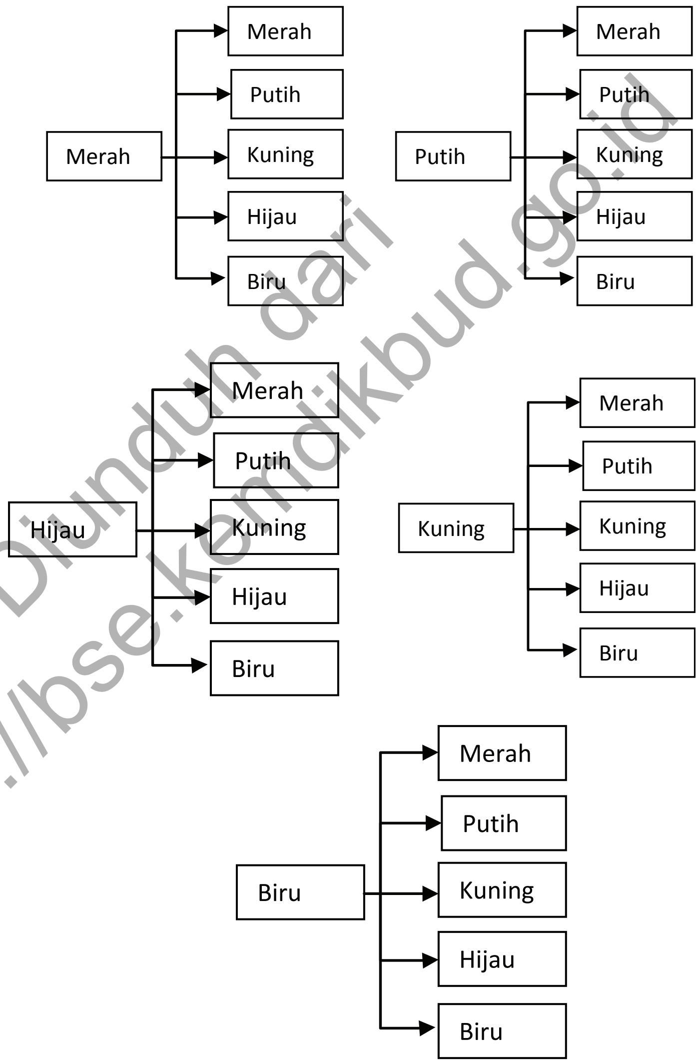
Gambar 12.1 Pasangan warna pengambilan sekaligus 2 manik – manik

Minta siswa mempelajari sketsa di samping. Minta siswa menyampaikan pendapatnya tentang sketsa tersebut. Beri kesempatan kepada siswa yang lain untuk membandingkan pendapat siswa yang pertama. Arahkan proses tanya jawab.

Minta siswa mempelajari lagi sketsa di samping. Minta siswa menyampaikan pendapatnya tentang sketsa tersebut. Minta siswa membandingkan sketsa (e) dengan (d), apa bedanya? Kenapa berbeda? Apa maksudnya? Minta siswa berkomentar dan berdiskusi pada setiap komentar yang muncul. Arahkan siswa ke masalah awal untuk melihat penyebab perbedaan sketsa.

Misalkan M = merah, P = putih, K = kuning, H = hijau dan B = biru. Pasangan warna yang mungkin terjadi adalah MM, MP, MK, MH, MB, PP, PK, PH, PB, KK, KH, KB, HH, HB, BB. Terdapat 15 hasil yang mungkin terjadi.

e. Jika kita buat pohon faktor dari pengambilan manik – manik tersebut maka diperoleh:



Gambar 12.2 Pasangan warna dua manik-manik

Misalkan M = merah, P = putih, K = kuning, H = hijau dan B = biru. Dari pohon faktor tersebut, dapat kita lihat segala kemungkinan pasangan warna manik - manik yang akan terjadi yaitu MM, MP, MK, MH, MB, PM, PP, PK, PH, PB, KM, KP, KK, KH, KB, HM, HP, HK, HH, HB, BM, BP, BK, BH, BB. Terdapat 25 hasil yang mungkin terjadi.

Contoh 12.1

a. Sebuah koin (sama dan setimbang) bersisi Gambar (G) dan Angka (A) ditoss 120 kali. Tentukanlah segala kemungkinan terjadi.

b. Dua buah koin (sama dan setimbang) bersisi Gambar (G) dan Angka (A) ditoss 120 kali. Tentukanlah segala kemungkinan terjadi.

c. Tiga buah koin (sama dan setimbang) bersisi Gambar (G) dan Angka (A) ditoss 120 kali. Tentukanlah segala kemungkinan terjadi.

Untuk melatih siswa dalam memahami kemungkinan sesuatu hasil dari percobaan, mintalah siswa untuk memahami contoh berikut. Sediakan 3 koin rupiah Rp500,- Rp1000,-. Minta siswa melakukan percobaan melambungkan koin dan mengamati hasil – hasil apa saja yang mungkin terjadi. Arahkan hasil kenyataan yang diperoleh dengan alternatif penyelesaian di samping.

Alternatif Penyelesaian

a. Ada 2 hasil yang mungkin terjadi.

Tabel 12.2 Hasil yang mungkin terjadi pada pelemparan 1 koin

Koin	A	G

b. Ada 4 hasil yang mungkin terjadi.

Tabel 12.3 Hasil yang mungkin terjadi pada pelemparan 2 koin

Koin 1	A	A	G	G
Koin 2	A	G	A	G

Minta siswa untuk melihat pola penyusunan A dan G pada Tabel 12.2, 12.3, 12,4. Bagaimana pola susunan A dan G? Dengan ini, mereka belajar menyusun hasil kemungkinan dengan teratur, bukan dengan sembarangan menyusun.

c. Ada 8 hasil yang mungkin terjadi.

Tabel 12.4 Hasil yang mungkin terjadi pada pelemparan 3 koin

Koin 1	A	A	A	A	G	G	G	G
Koin 2	A	A	G	G	A	A	G	G
Koin 3	A	G	A	G	A	G	A	G

Uji kemampuan siswa dalam menyusun dengan memberikan masalah pelemparan 4 koin setimbang. Arahkan mereka membentuk tabel di samping.
Minta siswa mengamati pola hasil untuk setiap koin pada masing – masing kolom.

Koin 1	Koin 2	Koin 3	Koin 4
A	A	A	A
A	A	A	G
A	A	G	A
A	A	G	G
A	G	A	A
A	G	A	G
A	G	G	A
A	G	G	G
G	A	A	A
G	A	A	G
G	A	G	A
G	A	G	G
G	G	A	A
G	G	A	G
G	G	G	A
G	G	G	G

Ingatkan kembali siswa tentang pelajaran himpunan. Minta siswa memberikan definisi himpunan dan memberikan contoh

Terdapat 16 hasil yang mungkin terjadi.

Berdasarkan masalah dan contoh di atas, dapat kita tentukan bahwa banyak hasil yang mungkin yang terjadi. Kumpulan semua hasil yang mungkin terjadi disebut dengan ruang sampel (disimbolkan S) dan himpunan bagian S disebut dengan hasil yang diharapkan muncul atau kumpulan dari hasil yang diharapkan muncul dari sebuah percobaan (disimbolkan E). Jadi, ingat, ruang sampel adalah sebuah himpunan. Banyaknya anggota dalam himpunan S disebut dengan kardinal S (disimbolkan $n(S)$).

Contoh himpunan: Pada Masalah 12.1e terdapat 25 hasil yang mungkin terjadi, yaitu H = { MM, MP, MK, MH, MB, PM, PP, PK, PH, PB, KM, KP, KK, KH, KB, HM, HP, HK, HH, HB, BM, BP, BK, BH, BB }. Jika dikumpulkan semua hasil yang membuat warna merah (M) selalu ada maka terdapat 9 hasil yang mungkin terjadi, yaitu K = { MM, MP, MK, MH, MB, PM, KM, HM, BM }. Dengan definisi himpunan, maka K adalah himpunan bagian dari H dengan kardinal $n(H) = 25$ dan $n(K) = 9$.

dan bukan contoh himpunan. Guru harus aktif memandu dan membantu siswa yang salah memberikan definisi dengan mengajukan kembali contoh – contoh himpunan.

Minta siswa membuat himpunan dari semua dan sebagian hasil yang mungkin terjadi dari percobaan. Bahas kembali Masalah 12.1e di samping. Penyelesaian ada di samping.

Minta siswa membuat contoh lainnya dan mempresentasikan di depan kelas. Bentuk proses belajar tanya jawab.

2. Frekuensi Relatif Suatu Hasil Percobaan

Setelah kita mempelajari suatu hasil yang mungkin terjadi pada suatu kasus, maka pada kesempatan ini, kita akan mengkaji banyaknya hasil-hasil yang mungkin terjadi tersebut dalam beberapa kali percobaan. Mari pelajari kembali kasus berikut.

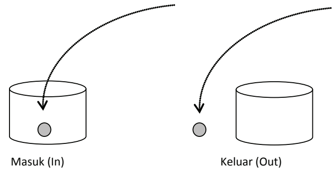
Sampaikan tujuan pembelajaran ini kepada siswa. Berikut adalah beberapa contoh kasus percobaan yang telah dilakukan dan frekuensi masing – masing hasil telah ditampilkan pada Tabel 12.5, 12.6, 12.7.

a. Seorang anak melakukan sebuah permainan melempar bola ke sebuah tabung yang diletakkan beberapa meter di depannya. Bola terkadang masuk dan terkadang keluar dari tabung tersebut. Anak tersebut melakukan lemparan bola sebanyak 100 kali. Hasil lemparan (masuk atau keluar) ditampung dalam papan tabel sebagai berikut.

Minta siswa menghitung banyak frekuensi terjadinya masing – masing hasil dan menghubungkan dengan banyak percobaan.

Peragakan kegiatan ini dan dapatkan data baru dalam bentuk tabel.

Hasil	*frekuensi*
A	...
B	...
Total	...



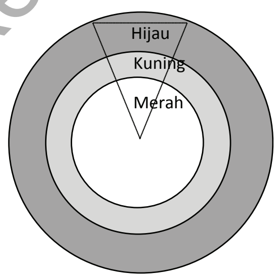
Gambar 12.3 Melempar bola kedalam tabung

Tabel 12.5 Frekuensi lemparan bola (masuk/keluar)

	Hasil Lemparan	Jumlah (Frekuensi)
Hasil	Masuk (In)	45
	Keluar (Out)	55

Minta siswa menghitung banyak frekuensi terjadinya masing – masing hasil dan menghubungkan dengan banyak percobaan.

b. Seorang atlit lempar melakukan latihan lempar cakram sebanyak 80 kali di lapangan latihan untuk persiapan menghadapi PON. Daerah lemparan cakram dibagi atas 3 zona dengan penilaian yang berbeda yaitu zona merah (lemparan terlalu dekat), zona kuning (lemparan mencapai target) dan zona hijau (lemparan sangat jauh). Lemparan yang baik yang diharapkan atlit adalah jatuh di zona hijau. Berikut hasil lemparan atlit tersebut.



Gambar 12.4 Zona lemparan cakram

Tabel 12.6 Frekuensi lemparan cakram ke ketiga zona

	Zona	Keterangan	Banyak Lemparan (frekuensi)
Hasil	Merah	Kurang	15
	Kuning	Cukup	60
	Hijau	Baik	5

c. Sebuah dadu tetrahedral setimbang (bersisi empat dengan nomor 1, 2, 3, dan 4) ditoss sebanyak 200 kali. Setiap hasil yang ditunjukkan sisi setiap kali ditoss, dicatat pada tabel berikut.

Tabel 12.7 Frekuensi muncul mata dadu tetrahedral

	Hasil			
Mata dadu	1	2	3	4
Frekuensi	20	65	75	40

Minta siswa menghitung banyak frekuensi terjadinya masing – masing hasil dan menghubungkan dengan banyak percobaan.

Peragakan kegiatan ini dengan menggunakan dadu setimbang 6 sisi dan dapatkan data baru dalam bentuk tabel.

Hasil	*frekuensi*
...	...
...	...
dst	
Total	...

(Tanya siswa, kenapa mesti menggunakan dadu setimbang? Apa yang terjadi jika dadu tersebut tidak setimbang)

Siswa telah mengamati frekuensi setiap hasil yang mungkin terjadi, dan jumlah dari setiap frekuensi hasil tersebut sama dengan banyak percobaan.

Ajukan masalah berikut: Jika percobaan (S) dilakukan n kali dan banyak hasil ada 3 yaitu A, B, C dengan frekuensi masing – masing n_1, n_2, n_3 maka minta siswa untuk mendapatkan sebuah model matematika. (Lihat model disamping

Dari pengamatan pada ketiga kasus maka secara umum diperoleh pernyataan bahwa jumlah setiap hasil yang mungkin terjadi pada sebuah percobaan sama dengan banyak percobaan itu dilakukan dengan model matematika:

$n(A) + n(B) + n(C) = n(S)$

$n_1 + n_2 + n_3 = n$

Sehingga

$$n\left(A\right) = \frac{n_1}{n} \times 100\%$$

$$n\left(B\right) = \frac{n_2}{n} \times 100\%$$

$$n\left(C\right) = \frac{n_3}{n} \times 100\%$$

Minta siswa untuk memahami Masalah 12.2. Ingatkan beberapa kasus – kasus nyata menjelaskan tentang frekuensi relatif suatu hasil yang mungkin pada percobaan.

Masalah-12.2

Dari ketiga kasus di atas, dapat kita tentukan % frekuensi terjadinya setiap hasil yang mungkin terjadi. Tentu saja, % frekuensi yang dimaksud adalah sebuah perbandingan antara frekuensi terjadi suatu hasil dengan banyaknya frekuensi percobaan dilakukan. Apa yang dimaksud dengan perbandingan frekuensi tersebut?

Setelah siswa memahami bahwa dalam sebuah percobaan terdapat beberapa hasil yang mungkin terjadi dan masing – masing hasil dapat dihitung berapa kali terjadi dari banyaknya percobaan dilakukan. Berikut, minta siswa untuk menen-

Alternatif Penyelesaian

Jika kamu amati ketiga tabel di atas maka tentu kamu mendapatkan perbedaan yang kontras di antara ketiga tabel tersebut yaitu banyak pilihan (kemungkinan yang terjadi) pada setiap kasus.

Kasus a. mempunyai dua pilihan hasil yaitu masuk atau keluar. Kasus b. mempunyai tiga pilihan hasil yaitu zona merah, zona kuning dan zona hijau. Kasus c. mempunyai empat pilihan hasil yaitu mata 1, mata 2, mata 3 dan mata 4.

Perhatikan tabel berikut!

tukan % hasil yang mungkin terjadi dari percobaan tersebut. Ingatkan siswa konsep dasar mengubah bilangan ke dalam bentuk persen di Sekolah Dasar.

Kasus a.

Tabel 12.8 Frekuensi relatif lemparan cakram ke ketiga zona

Hasil Lemparan	Jumlah (frekuensi)	% Hasil
Masuk (In)	45	45%
Keluar (Out)	55	55%
Total Lemparan	100	100%

Kasus b.

Tabel 12.9 Frekuensi relatif lemparan cakram ke ketiga zona

Zona	**Keterangan**	**Banyak lemparan (frekuensi)**	**% Hasil**
Merah	Kurang	15	18,75%
Kuning	Cukup	60	75,00%
Hijau	Baik	5	6,25%
Total		80	100%

Kasus c.

Tabel 12.10 Frekuensi relatif muncul mata dadu tetrahedral

Mata dadu	1	2	3	4	Total
Frekuensi	20	65	75	40	200
% Hasil	10%	32,5%	37,5%	20%	100%

Ingat, perbandingan antara banyak terjadi sebuah kemungkinan hasil dengan banyak percobaan yang dilakukan disebut frekuensi relatif (disimbolkan (f_r)).

Minta siswa untuk menarik kesimpulan sebagai Definisi 12.1. Guru sebagai fasilitator.

Definisi 12.1

Misalkan *E adalah* suatu hasil yang mungkin terjadi dari suatu percobaan.
Frekuensi Relatif *E* atau $f_r(E)$ adalah hasil bagi antara banyak hasil *E* dengan banyak percobaan.

Berdasarkan beberapa permasalahan yang telah diselesaikan yaitu tentang frekuensi relatif minta siswa untuk mengaitkannya dengan konsep peluang.

selanjutnya untuk memperkuat konsep tentang peluang berdasarkan frekuensi relatif lakukanlah kegiatan 12.1dan 12.2

3. Peluang suatu Kejadian

Kita telah membahas suatu hasil yang mungkin terjadi pada suatu percobaan, bukan? Himpunan dari semua hasil tersebut disebut dengan ruang sampel dan hasil yang mungkin terjadi dari suatu percobaan disebut dengan kejadian. Jadi, jelas bahwa kejadian adalah anggota dari ruang sampel.

Berikutnya, kita akan mencoba menemukan konsep peluang dengan mengamati kaitannya dengan frekuensi relatif setiap kemungkinan hasil yang terjadi pada percobaan. Dengan demikian, kamu dianjurkan melakukan beberapa percobaan pada kegiatan di bawah ini.

Minta siswa membentuk kelompok kecil. Usahakan banyak kelompok lebih dari 5 kelompok. Lebih banyak akan menjadi lebih baik. Arahkan siswa melakukan kegiatan 12. 1 dan melengkapi hasilnya pada tabel 12.11. Ingatkan pada siswa bahwa mereka sedang melakukan percobaan untuk menemukan konsep peluang dengan mengamati frekuensi relatif hasil dari sebuah percobaan.
(ingat, koin yang dipakai adalah setimbang

Kegiatan 12.1

Lakukanlah kegiatan melempar sebuah koin sebanyak 120 kali bersama dengan temanmu. Lakukanlah kegiatan ini secara bertahap, dan tuliskan hasil percobaan dalam tabel berikut:

Tabel 12.3 Hasil Dari Percobaan Pelemparan Sebuah Koin

Tahap	Banyak Pelemparan	BMSG	BMSA	$\frac{\text{BMSG}}{\text{BP}}$	$\frac{\text{BMSA}}{\text{BP}}$
(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
I	20	8	12	$\frac{8}{20}$	$\frac{12}{20}$
II	40				
III	60				
IV	80				

V	100				
VI	120				

Keterangan:

BMSG adalah Banyak Muncul Sisi Gambar

BMSA adalah Banyak Muncul Sisi Angka

BP adalah Banyak Percobaan

Perhatikan data pada Tabel-12.3 di atas dan cobalah diskusikan dengan temanmu beberapa pertanyaan berikut:

a) Sebelum melakukan percobaan, buatlah dugaanmu, apakah banyak (frekuensi) muncul sisi gambar relatif sama (frekuensi) muncul sisi angka?

b) Jika pelemparan koin tersebut dilakukan 20 sampai 120 kali, buatlah dugaanmu terhadap perbandingan frekuensi muncul gambar dan angka?

c) Benarkah dugaan bahwa data pada kolom iii dan iv, diperoleh hasil yang relatif sama?

d) Benarkah dugaan bahwa data pada kolom v dan vi, diperoleh hasil yang relatif sama, dan nilai perbandingan banyak muncul gambar atau angka dengan banyak percobaan mendekati $\frac{1}{2}$?

Misalkan banyak percobaan melambungkan sebuah koin adalah 20 kali dan diperoleh hasil frekuensi muncul gambar adalah 8 kali dan muncul angka adalah 12 kali. Dalam percobaan ini, frekuensi relatif muncul sisi gambar adalah 8 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r\ (G) = \frac{8}{20}$. Frekuensi muncul sisi angka adalah 12 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r(A) = \frac{12}{20}$.

Kegiatan 12.2

Dalam kegiatan-2 ini, kita melakukan percobaan dengan menggunakan dadu 6 sisi. Lakukanlah kegiatan melambungkan sebuah dadu sebanyak 120 kali bersama dengan temanmu satu kelompok. Lakukan kegiatan ini

Minta siswa mengumpulkan semua tabel yang diperoleh dari percobaan. Minta siswa mengamati data - data pada tabel tersebut. Ikuti langkah di samping.

Minta siswa membandingkan frekuensi relatif dari tiap-tiap banyak pelemparan yang tertera pada Tabel-12.11 pada masing – masing kelompok! Apakah keenam frekuensi relatif dari tiap-tiap percobaan tersebut mendekati suatu nilai tertentu?

Minta siswa melihat hasil perbandingan, apakah benar mendekati $\frac{1}{2}$ *?*

Minta siswa menarik kesimpulan.

Minta siswa membentuk kelompok kecil kembali. Usahakan banyak kelompok lebih dari 5 kelompok. Lebih banyak akan menjadi lebih baik. Arahkan siswa melaku-

kan kegiatan 12. 2 dan melengkapi hasilnya pada Tabel 12.14. (ingat, koin yang dipakai adalah setimbang)

secara bertahap, dan tuliskan hasil yang diperoleh dalam bentuk tabel berikut:

Tabel 12.4 Hasil Percobaan Pelemparan Sebuah Dadu 6 Sisi

Tahap	Banyak Pelemparan	Frekuensi Muncul Angka Dadu											
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
I	20												
II	40												
III	60												
IV	80												
V	100												
VI	120												

Minta siswa mengumpulkan semua tabel yang diperoleh dari percobaan. Minta siswa mengamati data data pada tabel tersebut. Ikuti langkah di samping.

Minta siswa membandingkan frekuensi relatif dari tiap-tiap banyak pelemparan yang tertera pada Tabel-12.14 pada masing – masing kelompok! Apakah keenam frekuensi relatif dari tiap-tiap percobaan tersebut mendekati suatu nilai tertentu?

Minta siswa melihat hasil perbandingan, apakah benar mendekati $\frac{1}{6}$*?*

Minta siswa menarik kesimpulan.

Perhatikan data pada **Tabel-12.4** di atas dan cobalah diskusikan dengan temanmu beberapa pertanyaan berikut:

1. Sebelum melakukan percobaan, buatlah dugaanmu, apakah banyak (frekuensi) muncul angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 relatif sama banyak?
2. Jika pelemparan dadu tersebut dilakukan 20 sampai 120 kali, buatlah dugaanmu bagaimana perbandingan frekuensi muncul angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6?
3. Benarkah dugaan bahwa data pada kolom (3), (4), (5), (6), (7), dan (8) diperoleh hasil yang relatif sama?
4. Benarkah dugaan bahwa data pada kolom (9), (10), (11), (12), (13), dan (14) diperoleh hasil yang relatif sama, dan nilai perbandingan banyak muncul angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 dengan banyak percobaan mendekati $\frac{1}{6}$?

Misalkan banyak percobaan melambungkan sebuah dadu adalah 20 kali dan diperoleh hasil frekuensi muncul angka 1 sampai angka 5 adalah 3 kali dan muncul angka 6 adalah 5 kali. Dalam percobaan ini, frekuensi relatif muncul angka 1, 2, 3, 4, dan 5 adalah 3 dari 20 kali percobaan, ditulis f_r (1) = $\frac{3}{20}$. Frekuensi relatif muncul angka 2 adalah 3 dari

20 kali percobaan, ditulis $f_r\ (2) = \frac{3}{20}$. Frekuensi relatif muncul angka 6 adalah 5 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r\ (6) = \frac{5}{20}$.

Berdasarkan pengamatan terhadap frekuensi relatif suatu kejadian pada sub-bab 2 dan kegiatan 12.1 dan kegiatan 12.2 di atas, peluang suatu kejadian adalah pendekatan nilai frekuensi relatif dari kejadian tersebut, dapat dirumuskan sebagai berikut:

Misalkan suatu percobaan dilakukan sebanyak n kali. Jika kejadian E muncul sebanyak k kali ($0 < k < n$), maka frekuensi relatif kejadian E ditentukan dengan rumus:

$$f_r\ (E) = \frac{k}{n}$$

Jika nilai n mendekati tak-hingga maka nilai $\frac{k}{n}$ cenderung konstan mendekati nilai tertentu. Nilai tertentu ini adalah nilai peluang munculnya kejadian E.

Minta siswa membandingkan kembali frekuensi relatif dari masing - masing banyak pelemparan yang tertera pada Tabel-12.11 dan Tabel 12.11 dan kesimpulan yang dipeoleh dari masing – masing kegiatan di atas!

Arahkan siswa bahwa untuk percobaan yang semakin banyak membuat frekuensi relatif membentuk konsep peluang.

Definisi 12.2

1. Titik sampel atau hasil yang mungkin terjadi peda sebuah percobaan.
2. Kejadian (E) adalah hasil yang mungkin terjadi atau kumpulan hasil yang mungkin terjadi dari suatu percobaan.
3. Ruang sampel (S) adalah himpunan semua hasil dari suatu percobaan.
4. Kejadian (E^c) adalah himpunan bagian dari ruang sampel yang tidak memuat kejadian E. (E^c dibaca komplemen E)

Bersama siswa, guru membuat definisi sampel, ruang sampel, dan kejadian pada Definisi 12.2. Hubungkan definisi ini ke berbagai percobaan di atas. Minta siswa menyebutkan mana kejadian dan mana ruang sampel. Minta siswa membuat contoh kasus baru dan menyebutkan kejadian dan ruang sampelnya.

Untuk memperkuat pemahaman tentang konsep yang sudah dipelajari berikan contoh berikut kepada siswa.
Berikan waktu kepada siswa untuk bertanya dan arahkan siswa yang lain untuk menjawab setiap pertanyaan yang muncul sebelum guru dan siswa bersama – sama mendapatkan jawaban atas pertanyaan tersebut.

Contoh 12.2

Perhatikan kembali Contoh 12.1c. Tiga buah koin setimbang dengan sisi (Gambar (G), Angka (A)) ke atas secara bersamaan. Tentukan ruang sampel dan banyak ruang sampel dan banyak kejadian muncul dua Angka.

Alternatif Penyelesaian

Semua kemungkinan yang muncul pada kasus pelemparan ketiga koin tersebut adalah (A,A,A), (A,A,G), (A,G,A), (G,A,A), (G,G,A), (G,A,G), (A,G,G), dan (G,G,G). Dengan demikian ruang sampel percobaan tersebut adalah sebuah himpunan S = {(A,A,A), (A,A,G), (A,G,A), (G,A,A), (G,G,A), (G,A,G), (A,G,G), (G,G,G)}. Banyak anggota ruang sampel adalah $n(S) = 8$. Himpunan E = {(A,A,G), (A,G,A), (G,A,A)}. Banyak anggota himpunan harapan muncul 2 Angka adalah $n(E) = 3$.

Definisi peluang suatu kejadian dapat disajikan secara matematis sebagai berikut.

Arahkan siswa untuk membuat Definisi 12.3. Minta siswa menghubungkan kembali hasil Kegiatan 12.1 dan Kegiatan 12.2 dengan Definisi 12.3.

Definisi 12.3

Peluang suatu kejadian *E* adalah hasil bagi banyak hasil dalam *E* dengan banyak anggota ruang sampel *S* dari suatu percobaan, ditulis:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$n(E)$: banyak anggota *E*.
$n(S)$: banyak anggota ruang sampel.

Untuk memperkuat konsep peluang, berikan contoh-contoh dan latihan berikut kepada siswa. Beri kesempatan kepada siswa untuk menentukan segala kejadian yang mungkin terjadi dan banyak ruang sampel.

Contoh 12.3

Seorang anak melempar dua dadu setimbang ke atas. Tentukanlah ruang sampel dan peluang muncul jumlah mata dadu kurang dari 7.

Gambar 12.6 Dua Buah Dadu Setimbang

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan kembali Masalah 12.1c. Untuk mem-perlihatkan kejadian dan ruang sampel maka perhatikan tabel berikut!

Minta siswa terlebih dahulu memahami alternatif penyelesaian berikut. Minta siswa menghubungkan proses penyelesaian dengan Definisi 12.3

Tabel 12.13 Ruang Sampel dari Hasil Pelemparan Dua Dadu

(+)	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Dari tabel, dapat dilihat banyak ruang sampel adalah 36 (atau $n(S) = 36$). Kejadian yang diharapkan muncul adalah jumlah mata dadu kurang dari 7 adalah 15 kejadian (atau $n(E) = 15$). Berdasarkan konsep peluang maka peluang muncul jumlah mata dadu kurang dari 7 adalah

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{15}{36}$$

Minta siswa memberikan pendapat, apa maksud dari $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{15}{36}$

Latihan 1.1

1. Pada pelemparan dua buah dadu, E merupakan kejadian munculnya mata dadu yang jumlahnya lebih besar sama dengan dua., tentukanlah kejadian E?
2. Mungkinkah suatu kejadian sama dengan ruang sampel.
3. Dapatkah kamu temukan kejadian diluar E? Jelaskan.

Arahkan kembali siswa untuk mengerjakan Latihan 12.1 secara pribadi atau membentuk kelompok kecil. Minta siswa membuat laporan kerja dan mempresentasikan hasil kerja masing – masing.
Arahkan proses belajar ke bentuk tanya jawab.

Contoh berikut adalah kasus nyata yang sering terdapat di kalangan masyarakat yaitu permainan kartu. Arahkan siswa untuk menentukan peluang pada contoh tersebut. Arahkan siswa untuk tidak melakukan tindakan perjudian.

Contoh 12.4

Di awal pertandingan olah raga kartu truf, seorang pemain mencabut sebuah kartu untuk mendapatkan kartu As untuk menjadi tambahan nilainya. Jika dalam satu set kartu truf ingin dicabut kartu As sekop (lihat gambar di bawah).

Gambar 12.7 Kartu Bridge

Tentukan nilai ruang sampel

dan nilai peluang terambilnya kartu As Sekop! Berapa peluang terambilnya kartu bernomor 10?

Minta siswa memahami penyelesaian di samping. Tanya siswa, manakah yang disebut kejadian dan ruang sampel.
Arahkan siswa untuk menghubungkan penyelesaian tersebut dengan definisi peluang.

Alternatif Penyelesaian

Pada percobaan menggunakan satu set kartu truf terdapat empat jenis kartu, yakni: wajik (♦), hati (♥), klaver (♣), dan Sekop (♠).

Misalkan Wajik = W, Hati = H, Klaver = K, dan Sekop = S dan k = king, q = queen, j = pro. Jika H adalah ruang sampel maka:

H = {(kS), (qS), (jS), (10S), (9S), (8S), (7S), (6S), (5S), (4S), (3S), (2S), (AsS), (kK), (qK), (jK), (10K), (9K), (8K), 7K), (6K), (5K), (4K), (3K), (2K), (AsK),(kH), (qH), (jH), (10H), (9H), (8H), (7H), (6H), (5H), (4H), (3H), (2H), (AsH), (kW), (qW), (jW), (10W), (9W), (8W), (7W), (6W), (5W), (4W), (3W), (2W), (AsW)} atau $n(H) = 52$

Misal E_1 adalah pengambilan kartu As Sekop, maka diperoleh E_1 = {(As)} sehingga $n(E_1) = 1$.

Jadi peluang terambilnya kartu As Sekop adalah

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(H)} = \frac{1}{52}$$

Misal E_1 adalah pengambilan kartu As Sekop, maka diperoleh E_1 = {(As)} sehingga n (E_1) = 1.

Jadi peluang terambilnya kartu bernomor 10 adalah

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(H)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Contoh 12.5

Dua koin setimbang dan sebuah dadu sisi 6 ditos. Tentukanlah peluang muncul dua gambar dan bilangan prima pada pelemparan tersebut.

Siswa perlu berpengalaman menghadapi permasalahan yang lebih sulit. Ajukan Contoh 12.5 dan berikan kesempatan kepada siswa untuk mempelajari dan mengamati Tabel 12.14. Arahkan siswa menyelesaikan soal tersebut ke definisi peluang.

Alternatif Penyelesaian

Pertama sekali, kita harus mencari ruang sampel dan kejadian yang diharapkan muncul. Perhatikan Tabel berikut.

Tabel 12.14 Pasangan dua koin dan satu dadu.

Dua Buah Koin	Mata Dadu					
pasangan	1	2	3	4	5	6
AA	AA1	AA2	AA3	AA4	AA5	AA6
AG	AG1	AG2	AG3	AG4	AG5	AG6
GA	GA1	GA2	GA3	GA4	GA5	GA6
GG	GG1	**GG2**	**GG3**	GG4	**GG5**	GG6

Dari tabel di atas, dapat ditentukan banyak ruang sampel $n(S)$ = 24. E adalah muncul dua gambar dan bilangan prima pada pelemparan tersebut sehingga E = {GG2, GG3, GG5} atau $n(E)$ = 3 sehingga peluang muncul dua gambar dan bilangan prima pada pelemparan tersebut adalah

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

Uji pemahaman siswa dengan mengajukan masalah yang lebih lengkap, sebagai berikut: Tiga koin setimbang dan sebuah dadu sisi 4 ditos. Tentukanlah peluang muncul dua gambar dan bilangan ganjil pada pelemparan tersebut. (Telah diselesaikan di samping)

Uji pemahaman siswa dengan mengajukan masalah yang lebih lengkap, sebagai berikut: Tiga koin setimbang dan sebuah dadu sisi 4 ditos. Tentukanlah peluang muncul dua gambar dan bilangan ganjil pada pelemparan tersebut. (Telah diselesaikan di samping)

Berdasarkan berbagai pemecahan masalah penentuan nilai peluang suatu kejadian yang telah diuraikan di atas, maka nilai peluang suatu kejadian dapat dipastikan terletak pada interval [0, 1]. Kita tetapkan sifat nilai peluang sebagai berikut.

Alternatif Penyelesaian

Pertama sekali, kita harus mencari ruang sampel dan kejadian yang diharapkan muncul. Perhatikan Tabel berikut.

Tabel 12.14a Pasangan tiga koin dan satu dadu tetrahedral.

	Mata Dadu				
Tiga Koin	pasangan	1	2	3	4
	AAA	AAA1	AAA2	AAA3	AAA4
	AAG	AAG1	AAG2	AAG3	AAG4
	AGA	AGA1	AGA2	AGA3	AGA4
	AGG	**AGG1**	AGG2	**AGG3**	AGG4
	GAA	GAA1	GAA2	GAA3	GAA4
	GAG	**GAG1**	GAG2	**GAG3**	GAG4
	GGA	**GGA1**	GGA2	**GGA3**	GGA4
	GGG	GGG	GGG	GGG	GGG

Dari tabel di atas, dapat ditentukan banyak ruang sampel $n(S) = 32$. E adalah muncul dua gambar dan bilangan ganjil pada pelemparan tersebut sehingga E = {AGG1, AGG3, GAG1, GAG3, GGA1, GGA3} atau $n(E) = 6$ sehingga peluang muncul dua gambar dan bilangan ganjil pada pelemparan tersebut adalah $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{6}{32} = \dfrac{3}{16}$

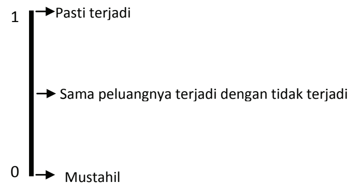
Arahkan siswa mengamati % hasil pada Tabel 12.8, 12.9 dan 12.10. Minta siswa mengamati bahwa jika % setiap hasil dijumlahkan maka sama dengan

Sifat-12.1

Misalkan E suatu kejadian dan S adalah ruang sampel dalam sebuah percobaan dan komponen dari S adalah S^c Ø = .

1. Peluang kejadian E memenuhi $P(E)$, $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. $P(Ø) = 0$

Peluang suatu kejadian adalah 1 berarti bahwa kejadian tersebut pasti terjadi dan peluang kejadian adalah 0 berarti bahwa kejadian tersebut mustahil terjadi.



Gambar 12.8 Peluang kejadian *E* memenuhi *P*(*E*), 0 ≤ *P*(*E*) ≤ 1

100%, arahkan pernyataan ini untuk menunjukkan frekuensi relatif ada di antara atau sama dengan 0 dan 1. Dengan mengingat Kegiatan 12.1 dan 12.2 maka nilai peluang juga berada di antara atau sama dengan 0 dan 1.

Secara induktif minta siswa membangun prinsip tentang peluang suatu kejadian.

Contoh 12.6

Di dalam sebuah kelas terdapat 40 orang siswa, yaitu 25 pria dan 15 wanita. Di antara mereka akan dipilih satu orang untuk menjadi ketua kelas. Tentukan peluang terpilih adalah siswa pria? Tentukan peluang terpilih adalah siswa wanita?

Ajukan contoh soal pada siswa dan beri kesempatan kepada mereka untuk menjawab terlebih dulu.

Alternatif Penyelesaian

Gambar 12.9 Diagram lingkaran jumlah pria dan wanita

S adalah himpunan siswa pria sehingga $n(S) = 40$
E adalah himpunan siswa pria sehingga $n(E) = 25$
E^c adalah himpunan siswa wanita sehingga $n(E^c) = 15$

Peluang terpilih pria adalah $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{25}{40}$

Peluang terpilih wanita adalah $P(E^c) = \dfrac{n(E^c)}{n(S)} = \dfrac{15}{40}$

Jelas, bahwa $P(E) + P(E^c) = \dfrac{25}{40} + \dfrac{15}{40} = 1$

Minta siswa untuk menyelesaikan soal-soal Uji Kmpetensi 12.1 agar dapat mengukur kemampuan siswa dalam memahami konsep peluang.

Uji Kompetensi 12.1

1. Tentukan kejadian yang mungkin terjadi pada kasus berikut ini.
    a. Empat buah koin setimbang dengan sisi Gambar atau Angka.
    b. Sebuah koin setimbang (sisi Gambar atau Angka) ditos bersamaan dengan sebuah dadu enam sisi dengan angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6.
    c. Didalam sebuah kotak terdapat beberapa manik – manik dengan berwarna berbeda, yaitu merah, putih, kuning, hijau dan biru. Tidak ada manik – manik berjumlah tunggal untuk masing - masing warna. Seorang anak diminta mengambil sebuah manik – manik sebanyak tiga kali.
2. Tunjukkan bahwa:
    a. Banyaknya anggota ruang sampel pelemparan n koin adalah 2n.
    b. Banyaknya anggota ruang sampel pelemparan n dadu adalah 6^n.
3. Tentukan banyak ruang sampel pada kasus berikut
    a. Jika sebuah dadu dan sebuah mata koin dilemparkan secara bersamaan. Dengan mengguna-kan diagram pohon tentukan ruang sampel percobaan tersebut?
    b. Dari angka - angka 1, 2, 3, dan 4 akan dibentuk bilangan dengan 3 angka dan tidak boleh ada angka yang diulang.
    c. Kota B dapat dituju ke kota B dengan menggunakan 4 jenis bus angkutan umum, sementara dari kota B ke kota C dapat dituju dengan 5 jenis bus angkutan umum. Jika kota B adalah kota satu-satunya penghubung kota A dengan kota C maka tentukan pasangan bus yang dapat dipilih seseorang untuk bepergian dari kota A ke kota C
4. Dua dadu setimbang dilemparkan secara bersamaan. Jika E adalah kejadian jumlah mata dadu bilangan prima.

a. Berapakah peluang kejadian E?

b. Hitunglah peluang diluar kejadian E?

5. Tiga dadu setimbang dilemparkan secara bersamaan. Jika E adalah kejadian jumlah tiga mata dadu lebih besar dari 10.

   c. Berapakah peluang kejadian E?

   d. Hitunglah Peluang diluar kejadian E?

6. Di dalam kandang ayam terdapat 40 ekor ayam. 21 ekor diantaranya adalah jantan dan 19 ekor adalah ayam berbulu hitam. Andi menangkap seekor ayam tersebut, tentukan peluang ayam yang tertangkap adalah ayam betina berbulu tidak hitam jika banyak ayam jantan berbulu hitam adalah 15 ekor.

7. Dengan menggunakan konsep himpunan, tunjukkan bahwa $0 \leq P(E) \leq 1$ dengan adalah $P(E)$ peluang kejadian E.

8. Tiga buah koin setimbang ditoss bersama dengan sebuah dadu setimbang sisi enam. Tentukan peluang kejadian berikut:

   a. Peluang munculnya 2 angka dan bilangan genap.

   b. Peluang munculnya paling sedikit 2 angka dan bilangan kurang dari 5.

   c. Peluang munculnya banyaknya angka selalu lebih banyak dengan munculnya gambar dan bilangan faktor 6.

9. Perhatikan beberapa data berikut:

   9, 6, 7, 7, 7, 5, 7, 8, 5, 8, 8, 8, 8, 9, 5, 6, 7, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 4, 5, 6, 7, 8, 6, 5, 6, 4, 6, 7, 8, 9, 9, 9, 9, 6, 7, 7, 3, 4, 5, 3, 6, 3, 5, 6, 7, 4, 6, 9, 9, 9, 9, 8, 8, 9, 5, 6, 7, 4, 6, 9, 6, 7, 7, 7, 7, 5, 7, 8, 5, 3, 5, 6, 7, 4, 6, 9, 9, 8, 9, 7, 5, 6, 7.

   Sajikan data tersebut ke dalam diagram lingkaran dan tabel. Tunjukkan frekuensi relatif masing – masing data tersebut.

10. S adalah ruang sampel dan E adalah himpunan kejadian yang diharapkan muncul dengan $n(E) = x^2 - x + 1$ dan $n(S) = [n(E)]^2 - n(E) - 1$.

    Jika $P(E) = 3/5$ maka tentukanlah $x^2 + x + 1$

Bagian penutup ini merupakan rangkuman tentang informasi dan konsep peluang

D. PENUTUP

Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep peluang di atas, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut.

1. Frekuensi relatif dari suatu hasil yang mungkin terjadi dalam suatu percobaan adalah perbandingan banyaknya hasil yang terjadi dalam suatu percobaan dengan banyaknya percobaan dilakukan. Ditulis

   $$\text{Frekuensi relatif} = \frac{\text{Banyak hasil yang terjadi}}{\text{Banyak percobaan}}$$

2. Sampel adalah semua hasil yang mungkin terjadi dari sebuah percobaan.
3. Ruang sampel (S) adalah suatu himpunan yang anggotanya semua kejadian yang mungkin terjadi dalam percobaan atau suatu himpunan yang anggotanya titik-titik sampel.
4. Kejadian (E) adalah himpunan bagian dari ruang sampel S.
5. Ada beberapa cara untuk menyajikan semua kejadian yang mungkin muncul dalam suatu percobaan, yaitu: cara mendaftar, menggunakan diagram cartesisus, menggunakan tabel, dan menggunakan diagram pohon.
6. Peluang suatu kejadian E adalah hasil bagi banyaknya kemungkinan kejadian E terjadi dengan banyaknya anggota ruang sampel dari suatu percobaan, dirumuskan: $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$ dimana $n(E)$ adalah banyaknya kejadian E yang terjadi dan $n(S)$ adalah banyak anggota ruang sampel suatu percobaan.

7. Peluang sebuah kejadian E tepat berada diantara nol dan satu, ditulis dengan:

   $0 \leq P(E) \leq 1$. Artinya jika peluang sebuah kejadian E adalah 0 maka kejadian E tidak terjadi, sedangkan jika peluang kejadian E adalah 1 maka kejadian E pasti terjadi

8. Jika E merupakan sebuah kejadian, maka kejadian yang berada di luar E adalah seluruh kejadian yang tidak terdaftar di E, disebut komplemen dari kejadian E, disimbolkan dengan E^c.

9. Jika E suatu kejadian dalam sebuah percobaan, maka jumlah nilai peluang kejadian E dan nilai peluang kejadian komplemen E adalah 1, ditulis. $P(E) + P(E^c) = 1$

A. Petunjuk Pelaksanaan Penilaian

Setiap sub bab terdapat uji kompetensi yang berisi soal-soal atau penugasan projek, produk, unjuk kerja. Unsur-unsur penilaian dalam buku petunjuk guru adalah

1) Penilaian Kompetensi Pengetahuan

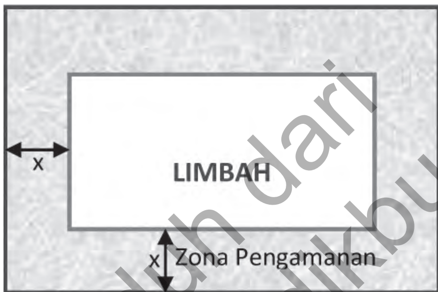
   Untuk menilai kompetensi pengetahuan yang dimiliki siswa, maka setiap akhir sub bab atau bab buku ini, guru sebaiknya menguji kemampuan siswa dengan memberikan tes atau non tes atau penugasan berupa soal-soal yang tersedia pada uji kompetensi yang tersedia pada setiap bab buku ini. Untuk penentuan skor yang diperoleh siswa, guru harus mengembangkan pedoman penskoran atau rubrik penilaian. Sebagai contoh teknik tes untuk dipedomani guru, disajikan sebagai berikut.

Contoh Teknik Tes

Satuan Pendidikan	:	SMA
Mata Pelajaran	:	Matematika
Kelas	:	X
Kompetensi dasar	:	3.1 Mendeskripsikan persamaan dan fungsi kuadrat, memilih strategi dan menerapkan untuk menyelesaikan persamaan dan fungsi kuadrat serta memeriksa kebenaran jawabannya.
Indikator	:	Siswa dapat menerapkan konsep dan aturan fungsi kuadrat dalam pemecahan masalah nyata di sekitar siswa
Materi	:	Fungsi kuadrat

Soal

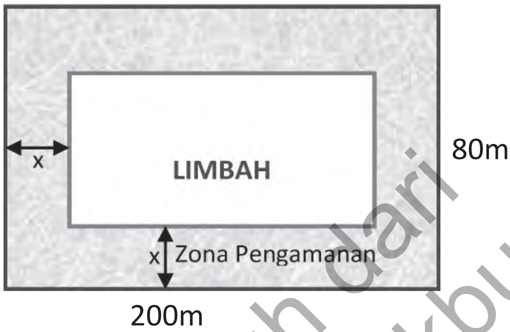
Salah satu pembaharuan penanganan limbah pabrik kertas Indo Rayon (Toba Pulp) di Kabupaten Toba Samosir, daerah limbah dilokasikan pada sebidang tanah berbentuk persegi panjang yang lebarnya 80 m dan panjangnya 200 m. Peraturan pemerintah mensyaratkan bahwa daerah limbah paling sedikit memiliki luas 10.000 m^2 dan memiliki zona pengamanan dengan lebar serba sama di sekeliling daerah limbah, seperti terlihat pada gambar.



Berdasarkan peraturan pemerintah tersebut, pimpinan Indo Rayon menetapkan realisasi luas daerah limbah adalah 10.800 m^2. Dapatkah pembangunan daerah limbah tersebut direalisasikan pada tanah yang tersedia? Jika dapat direalisasikan, berapa ukuran daerah zona pengaman yang disediakan?

Pedoman Penskoran

No	Kunci Jawaban	Skor
1.	Diketahui: Ukuran tanah yang tersedia 200 m × 80 m Luas daerah limbah menurut peraturan pemerintah minimal 10.000 m^2. Kebijakan pimpinan Indo Rayon menetapkan luas daerah limbah 10.800 m^2.	1

2	Ditanya: a. Dapatkah pembangunan daerah limbah itu direalisasikan di atas tanah yang tersedia ?. b. Berapa ukuran daerah limbah dan zona pengaman tersebut?	1
3	***Alternatif Penyelesaian*** Interpretasi masalah dalam gambar sebagai berikut.  	1
4	Misalkan p adalah panjang tanah yang tersedia l adalah lebar tanah yang tersedia p_1 adalah panjang daerah limbah...................................... l_1 adalah lebar daerah limbah Berarti paling tidak ukuran daerah limbah $p_1 = p - 2x$ dan $l_1 = l - 2x$......................................	1 1

5	Menurut peraturan pemerintah luas daerah limbah minimal 10.000 m^2 dan realisasi daerah limbah yang diinginkan 10.800 m^2. Karena daerah limbah berbentuk persegi panjang maka luas daerah limbah dapat dinyatakan $L_1 = p_1 \times l_1$.. $= (p - 2x)(l - 2x)$ $= pl - (2p + 2l)x + 4x^2$...................................... $10.800 = 16.000 - 560x + 4x^2$.................................... $10.800 = 16.000 - 560x + 4x^2 \Leftrightarrow x^2 - 140x + 1.300 = 0$........ $\Leftrightarrow x^2 - 10x - 130x + 1.300 = 0$ $\Leftrightarrow x(x - 10) - 130(x - 10) = 0$.. $\Leftrightarrow (x - 10)(x - 130) = 0$.. $\Leftrightarrow (x - 10) = 0$ atau $(x - 130) = 0$ $\Rightarrow x = 10$ atau $x = 130$..	1 1 1 1 1 1 1
6	Agar memperoleh luas daerah limbah yang diinginkan maka ukuran zona pengaman adalah 10 m. Berarti paling tidak ukuran daerah limbah $p_1 = p - 2x$dan $l_1 = l - 2x$.. $p_1 = 200 - 2(10)$ dan $l_1 = 80 - 2(10)$.......................... $p_1 = 180$ dan $l_1 = 60$ Sehingga ukuran daerah limbah adalah 180 m $\times$ 60 m...........	1 1 1
7	**Kesimpulan:** Peraturan pemerintah dan kebijakan pimpinan PT Indo Rayon untuk membangun daerah limbah di atas tanah yang tersedia dapat diwujudkan dengan ukuran daerah limbah 180 m $\times$ 60 m dan ukuran lebar zona pengaman disekeliling daerah limbah adalah 10 m.	1
	Skor maksimal	**16**

$$Nilai = \frac{Skor\ Perolehan}{Skor\ Maksimal} \times 100$$

Contoh Penilaian Penugasan Produk

Satuan Pendidikan : SMA

Mata Pelajaran : Matematika

Kelas : X

Kompetensi dasar : 3.17 Memahami konsep fungsi trigonometri dan menganalisis grafik fungsinya serta menentukan hubungan nilai fungsi Trigonometri dari sudut- sudut istimewa

Indikator : Siswa dapat membuat media sederhana grafik fungsi trigonometri (sinus, kosinus, dan tangen).

Materi : Grafik fungsi trigonometri

Tugas

Rancanglah media grafik fungsi sinus, kosinus, dan tangen menggunakan bahan karton, benang, besi, atau tripleks. Ada 3 buah produk media sederhana yang kamu hasilkan secara kelompok dengan waktu 2 minggu.

Rubrik Penilaian Produk

Kriteria	Skor
• Produk (hasil kerja) sesuai dengan konsep dan prinsip matematika; • Kerja kreatif; • Produk (hasil kerja) asli; • Diselesaikan tepat waktu; • Kerapian sangat baik.	4

Kriteria	Skor
• Produk (hasil kerja) sesuai dengan konsep dan prinsip matematika; • Kerja kurang kreatif; • Produk (hasil kerja) asli; • Diselesaikan tidak tepat waktu; • Kerapian cukup baik.	3
• Produk (hasil kerja) kurang sesuai dengan konsep dan prinsip matematika; • Kerja tidak kreatif; • Produk (hasil kerja) asli; • Diselesaikan tidak tepat waktu; • kerapian kurang baik.	2
• Produk (hasil kerja) sesuai dengan konsep dan prinsip matematika; • Kerja tidak kreatif; • Produk (hasil kerja) tidak asli; • Diselesaikan tidak tepat waktu; • Kerapian tidak baik, • Tidak ada laporan hasil kerja yang dapat disajikan di depan kelas.	1
Tidak melakukan tugas produk	0

Rubrik Tugas Produk

No.	Kriteria	Kelompok							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	Kesesuaiandengan konsep dan prinsip matematika								
2	Kreatifitas								
3	Keaslian produk								
4	Ketepatan waktu								
5	Kerapian								

2) Penilaian Kompetensi Keterampilan

Untuk mengetahui kompetensi keterampilan siswa, guru melakukan 3 teknik penilaian, yaitu: (1) tes unjuk kerja, (2) penilaian projek, (3) penilaian portofolio. Setiap akhir bab buku ini, guru harus melaksanaan salah satu dari tiga jenis penilaian tersebut untuk mengukur keterampilan matematik siswa. Di bagian ini diberi contoh penilaian unjuk kerja dan penilaian projek beserta rubrik penilaiannya yang dapat dipedomani guru.

Contoh Penilaian Unjuk Kerja

Satuan Pendidikan : SMA
Mata Pelajaran : Matematika
Kelas : X
Kompetensi dasar : 4.18 Menyajikan hasil penerapan konsep peluang untuk menjelaskan berbagai objek nyata melalui percobaan menggunakan frekuensi relatif.

Indikator : Siswa dapat menentukan peluang kejadian dari berbagai situasi

Materi : Peluang

Tugas Unjuk Kerja

Koin Keberuntungan

Sebuah koin yang setimbang dilempar undi. Jika koin itu jatuh ke tanah, maka bagian sisi koin yang terlihat akan berupa Gambar (G) atau Angka (A).

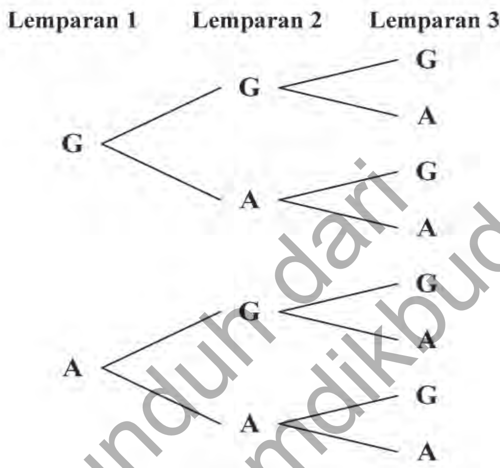
a. Jika koin dilempar undi 3 kali, berapa peluang
   1) paling sedikit terdapat dua gambar
   2) paling sedikit terdapat dua gambar tetapi satu lemparan koin sudah dipastikan adalah Gambar
b. Jika koin dilempar undi sebanyak 25 kali, berapa peluang bahwa semua hasil yang muncul adalah Gambar? Jelaskan jawabanmu!
c. Seseorang dikatakan **menang** undian jika koin yang dilempar undi menghasilkan atau muncul semua Gambar. Tentukan banyak lemparan koin minimum supaya peluang memenangkan undian adalah 0,04!

Rubrik Penilaian Unjuk Kerja

Kriteria	Skor
Jawaban menunjukkan pengetahuan matematika mendasar yang berhubungan dengan tugas ini. Ciri-ciri: • Semua jawaban benar tetapi ada cara yang tidak sesuai atau ada satu jawaban salah. Sedikit kesalahan perhitungan dapat diterima	4
Jawaban menunjukkan pengetahuan matematika mendasar yang berhubungan dengan tugas ini. Ciri-ciri: • Semua jawaban benar tetapi ada cara yang tidak sesuai atau ada satu jawaban salah. Sedikit kesalahan perhitungan dapat diterima, atau • Salah satu bagian a atau kedua-duanya dijawab salah. Siswa tidak membuat diagram pohon tetapi jawaban lain benar. Sedikit kesalahan perhitungan dapat diterima, atau • Bagian a dijawab benar, tetapi bagian b atau c salah atau tidak dijawab tetapi metode yang digunakan sesuai.	3
Jawaban menunjukkan keterbatasan atau kurangnya pengetahuan matematika yang berhubungan dengan masalah ini. Ciri-ciri: • Dua bagian pertanyaan dijawab salah atau tidak selesai dikerjakan tetapi satu pertanyaan dijawab dengan tepat menggunakan prosedur yang benar	2
Jawaban hanya menunjukkan sedikit atau sama sekali tidak ada pengetahuan matematika yang berhubungan dengan masalah ini. Ciri-ciri: • Semua jawaban salah, atau • Jawaban benar tetapi tidak ada bukti bahwa jawaban diperoleh melalui prosedur yang benar.	1
Tidak ada jawaban atau lembar kerja kosong	0

Unjuk Kerja Matematika

Siswa harus membuat diagram pohon untuk dapat mengorganisasi ruang sampel yang diperoleh untuk pertanyaan a, sehingga dapat menentukan anggota ruang sampel yang memenuhi pertanyaan a. Sedangkan untuk menyelesaikan pertanyaan b, siswa harus menemukan pola



Siswa mungkin akan menggunakan diagram pohon seperti di atas atau langsung menggunakan teori peluang

Ruang sampel S = {*GGG, GGA, GAG, GAA, AGG, AGA, AAG, AAA*}

Anggota ruang sampel $n(S) = 8$

Bagian a

1) Ada 4 kemungkinan kejadian paling sedikit dua gambar muncul, yaitu *GGG, GGA, GAG, AGG*. Dengan demikian peluang paling sedikit terdapat dua gambar adalah $p = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

2) Jika satu lemparan koin sudah pasti terjadi Gambar, maka mustahil akan terjadi Angka semua sehingga *AAA* harus dihilangkan. Dengan demikian anggota ruang sampel yang baru adalah $n(S) = 7$. Jadi peluang paling sedikit terdapat 2 gambar adalah p = $\frac{4}{7}$

Bagian b

Jika koin dilempar undi sebanyak 25 kali, maka anggota ruang sampel adalah 2^{25}. Dari semua kemungkinan yang muncul hanya ada **satu kemungkinan** berupa semua Gambar.

Bagian c

Jika koin dilempar undi sebanyak *n* kali maka banyak anggota ruang sampel adalah 2^n. Dari semua kemungkinan tersebut hanya ada **satu kemungkinan** yang menghasilkan muncul semua gambar.

Jadi banyak lemparan koin minimum supaya peluang memenangkan undian 0,04 adalah

$$\frac{1}{2^n} = 0,04 \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{4}{100}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{1}{25}$$

$$\Leftrightarrow 2^n = 25$$

$$\Leftrightarrow n = {}^2\log 25$$

$$\Leftrightarrow n \approx \frac{\log 25}{\log 2} \approx 5$$

Jadi supaya peluang menang, maka lemparan koin minimal **5** kali

Berdasarkan rubrik yang sudah dibuat dapat dinilai tugas unjuk kerja yang dikerjakan siswa. Skor yang diperoleh masih harus diubah ke dalam skala angka yang ditetapkan. (Misal dalam bentuk 0 – 100 atau 1 – 4).

Kriteria	Skor Perolehan					Bobot	Nilai
	0	1	2	3	4		
Pendekatan pemecahan masalah							
• Sistematika pemecahan masalah					X	4	16
• Bentuk penyelesaian masalah					X		16
Ketepatan Perhitungan							
• Ketepatan pengunaan rumus (prinsip peluang)					X	4	16
• Kebenaran hasil yang diperoleh					X		16
Gambar							
• Ketepatan gambar sebagai interpretasi masalah					X	2	8
• Kesesuaian gambar dalam pemecahan masalah					X		8
• Kerapian dan penyajian					X		8
Penjelasan							
• Kejelasan uraian jawaban					X	1,5	6
• Pemahaman terhadap aspek hubungan					X		6
Nilai yang diperoleh							100

Misalkan Siti memperoleh skor seperti pada kolom skor perolehan

Kriteria	Skor Perolehan					Bobot	Nilai
	0	1	2	3	4		
Pendekatan pemecahan masalah						4	
• Sistematika pemecahan masalah			X				8
• Bentuk penyelesaian masalah					X		16
Ketepatan Perhitungan						4	
• Ketepatan pengunaan rumus (prinsip peluang)				X			12
• Kebenaran hasil yang diperoleh				X			12
Gambar						2	
• Ketepatan gambar sebagai interpretasi masalah					X		8
• Kesesuaian gambar dalam pemecahan masalah					X		8
• Kerapian dan penyajian					X		8
Penjelasan						1,5	
• Kejelasan uraian jawaban					X		6
• Pemahaman terhadap aspek hubungan					X		6
Nilai yang diperoleh							84

Jadi nilai akhir siti adalah **84**

Contoh Penilaian Projek

Satuan Pendidikan : SMA

Mata Pelajaran : Matematika

Kelas : X

Kompetensi dasar : 4.1 Menyajikan masalah nyata menggunakan operasi aljabar berupa eksponen dan logaritma serta menyelesaikannya menggunakan sifat- sifat dan aturan yang telah terbukti kebenarannya.

Indikator : Siswa dapat menerapkan berbagai konsep dan aturan eksponen dalam menganalisis, membuat model dan penyelesaian projek matematika dalam bidang fisika, kimia, astronomi, dan ekonomi.

Materi : Eksponen

Tugas Projek

Bilangan yang terlalu besar atau terlalu kecil seringkali ditulis dalam notasi eksponen yang dituliskan sebagai *a E b* yang nilainya adalah $a \times 10^{b}$. Sehingga 0,000052 ditulis sebagai 5,2 *E* -5. Cari besaran-besaran fisika, kimia, astronomi, dan ekonomi yang nilainya dinyatakan dengan notasi eksponen.

Misalkan kecepatan cahaya adalah 300.000 km/det, sehingga dalam notasi eksponen ditulis sebagai 3 *E* 8 m/det. Buatlah laporan hasil kerja kelompokmu dan sajikan di depan kelas!

Rubrik Penilaian Projek

Kriteria	Skor
• Menunjukkan kreatifitas yang tinggi dalam pemecahan masalah; • Kejelasan atau keterangan jawaban sangat lengkap; • Kebenaran jawaban masalah sangat tepat; • Kerjasama kelompok sangat baik; • Interpretasi jawaban masalah/gambar sangat akurat; • Penggunaan strategi benar dan tepat; • Kerapian sangat baik. • Laporan disusun dengan baik dan lengkap • Kemampuan komunikasi dalam presentase hasil kerja baik	4
• Menunjukkan kreatifitas yang cukup dalam pemecahan masalah; • Kejelasan atau keterangan jawaban cukup lengkap; • Kebenaran jawaban masalah cukup tepat; • Kerjasama kelompok cukup baik; • Interpretasi jawaban masalah/gambar cukup akurat; • Penggunaan strategi benar dan tepat; • Kerapian cukup baik. • Laporan disusun dengan cukup dan kurang lengkap • Kemampuan komunikasi dalam presentase hasil kerja baik	3

Kriteria	Skor
• Menunjukkan kreatifitas yang rendah dalam pemecahan masalah, • kejelasan atau keterangan jawaban cukup lengkap, • kebenaran jawaban masalah cukup tepat, • kerjasama kelompok cukup baik, • interpretasi jawaban masalah/gambar kurang akurat, • penggunaan strategi benar dan tepat, • kerapian kurang baik.	2
• Menunjukkan kreatifitas yang rendah dalam pemecahan masalah, • Kejelasan atau keterangan jawaban tidak lengkap, • Kebenaran jawaban tidak tepat, kerjasama kelompok kurang baik, • Interpretasi jawaban masalah/gambar tidak akurat, • Penggunaan strategi benar dan tepat, • Kerapian tidak baik, • Tidak ada laporan hasil kerja yang dapat disajikan di depan kelas.	1
Tidak melakukan tugas proyek	0

Rubrik Tugas Otentik: Projek Matematika

No.	Kriteria	Kelompok							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	Kreativitas								
2	Kejelasan atau keterangan jawaban lengkap								
3	Kebenaran jawaban								
4	Kerjasama dengan sesama anggota kelompok								
5	Keakuratan interpretasi jawaban/gambar								
6	Penggunaan strategi benar dan tepat								
7	Kerapian								

3) Penilaian kompetensi sikap

Penilaian kompetensi sikap dilakukan pada saat berlangsungnya proses belajar mengajar. Instrumen penilaiannya dapat berupa:

a) Lembar observasi

b) Lembar penilaian diri (*self assessment*)

c) Angket untuk penilaian antar peserta didik (*peer assessment*)

d) Jurnal

Seluruh instrumen yang dibuat, harus dilengkapi dengan pedoman penskoran atau rubrik penilaian. Berikut berbagai contoh instrumen penilaian sikap.

Contoh Penilaian Sikap

KUESIONER

SIKAP SISWA TERHADAP

KOMPONEN DAN KEGIATAN PEMBELAJARAN

Nama Sekolah : .... Kelas/Semester : ....

Mata Pelajaran : .... Hari/tanggal : ....

Materi : .... Nama : ....

A. TUJUAN

Tujuan penggunaan kuesioner ini adalah untuk menjaring data sikap siswa terhadap kegiatan dan komponen pembelajaran dalam pelaksanaan pembelajaran matematika.

B. PETUNJUK

Beri tanda cek (√) pada kolom yang sesuai menurut pendapatmu.

No	Aspek	Senang	Tidak Senang
I	Bagaimana sikapmu terhadap komponen berikut? a. Materi pelajaran b. Buku Siswa c. Lembar Kerja Siswa (LKS) d. Suasana belajar di kelas e. Cara guru mengajar	....	....
Berikan alasan secara singkat atas jawaban yang diberikan!			

		Baru	Tidak Baru
II	Bagaimana pendapatmu terhadap komponen berikut? a. Materi pelajaran b. Buku Siswa c. Lembar Kerja Siswa (LKS) d. Suasana belajar di kelas e. Cara guru mengajar	....	....
Berikan alasan secara singkat atas jawaban yang diberikan!			
		Berminat	**Tidak Berminat**
III	Apakah kamu berminat mengikuti kegiatan belajar selanjutnya seperti yang telah kamu ikuti sekarang?	....	....
Berikan alasan secara singkat atas jawaban yang diberikan!			
		Ya	**Tidak**

IV	Bagaimana pendapatmu terhadap aktivitas belajar matematika di kelas dan di luar kelas? a. Apakah Ananda merasa terbebani terhadap tugas matematika yang diberikan guru? b. Aktivitas belajar matematika menurut saya adalah menarik	....	....
Berikan alasan secara singkat atas jawaban yang diberikan!			

		Bermanfaat	Tidak Bermanfaat
V	Bagaimana menurut pendapatmu, apakah matematika bermanfaat dalam kehidupan?		
Berikan alasan secara singkat atas jawaban yang diberikan!			

Rubrik Penilaian Sikap

Kriteria	Skor
Siswa memberikan respon **senang** dan **baru** terhadap komponen pembelajaran matematika, **berminat, tertarik dan tidak merasa terbebani** terhadap tugas dan aktivitas belajar matematika, tetapi **merasakan kebermanfaatan** belajar matematika.	4
Siswa memberikan respon **senang** dan **baru** terhadap komponen pembelajaran matematika, **berminat, tertarik dan tidak merasa terbebani** terhadap tugas dan aktivitas belajar matematika, tetapi tidak **merasakan kebermanfaatan** belajar matematika.	3
Siswa memberikan respon **senang** dan **baru** terhadap komponen pembelajaran matematika tetapi **tidak berminat, tidak tertarik dan merasa terbebani** terhadap tugas dan aktivitas belajar matematika, serta **tidak merasakan kebermanfaatan** belajar matematika.	2
Siswa memberikan respon **tidak senang** terhadap komponen pembelajaran matematika, **tidak berminat, tidak tertarik dan merasa terbebani** terhadap tugas dan aktivitas belajar matematika, serta **tidak merasakan kebermanfaatan** belajar matematika.	1

Contoh Penilaian Diri

PENILAIAN DIRI DALAM KELOMPOK (SELF-ASSESSMENT IN GROUP)
Nama : .... Anggota Kelompok : .... Kegiatan Kelompok : .... Untuk pertanyaan 1 sampai dengan 5 tulis masing-masing huruf sesuai dengan pendapatmu • A = Selalu • B = Jarang • C = Jarang Sekali • D = Tidak pernah 1 ____ Selama diskusi saya memberikan saran kepada kelompok untuk didiskusikan 2 ____ Selama diskusi saya memberikan saran kepada kelompok untuk didiskusikan. 3 ____ Ketika Kami berdiskusi, setiap anggota memberikan masukan untuk didiskusikan 4 ____ Semua anggota kelompok harus melakukan sesuatu dalam kegiatan kelompok 5 ____ Setiap anggota kelompok mengerjakan kegiatannya sendiri dalam kegiatan kelompok Selama kegiatan, saya .... ____ Mendengarkan ____ Mengendalikan kelompok ____ Bertanya ____ Mengganggu kelompok ____ Merancang gagasan ____ Tidur
6 Selama kegiatan kelompok, tugas apa yang kamu lakukan? ______________________________ ______________________________

Contoh Penilaian Partisipasi Siswa

LEMBAR PENILAIAN PARTISIPASI

Nama : ____

Kelas : ____

Hari/Tanggal : ____

Kamu telah mengikuti pelajaran matematika hari ini. Ingatlah kembali bagaimana partisipasi kamu dalam kelas matematika hari ini.

Jawablah pertanyaan berikut sejujurnya:

- Apakah kamu berpartisipasi dalam diskusi ?
- Apakah kamu telah mempersiapkan diri sebelum masuk kelas, atau telah mengerjakan PR, sehingga kamu dapat menjawab pertanyaan di kelas?
- Apakah kamu bertanya ketika kamu tidak paham ?
- Jika ada teman bertanya (kepada guru/kepadamu/kepada teman lain), apakah kamu menyimaknya ?

Berikan skor atas partisipasi kamu, menurut ketentuan berikut ini.

- ➢ Jika kamu menjawab “**ya**” pada semua pertanyaan di atas, bagus ..., kamu telah melakukan partisipasi yang sempurna. Berikan nilai untuk dirimu **5.**
- ➢ Jika kamu menjawab **“ya”** pada tiga pertanyaan di atas, berikan nilai untuk dirimu **4.**
- ➢ Jika kamu menjawab **“ya”** pada dua pertanyaan di atas, berikan nilai untuk dirimu **3.**
- ➢ Jika kamu hanya menjawab “ya” paling banyak pada satu pertanyaan di atas berikan nilai untuk dirimu 2, dan upayakan untuk meningkatkan partisipasimu dalam pelajaran matematika.

Nilai partisipasi saya hari ini adalah : _____________.

Tanda tangan__________________________.

LEMBAR PARTISIPASI

(Lembar ini diisi setiap jam belajar matematika)

Tulislah dengan jujur, partisipasi anda dalam belajar matematika di kelas hari ini.

Partisipasi yang dimaksud adalah:

- **Bertanya kepada teman di dalam kelas**
- **Bertanya kepada guru di dalam kelas**
- **Menyelesaikan tugas belajar dalam kelompok**
- **Mempresentasikan hasil kerja di depan kelas**
- **Menawarkan ide / menjawab pertanyaan teman di dalam kelas**
- **Menawarkan ide / menjawab pertanyaan guru di dalam kelas**
- **Membantu teman dalam belajar**

Pertanyaan utama yang harus dijawab pada tabel berikut adalah:

Partisipasi apa yang kamu lakukan dalam belajar Matematika hari ini ?

Hari/Tanggal	Partisipasi apa yang kamu lakukan?

Contoh Pengolahan Laporan Pencapaian Kompetensi Matematika

a. **Pengelolan Skor Kompetensi Pengetahuan**

Setelah pelaksanaan uji kompetensi pengetahuan matematika melalui tes dan penugasan dengan contoh instrumen dan pedoman penskoran yang telah disajikan di atas maka diperoleh skor. Dari beberapa kali pemberian tes dan penugasan dalam mengukur kompetensi pengetahuan, perlu pengelolaan skor untuk laporan pencapaian kompetensi. Berikut contoh untuk dipedomani guru.

KD	Skor		Skor Akhir	
	Tes	Penugasan	Skala 1 – 100	Skala 1 - 4
3.1	84	90	86	3.44
3.2	76	84	79	3.16
3.3	80	70	77	3.08
3.4	84	87	85	3.40
Rata-Rata Skor Akhir				3.22

Cara konversi ke skala 1 – 4 adalah

$$\frac{\textit{Skor diperoleh}}{\textit{Skor maksimal}} \times 4 = \textit{skor akhir}$$

b. **Pengelolan Skor Kompetensi Keterampilan**

Setelah pelaksanaan uji kompetensi keterampilan matematika melalui penilaian unjuk kerja, projek, dan portofolio dengan contoh instrumen dan rubrik yang telah disajikan di atas maka diperoleh skor. Dari beberapa kali pemberian tes dan penugasan dalam mengukur kompetensi pengetahuan, perlu pengelolaan skor untuk laporan pencapaian kompetensi. Berikut contoh untuk dipedomani guru.

KD	Skor			Skor Akhir	
	Tes Praktik	Projek	Portofolio	Skala 1 - 100	Skala 1 - 4
4.1	84	90	-	87	3.48
4.2	76	84	-	80	3.20
4.3	65	60	70	65	2.60
Rata-Rata Skor Akhir					3.09

Cara konversi ke skala 1 – 4 adalah

$$\frac{\textit{Skor diperoleh}}{\textit{Skor maksimal}} \square 4 \ \square \textit{skor akhir}$$

Petunjuk

1. Penilaian setiap mata pelajaran meliputi kompetensi pengetahuan, kompetensi keterampilan, dan kompetensi sikap. K
2. Kompetensi pengetahuan dan kompetensi keterampilan menggunakan skala 1–4 (kelipatan 0.33), sedangkan kompetensi sikap menggunakan skala Sangat Baik (SB), Baik (B), Cukup (C), dan Kurang (K), yang dapat dikonversi ke dalam predikat A - D seperti pada tabel di bawah ini.

Tabel : Konversi Kompetensi Pengetahuan, Keterampilan, dan Sikap

Predikat	Nilai Kompetensi		
	Pengetahuan	Keterampilan	Sikap
A	4	4	SB
A^-	3,66	3,66	
B^+	3,33	3,33	B
B	3	3	
B^-	2,66	2,66	
C^+	2,33	2,33	C
C	2	2	
C^-	1,66	1,66	
D^+	1,33	1,33	K
D^-	1	1	

3. Ketuntasan minimal untuk seluruh kompetensi dasar pada kompetensi pengetahuan dan kompetensi keterampilan yaitu 2.66 (B-)
4. Pencapaian minimal untuk kompetensi sikap adalah B. Untuk kompetensi yang belum tuntas, kompetensi tersebut dituntaskan melalui pembelajaran remedial sebelum melanjutkan pada kompetensi berikutnya. Untuk mata pelajaran yang belum tuntas pada semester berjalan, dituntaskan melalui pembelajaran remedial sebelum memasuki semester berikutnya.

B. Petunjuk Pelaksanaan Remedial dan Pengayaan

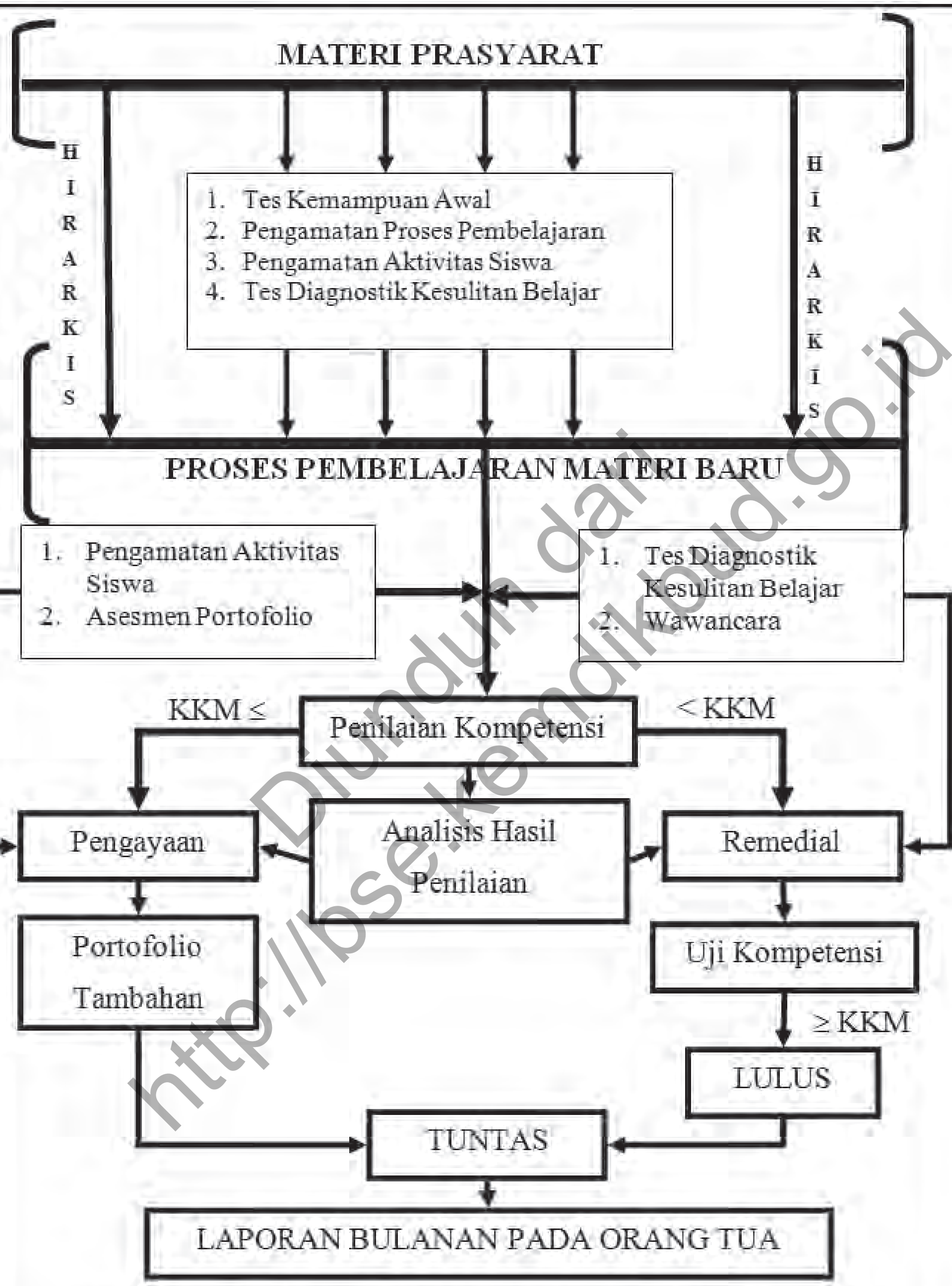
Kurikulum Matematika 2013 adalah kurikulum berbasis kompetensi dengan pendekatan pembelajaran tuntas. Pembelajaran tuntas *(mastery learning)* dalam proses pembelajaran berbasis kompetensi dimaksudkan adalah pendekatan dalam pembelajaran yang mempersyaratkan peserta didik menguasai secara tuntas seluruh kompetensi dasar pokok bahasan atau mata pelajaran tertentu. Peserta didik dikatakan menguasai secara tuntas seluruh kompetensi dasar pada pokok bahasan atau mata pelajaran matematika pada kelas tertentu, apabila peserta didik tersebut memperoleh hasil penilaian/uji kompetensi lebih besar atau sama dengan dari Kriteria Ketuntasan Minimum ($\geq$ KKM) yang ditetapkan dalam kurikulum. Sebaliknya peserta didik dikatakan tidak tuntas.

Bagi peserta didik yang memperoleh hasil penilaian/uji kompetensi pada pokok bahasan mata pelajaran matematika kurang dari KKM, wajib diberi pembelajaran remedial. Pembelajaran remedial pada hakikatnya adalah pemberian bantuan bagi peserta didik yang mengalami kesulitan atau kelambatan belajar. Bantuan dalam pembelajaran remedial mencakup (1) mengkaji ulang materi pada kompetensi dasar yang belum dicapai peserta didik, (2) pemberian tugas tersrtuktur yang dilakukan secara mandiri dan pemberian feetback atas hasil kerja peserta didik, (3) tutor sebaya dalam implementasi model pembelajaran koperatif tipe jigsaw, dan (4) kerjasaman sekolah dengan orang tua/wali peserta didik mengatasi masalah belajar peserta didik. Pemberian pembelajaran remedial meliputi dua langkah pokok, yaitu pertama mendiagnosis kesulitan belajar dan kedua memberikan perlakuan *(treatment)* pembelajaran remedial.

Bagi peserta didik yang memperoleh hasil penilaian/uji kompetensi pada pokok bahasan mata pelajaran matematika kurang dari KKM, wajib diberi pembelajaran pengayaan. Pembelajaran pengayaan adalah pembelajaran yang memberikan pengalaman (membangun berpikir tingkat tinggi, yaitu berpikir kritis dan kreatif) lebih mendalami materi terkait kompetensi atau kegiatan peserta didik yang melampaui persyaratan minimal yang ditentukan oleh kurikulum dan tidak semua peserta didik dapat melakukannya. Pendekatan pembelajaran yang diterapkan dalam pelaksanaan pengayaan melalui (1) pembelajaran berbasis masalah dan proyek untuk melatih peserta didik berpikir kritis dan kreatif, ketangguhan diri beradaptasi dan memecahkan masalah, (2) pemberian asesmen portofolio tambahan berbasis masalah, proyek, keterampilan proses, chek up diri dan asesmen kerjasama kelompok, dan (3) pemanfaatan IT dan ICT dalam proses pembelajaran.

Seluruh hasil belajar siswa yang tampak pada hasil penilaian/uji kompetensi dan asesmen otentik/portofolio dijadikan bahan kajian guru, guru konseling, dan kepala sekolah. Hasil belajar tersebut dilaporkan kepada pemangku kepentingan (terutama pada orang tua) setiap bulannya.

Secara garis besar, alur utama pelaksanaan pembelajaran remedial dan pengayaan disajikan pada skema berikut.



Gambar: Alur Utama Pelaksanaan Remedial dan Pengayaan

Daftar Pustaka

Anton. Howard, Rorres. Chris. (2005). *Elementary Linear Algebra with Applications*. John Wiley & Sons, Inc

Ball, Deborah Loewenberg. (2003). *Mathematical Proficiency for All Students (Toward a Strategic Research and Development Program in Mathematics Education*). United States of America: RAND.

Checkley , Kathy (2006). *The Essentials of Mathematics, Grades 7 -12*. United States of America: The Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD).

Chung, Kai Lai. (2001). *A Course in Probability Theory*, USA: Academic Press.

Committee on science and mathematics teacher preparation, center for education national research council (2001). *Educating Teachers of science, mathematics, and technology (new practice for new millennium*. United States of America: the national academy of sciences.

Douglas. M, Gauntlett. J, Gross. M. (2004). *Strings and Geometry*. United States of America: Clay Mathematics Institute.

Hefferon, Jim (2006). *Linear Algebra*. United States of America: Saint Michael's College Colchester.

Howard, dkk. (2008). *California Mathematics. Consepts, Skills, and Problem Solving 7*. Columbus-USA, The McGraw-Hill Companies, Inc.

Johnstone. P.T. (2002). *Notes on Logic and Set Theory*. New York: University of Cambridge.

Magurn A, Bruce. (2002). Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. United Kingdom: United Kingdom at the University Press, Cambridge.

Slavin, Robert, E. (1994). *Educational psychology, theories and practice*. Fourth Edition. Masschusetts: Allyn and Bacon Publishers.

Sinaga, Bornok. (2007). *Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Berdasarkan Masalah Berbasis Budaya Batak*. Surabaya: Program Pascasarjana UNESA.

Soedjadi, R. (2001). *Pemanfaatan realitas dan lingkungan dalam pembelajaran matematika*. *Makalah*, disajikan pada seminar "RME". UNESA: FMIPA UNESA Surabaya

Tan, Oon Seng. (1995). *Mathematics. A Problem Solving Approach*. Singapore: Federal Publication (S) Pte Lsd.

Urban. P, Owen. J, Martin. D, Haese. R, Haese. S. Bruce. M. (2005). *Mathematics For Yhe International Student (International Baccalaureate Mathematics HL Course)*. Australia: Haese & Harris Publication.

Van de Walle, John A. (1990). *Elementary school mathematics: teaching developmentally*. New York: Longman.

Van de Walle. Jhon, dkk. (2010). Elementary and Middle School Mathematics (teaching developmentally). United States of America: Allyn & Bacon.